



# КЛЮЧ к решению задач

# Алгебра

7-9

# Классы



Я ШКОЛА СРЕДН

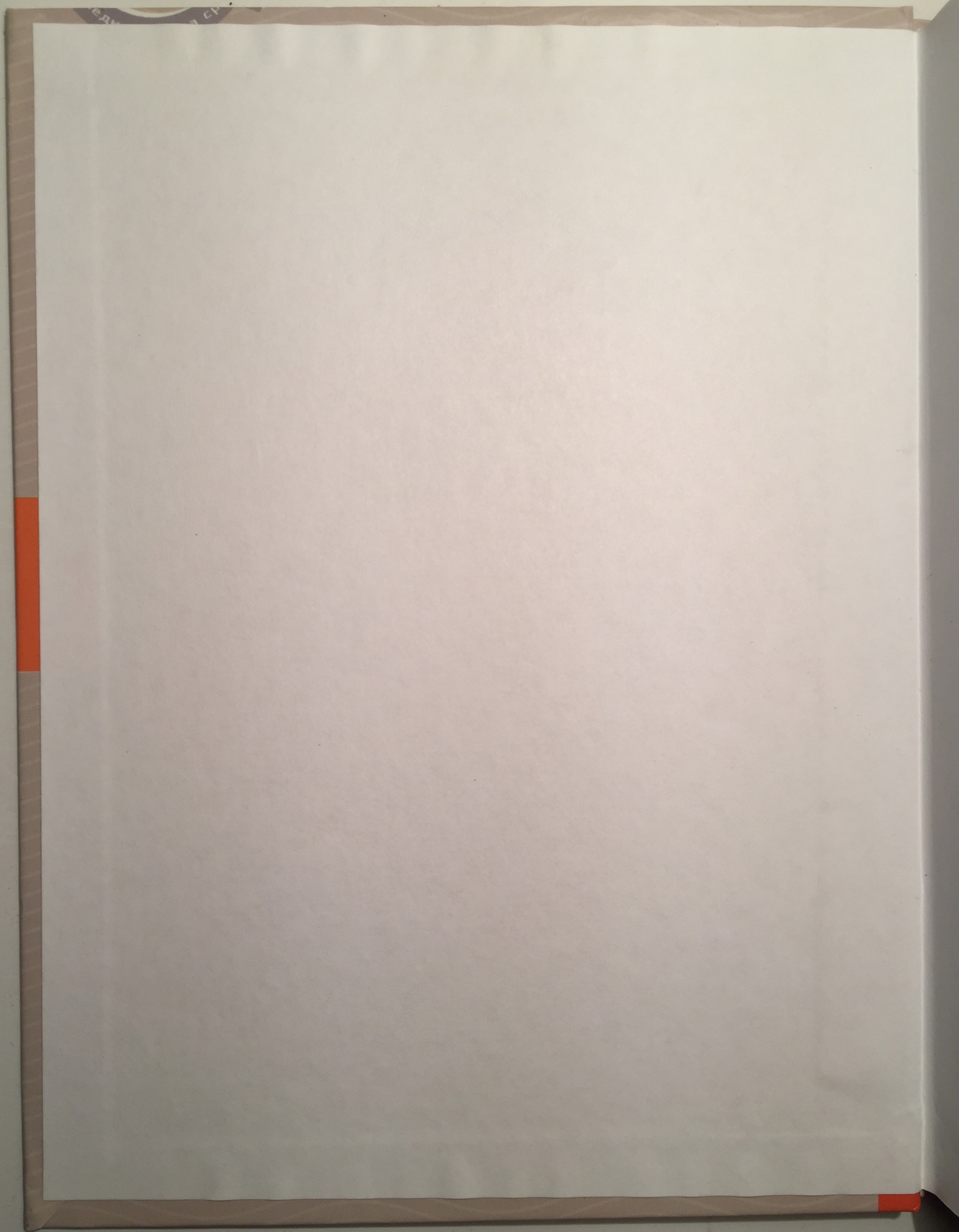
ШКОЛА СРЕД

1499-1500

EDDAM



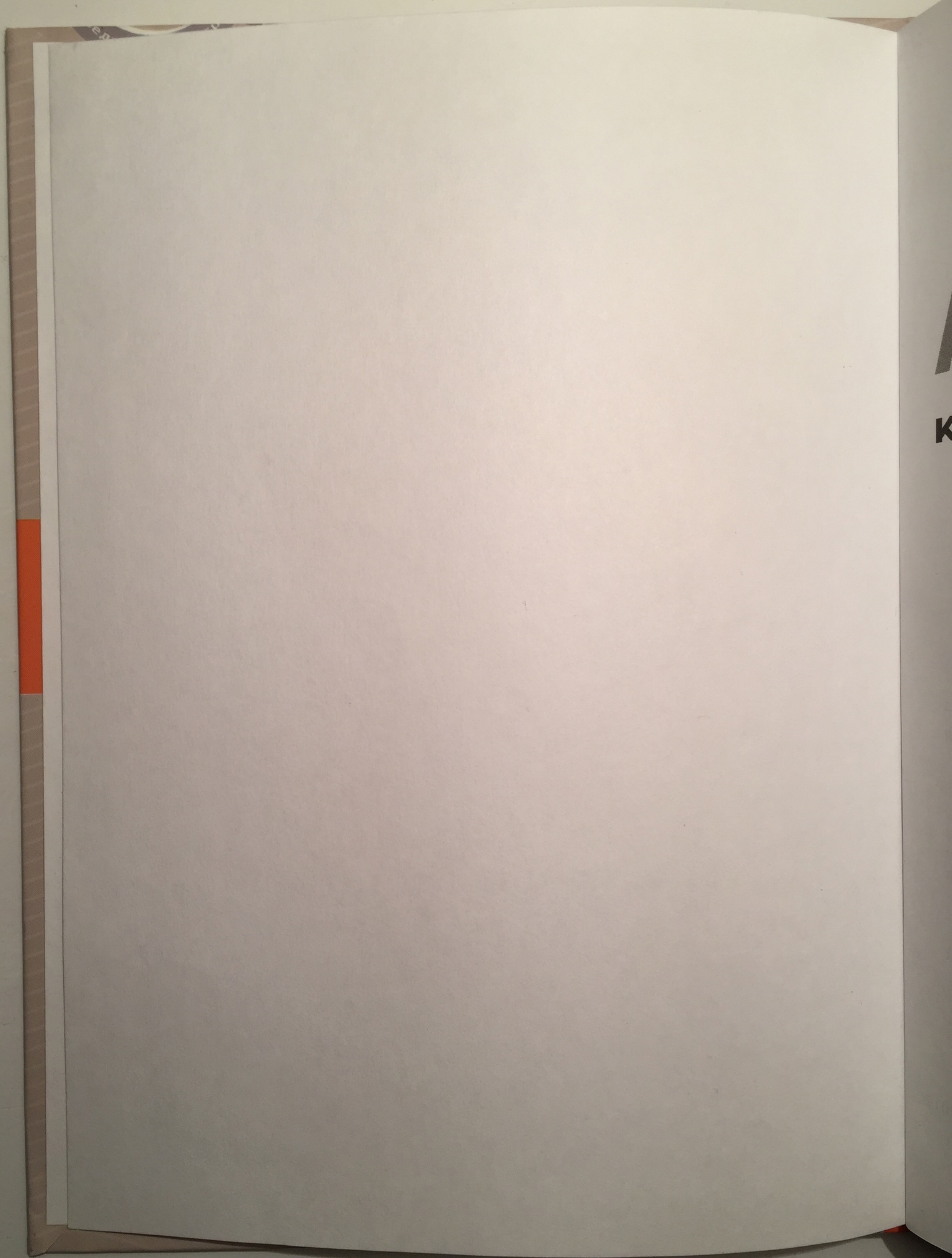














книга - репетитор

*Ж. Н. Михайлова*

# Алгоритмы — ключ к решению задач

## Алгебра

**7–9**  
**классы**

санкт-петербург

2017





УДК 373.167.1:512

ББК 22.1я72

М69

**Р е ц е н з е н т ы:**

*Е. Ю. Лукичева* — канд. пед. наук,  
заведующая кафедрой физико-математического образования СПб АППО  
*А. С. Фадеева* — учитель математики школы № 332 Санкт-Петербурга

Автор выражает благодарность  
*М. В. Ефименко* и *Г. П. Голиной*  
за помощь в компьютерном наборе рукописи

**Михайлова Ж. Н.**

**М69** Алгоритмы — ключ к решению задач: Алгебра. 7—9 классы. —  
СПб.: Издательский Дом «Литера», 2017. — 448 с.: ил. — (Серия  
«Средняя школа»).

ISBN 978-5-407-00491-2

Книга содержит справочные материалы: определения, формулы, алгоритмы решения типовых уравнений, неравенств и их систем и т. д. по всем разделам школьного курса алгебры, а также образцы решений заданий ЕГЭ. В пособии предложена методика работы с формулами, способствующая их лучшему применению и запоминанию.

УДК 373.167.1:512

ББК 22.1я72

ISBN 978-5-407-00491-2

© Михайлова Ж. Н., 2014

© Издательский Дом «Литера», 2017



# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Глава I. Алгебраические выражения</b>	<b>5</b>
§ 1. Числовые выражения	5
§ 2. Алгебраические выражения	8
§ 3. Одночлен. Стандартный вид одночлена	17
§ 4. Многочлен	21
§ 5. Разложение многочленов на множители	31
<b>Глава II. Алгебраические дроби</b>	<b>41</b>
§ 1. Алгебраические дроби	41
<b>Глава III. Неравенства</b>	<b>60</b>
§ 1. Числовые неравенства	60
§ 2. Неравенства с одной переменной	74
§ 3. Системы неравенств с одной переменной	82
§ 4. Графическое решение линейных неравенств	92
§ 5. Решение неравенств с неизвестной под знаком модуля	96
§ 6. Квадратные неравенства	100
§ 7. Метод интервалов (промежутков)	106
<b>Глава IV. Степени</b>	<b>116</b>
§ 1. Степень с натуральным показателем	116
§ 2. Степень с целым показателем	125
§ 3. Стандартный вид числа	133
§ 4. Степень с рациональным показателем	136
§ 5. Степень с иррациональным показателем	143
<b>Глава V. Корни</b>	<b>145</b>
§ 1. Арифметический квадратный корень	145
§ 2. Свойства арифметических корней $a \geq 0; b \geq 0$	151
§ 3. Извлечение корня из числа	168
<b>Глава VI. Действительные числа</b>	<b>174</b>
§ 1. Рациональные и иррациональные числа	174
§ 2. Сравнение действительных чисел	178
§ 3. Изображение действительных чисел на координатной прямой	180
§ 4. Перевод обыкновенных дробей в периодические и наоборот — периодических дробей в обыкновенные	182
§ 5. Модуль числа	186
§ 6. Комплексные числа	188
§ 7. Решение квадратных уравнений	195



<b>Глава VII. Приближенные вычисления</b> .....	200
§ 1. Абсолютная погрешность .....	200
§ 2. Округление чисел .....	205
§ 3. Относительная погрешность .....	209
§ 4. Действия над приближенными значениями .....	213
<b>Глава VIII. Уравнение</b> .....	219
§ 1. Решение линейных уравнений .....	221
§ 2. Решение уравнений I степени, содержащих неизвестную под знаком модуля .....	224
§ 3. Квадратные уравнения .....	226
§ 4. Дробно-рациональные уравнения .....	253
§ 5. Решение иррациональных уравнений .....	257
§ 6. Алгебраические уравнения $n$ -й степени .....	262
§ 7. Возвратные или симметричные уравнения .....	272
<b>Глава IX. Решение систем уравнений</b> .....	275
§ 1. Системы двух уравнений I степени с двумя неизвестными .....	275
§ 2. Графический способ решения систем уравнений .....	283
§ 3. Решение систем уравнений II степени .....	287
<b>Глава X. Решение задач (моделирование)</b> .....	295
§ 1. Решение задач с помощью уравнений I степени .....	297
§ 2. Решение задач с помощью систем уравнений I степени .....	302
§ 3. Задачи на движение, работу и стоимость товара .....	305
§ 4. Решение задач с помощью квадратного уравнения или системы уравнений II степени .....	312
§ 5. Решение задач на проценты .....	316
<b>Глава XI. Прогрессии</b> .....	325
§ 1. Числовая последовательность .....	325
§ 2. Арифметическая прогрессия .....	330
§ 3. Геометрическая прогрессия .....	337
<b>Глава XII. Функция</b> .....	346
§ 1. Переменные и постоянные величины .....	347
§ 2. Прямоугольная система координат .....	351
§ 3. Свойства функции .....	360
§ 4. Функция $y = kx$ и ее график .....	363
§ 5. Линейная функция и ее график .....	370
§ 6. Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее свойства .....	380
§ 7. Квадратичная функция .....	394
§ 8. Исследование квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ .....	413
<b>Приложение</b> .....	431
<b>Список алгоритмов</b> .....	440



## Дорогие друзья!

Эта книга написана для вас, ваших родителей и учителей, которые помогут вам научиться применять алгоритмы решения типовых задач и примеров по алгебре, а затем вы сможете самостоятельно решать их.

**Алгоритм** — это совокупность четко определенных правил для решения задачи за конечное число шагов или последовательность выполнения действий до получения ответа.

Алгоритмы развивают логику мышления, являются основой составления программ в работе с компьютером, а также необходимы в любой деятельности человека. Человек, умеющий алгоритмизировать процесс, умеет решать.

Вы, дорогие друзья, должны овладеть алгоритмами решения типовых задач (базой), тогда и более сложные решения будут вам по силам. Примеры надо решать по правилам (алгоритмам), а не по образцу решенного примера!

Данная книга поможет вам научиться решать и объяснять свои решения, если вы выполните мои советы:

1. Прочитайте по школьному учебнику нужное вам определение понятия и попытайтесь разобрать его суть с помощью данной книги.

2. Найдите в книге нужный алгоритм решения для данного задания и выполните его по шагам. Если какая-либо операция уже выполнена, то перейдите к следующему шагу, пока не придете к ответу. Если алгоритм сразу не очень понятен, изучите его по решенному в книге примеру и, поняв его суть, вернитесь к решению своего задания. Заучивать алгоритм не надо, многократное его применение разовьет логическую память независимо от вашего желания.



3. Формула — это закон решения примера в сжатом виде; вы только применяете формулу, а она решает пример. Найдите в примере последнее действие (как правило), найдите формулу в таблице формул в конце книги по теме и **ОБЯЗАТЕЛЬНО** запишите её рядом с примером за чертой справа. Отметьте в примере элементы из формулы и примените формулу к решению. При записывании формулы вы получаете сигнал в мозг — как (!) решать. Главное, не зубрить формулы, а понимать их и уметь применять! Учить формулы не надо, их «выучит» рука. Даже если очень лень писать формулу, все равно делайте это — и вы увидите результат! В книге даны образцы этого приема работы с формулой. Удобно выписывать изучаемые по темам формулы на форзац рабочей тетради.

4. Помните, что необходимо математически грамотно оформлять свои решения: уметь кратко записывать условие задачи, выделять главную мысль, а вспомогательные решения, формулы и необходимые теоретические пояснения удобно записывать справа за чертой, чтобы вы могли воспользоваться своим решением при повторении и грамотно оформить работу на экзамене.

Материал в книге расположен по темам, которые изучаются в 7, 8 и 9-м классах. Все примеры даны из заданий, предлагавшихся ранее в ГИА.

Надеюсь, дорогие друзья, что с помощью моей методики вы усвоите необходимые алгоритмы решений, научитесь работать с формулами и сможете самостоятельно, без репетитора, освоить базовый курс алгебры и подготовиться к ГИА.

С любовью к вам

Автор



# Глава I. Алгебраические выражения

## § 1. Числовые выражения

**Определение 1.** Числовое выражение — это запись, состоящая из чисел, соединенных знаками арифметических действий.

Например, дана запись  $123 \cdot 4 + 7$  или  $\frac{250-25}{125}$ , то есть даны приемы на порядок действий, которые вы решали в младших классах; они и есть числовые выражения.

**Определение 2.** Значением числового выражения называется число, которое получится, если выполнить указанные действия (или ответ в примере).

Например,  $(28,1 + 1,9) \cdot 3 = 30 \cdot 3 = 90$ . Ответ: 90 — значение числового выражения.

**Определение 3.** Числовым равенством называются два числовых выражения, соединенных знаком «равно» (=).

**Определение 4.** Равенство называется верным, если значения левой и правой части равны; и неверным, если значения левой и правой части не равны.

Например:

$$4 \cdot 8 + 18 = 48; 50 = 48 \text{ — неверное равенство}$$

$$18 + 5 \cdot 1,2 = 24; 24 = 24 \text{ — верное равенство}$$



## Порядок действий при нахождении значения числового выражения

Арифметические действия над числами бывают трех ступеней:

I ступень — сложение и вычитание

II ступень — умножение и деление

III ступень — возведение в натуральную степень

### Алгоритм

### 1

### Порядок действий при вычислении

1. Если в примере нет скобок, то сначала выполните действия III ступени по порядку их записи, затем действия II ступени по порядку их записи и действия I ступени по порядку их записи.

Например:

$$\begin{array}{l}
 127 - \overset{1)}{2^3} \cdot \overset{2)}{4} + \overset{3)}{135} : \overset{4)}{3^2} = 127 - 8 \cdot 4 + 135 : 9 = \\
 = \overset{5)}{127} - \overset{6)}{32} + 15 = 95 + 15 = 110
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} 2^3 = 8 \\ 3^2 = 9 \end{array} \right.$$

2. Если в примере действия только одной ступени, то выполните их по порядку их записи. Если вычисления не сложные, то выполните действия «в цепочку», постепенно переписывая весь пример с полученными результатами действий.

Например:  $35 \overset{1)}{+} 108 \overset{2)}{-} 27 = 143 - 27 = 116$ ;  $375 \overset{1)}{:} 15 \overset{2)}{\cdot} 23 = 25 \cdot 23 = 575$

3. Если в примере есть скобки, то сначала выполните действия в скобках (п. 1), затем действия без скобок (п. 1, 2).

Например, найдите значение числового выражения:

$$\begin{array}{l}
 16,4 - \overset{6)}{\left( \overset{2)}{5,5} \cdot \overset{1)}{2^3} - \overset{3)}{37} \right)} \overset{4)}{\cdot} \overset{5)}{1,2} : \overset{7)}{4} + 6,7 = \\
 = 16,4 - \overset{5)}{\left( \overset{1)}{5,5} \cdot \overset{2)}{8} - \overset{3)}{37} \right)} \overset{3)}{\cdot} \overset{4)}{1,2} : \overset{6)}{4} + 6,7 = \\
 = \overset{3)}{16,4} - \overset{1)}{7} \cdot \overset{2)}{1,2} : \overset{4)}{4} + 6,7 = 16,4 - 2,1 + 6,7 = 14,3 + 6,7 = 21
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} 2^3 = 8 \\ 5,5 \cdot 8 = 44 \\ 44 - 37 = 7 \\ 7 \cdot 1,2 = 8,4 \\ 8,4 : 4 = 2,1 \end{array} \right.$$



4. Если выражение содержит скобки, заключенные внутри других скобок, то сначала выполните действия во внутренних скобках, а затем как в п. 3.

Например:

$$\begin{aligned} & 3 \cdot \left( 9 - \left( 8^2 - 15 \right) \right) + 8 = 3 \cdot \left( 9 - \left( 64 - 15 \right) \right) + 8 = 3 \cdot \left( 9 - 49 \right) + 8 = \\ & = 3 \cdot (-40) + 8 = -120 + 8 = -112 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} 8^2 = 64 \\ 64 - 15 = 49 \\ 9 - 49 = -40 \end{array} \right.$$

5. Если числовое выражение дробное, то сначала вычислите значение числителя, затем значение знаменателя дроби и поделите первый результат на второй.

### Примеры

Вычислите (1-2).

$$1. \frac{53 - 5^2}{18 + \left( 12 - 4^2 \right)} = \frac{53 - 25}{18 + \left( 12 - 16 \right)} = \frac{28}{18 + (-4)} = \frac{28}{14} = 2$$

$$2. (2,5)^2 + 15 \cdot \frac{3}{5} - 0,24 : 0,6 = 6,25 + 9 - 0,4 = 15,25 - 0,4 = 14,85 \quad \left| \begin{array}{l} a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} \end{array} \right.$$

### Проверь себя!

Найдите значения выражений.

$$1. \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \right) : (1,6 + 5 - 3,3) \quad 2. 27,7 - \left( \frac{1}{5} \right)^2 \cdot 100 + 6,4 : 0,8$$

Ответ: 1).  $-\frac{1}{66}$ ; 2). 31,7.



**§ 2.****Алгебраические выражения**

**Определение 1.** Алгебраическое выражение — это выражение, состоящее из чисел и букв, соединенных знаками действий.

Например:  $2(m-n)+3$ ;  $(a+b) \cdot (a-b)$ ;  $3b^2-4a$ ;  $\frac{5a+b}{3a-b}$  и т. д.

**Определение 2.** Значением алгебраического выражения называется число, полученное в результате вычислений после замены в этом выражении букв числами.

Например, найдите значение алгебраического выражения  $2a+3b$ , если  $a=5$ ,  $b=3$ .

Решение.  $2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 10 + 9 = 19$

**З а м е ч а н и е.** Вычисление числового значения алгебраического выражения имеет очень большое применение в курсе алгебры. Например, чтобы проверить, правильно ли найдены корни уравнения, надо найти числовое значение левой и правой части уравнения и сравнить их: если равенство будет верным, то корни найдены правильно. Зная формулу решения задачи, можно найти значение нужной величины и т. д.

**Определение 3.** Целым алгебраическим выражением называется запись, содержащая числа и буквы, над которыми выполняются действия сложения, вычитания, умножения, возведения в натуральную степень и деления на число, не равное нулю.

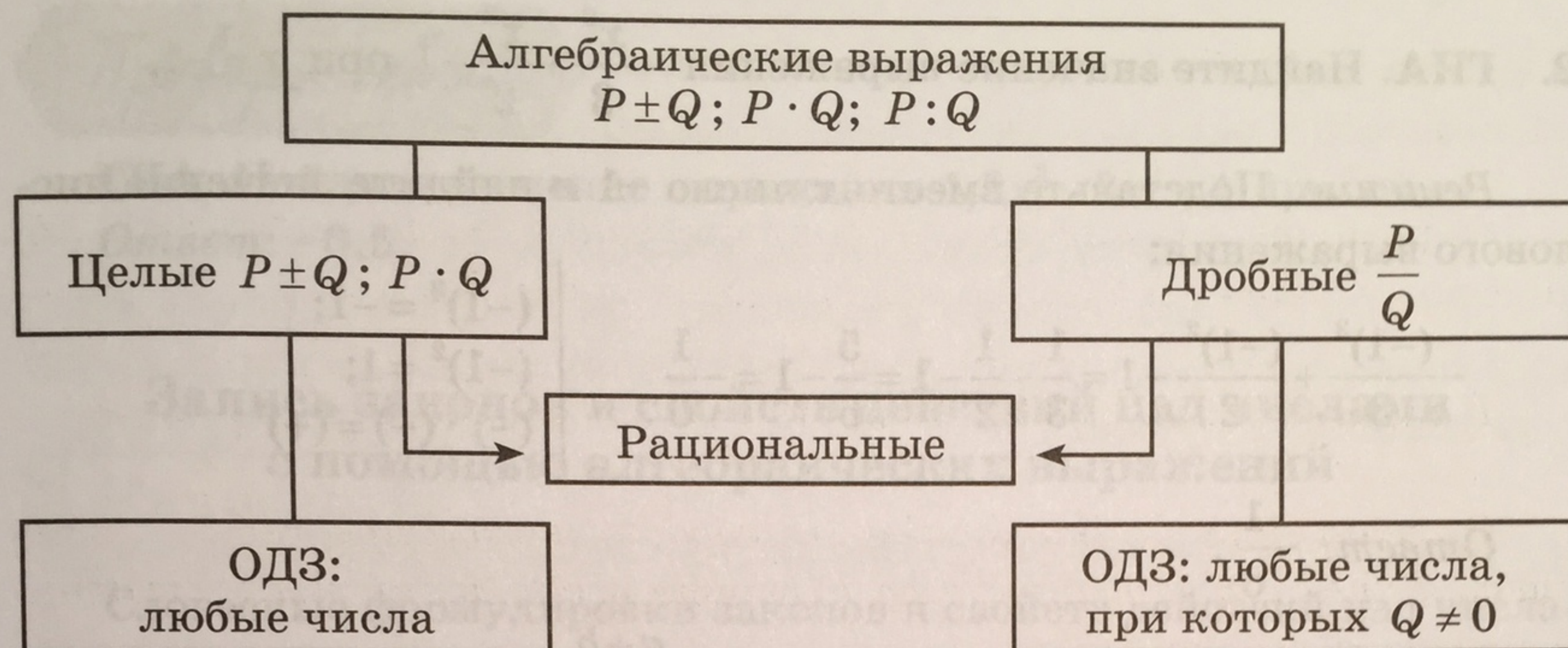
Например:  $3a^2b+3ab-1$ ;  $a^3-b^3$ ;  $\frac{5}{6}a+b$ ;  $4a$  и т. д.

**Определение 4.** Алгебраическое выражение называется дробным, если оно содержит действие деления на алгебраическое выражение.

Например:  $\frac{x+1}{x-1}$ ;  $\frac{1}{a^2+b^2}$ ;  $\frac{x}{y}$ ;  $\frac{a^2-b^2}{ab}$  и т. д.

**Определение 5.** Целые и дробные алгебраические выражения называются рациональными.





## Алгоритм

## 2

## Нахождение значения алгебраического выражения

1. Если дано алгебраическое выражение, которое не требует упрощения, то подставьте вместо букв их числовые значения и выполните над числами действия (в ответе получите число).
2. Если выражение содержит скобки или подобные члены, то сначала раскройте скобки, приведите подобные члены, а затем выполните п. 1.
3. Ответ запишите числом.

Например, найдите значение алгебраического выражения  $0,25a - 4c^2$  при  $a = 4$ ;  $c = -3$ .

Решение. Подставьте вместо  $a$  и  $c$  их значения и вычислите:

$$0,25 \cdot 4 - 4 \cdot (-3)^2 = 1 - 4 \cdot 9 = 1 - 36 = -35$$

Ответ:  $-35$  (значение алгебраического выражения).

## Примеры

1. Найдите значения алгебраических выражений: 1)  $S = a \cdot b$ ; 2)  $p = 2a^2 + 3b - 5$ , если  $a = 0,5$ ;  $b = 5$ .

Решение.

1)  $S = a \cdot b$ ;  $S = 0,5 \cdot 5 = 2,5$

2)  $p = 2a^2 + 3b - 5$ ;  $p = 2 \cdot (0,5)^2 + 3 \cdot 5 - 5 = 2 \cdot 0,25 + 15 - 5 = 10,5$



2. ГИА. Найдите значение выражения  $-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 1$  при  $x = -1$ .

*Решение.* Подставьте вместо  $x$  число  $-1$  и найдите значение числового выражения:

$$-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} - 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{5}{6} - 1 = -\frac{1}{6} \quad \left| \begin{array}{l} (-1)^3 = -1; \\ (-1)^2 = 1; \\ (-) \cdot (-) = (+) \end{array} \right.$$

*Ответ:*  $-\frac{1}{6}$ .

3. ГИА. Найдите значение выражения  $\frac{a+b}{b}$  при  $a = -2,5$  и  $b = 3$ .

*Решение.*

$$\frac{-2,5+3}{3} = \frac{0,5}{3} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \quad \left| \frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}; m = 10 \right.$$

*Ответ:*  $\frac{1}{6}$ .

**З а м е ч а н и е.** Можно сначала упростить выражение:  $\frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + 1$ ,

а затем вычислить:  $\frac{-2,5}{3} + 1 = -\frac{25}{30} + 1 = -\frac{5}{6} + 1 = \frac{1}{6}$ .

4. ГИА. Найдите значение выражения  $1 - 0,5a^2 + 2a^3$  при  $a = -1$ .

*Решение.*

$$1 - 0,5(-1)^2 + 2(-1)^3 = 1 - 0,5 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 0,5 - 2 = -1,5 \quad \left| \begin{array}{l} (-1)^2 = 1; \\ (-1)^3 = -1 \end{array} \right.$$

*Ответ:*  $-1,5$ .

5. Найдите значение выражения  $5(2a-3b) + (12b-9a) - (b-a)$  при  $a = -1$ ;  $b = -2$ .

*Решение.* Упростите выражение:

$$1). \quad 5(2a-3b) + (12b-9a) - (b-a) = \\ = \underline{10a} - \underline{15b} + \underline{12b} - \underline{9a} - \underline{b} + \underline{a} = 2a - 4b$$

$$2). \quad 2a - 4b = 2 \cdot (-1) - 4 \cdot (-2) = -2 + 8 = 6$$

*Ответ:* 6.

$$a(b-c) = ab - ac;$$

$$(-) + (-) = (-);$$

$$(-) + (+) = \text{знак числа}$$

$$\text{с большим модулем}$$

$$(-) \cdot (-) = (+);$$

$$(+) \cdot (-) = (-)$$



**Проверь себя!**

ГИА. Найдите значение выражения  $1,5x^3 - 3x^2 + 4$  при  $x = -1$ .

Ответ:  $-0,5$ .

## Запись законов и свойств действий над числами с помощью алгебраических выражений

Словесные формулировки законов и свойств действий над числами удобно записывать символически, используя формулы, в которых буквами обозначены любые числа.

### 1. Переместительный закон

сложения  
 $a + b = b + a$

умножения  
 $a \cdot b = b \cdot a$

### 2. Сочетательный закон

сложения  
 $(a + b) + c = a + (b + c)$

умножения  
 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

### 3. Распределительный закон

$$a \cdot (b \pm c) = ab \pm ac$$

**Полезный совет.** При нахождении значений алгебраических выражений применяйте законы действий, записывая их за чертой, находите в примере элементы этих законов и выполняйте над ними действия — это упростит вычисления.

### Примеры

$$1. \underbrace{35}_b \cdot \underbrace{0,25}_a - \underbrace{20}_c \cdot \underbrace{0,25}_a = \underbrace{0,25}_a \cdot (\underbrace{35}_b - \underbrace{20}_c) = 0,25 \cdot 15 = 3,75$$

$$\begin{aligned} a \cdot b - a \cdot c &= \\ &= a \cdot (b - c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \frac{1}{7}(0,14 + 2,1 - 3,5) &= \frac{1}{7} \cdot 0,14 + \frac{1}{7} \cdot 2,1 - \frac{1}{7} \cdot 3,5 = \\ &= 0,02 + 0,3 - 0,5 = -0,18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(a + b + c) &= \\ &= da + db + dc \\ \frac{a}{b} \cdot c &= \frac{a \cdot c}{b} \end{aligned}$$



**З а м е ч а н и е.** Зная формулу, например, площади квадрата  $S = a^2$ , можно найти числовое значение площади; например, если  $a = 12$  м, то  $S = 12^2 = 144$  (кв. м). Зная формулу периметра прямоугольника  $P = (a + b) \cdot 2$ , найдем периметр; например, если  $a = 5$  м,  $b = 3$  м, то  $P = (3 + 5) \cdot 2 = 16$  (м). Законы различных процессов по физике и химии также записаны формулами. Зная формулы, мы находим числовые значения выражений.

### Формула четных натуральных чисел

$$a = 2 \cdot n, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots$$

Например: 8; 12; 24; 36; ... — четные числа, они делятся на 2

### Формула нечетных натуральных чисел

$$b = 2 \cdot n + 1, \text{ где } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b = 2 \cdot k - 1, \text{ где } k = 1, 2, 3, \dots$$

Например: 1; 3; 5; 7; 9; ... 15; 17; 19; ... — нечетные числа

## Алгоритм

## 3

## Нахождение неизвестного из формулы

1. Определите последнее действие в формуле.
2. Обозначьте буквами  $a$  и  $b$  известные величины в формуле и буквой  $x$  тот компонент, куда входит искомая неизвестная.  
Например, из формулы  $\underbrace{S}_a = \underbrace{vt}_x + \underbrace{l}_b$  выразить  $t$ . Обозначим  $S$  через  $a$ ,  $l$  через  $b$ ,  $vt$  через  $x$ .
3. Найдите  $x$  через  $a$  и  $b$  как компонент одного из действий:  $x + a = b$ ;  $x - a = b$ ;  $x \cdot a = b$ ;  $x : a = b$  и т. д. Запишите за чертой, чему равен  $x$ .  
Например:  $x = b - a$ ;  $x = a + b$ ;  $x = b : a$ ;  $x = a \cdot b$  и т. д. Если  $a + x = b$ , то  $x = b - a$ .
4. Найдите  $x$  и снова обозначьте известные величины, например, буквами  $a$  и  $c$ , а неизвестную — буквой  $t$  или  $y$  и найдите искомую неизвестную.



Например:  $\underbrace{v}_{c} \underbrace{t}_{y} = \underbrace{S-l}_{d}; t = (S-l):v \quad \left| \begin{array}{l} cy = d \\ y = d:c \end{array} \right.$

5. Запишите ответ.

**З а м е ч а н и е.** При делении на неизвестную считаем, что она не равна нулю.

## Примеры

1. ГИА. Выразите из формулы  $F = 1,8C + 32$  переменную  $C$ .

Решение.

1).  $\underbrace{F}_a = \underbrace{1,8C}_x + \underbrace{32}_b$

Сумма  $x + b = a$ , то  $x = a - b$

2).  $\underbrace{1,8C}_m = \underbrace{F-32}_n$

$m \cdot t = n$ , то  $t = n : m$

3).  $C = (F - 32) : 1,8$

Ответ:  $C = (F - 32) : 1,8$ .

2. ГИА. Из формулы  $a = \frac{v-v_0}{t}$  выразите неизвестную  $t$ .

Решение.

1).  $\underbrace{a}_a = \left( \underbrace{v-v_0}_b \right) : \underbrace{t}_x$

Деление

$a = b : x$ , то  $x = b : a$

2).  $t = (v - v_0) : a$

Ответ:  $t = (v - v_0) : a$ .

3. ГИА. Из формулы  $Q = cm(t_2 - t_1)$  выразите  $t_2$ .

Решение.

1).  $\underbrace{Q}_a = \underbrace{cm}_b \underbrace{(t_2 - t_1)}_x$

Умножение

$b \cdot x = a$ , то  $x = a : b$

2).  $\underbrace{t_2}_y - \underbrace{t_1}_k = \underbrace{Q:cm}_l$

$y - k = l$ , то  $y = l + k$

3).  $t_2 = Q : cm + t_1$

Ответ:  $t_2 = \frac{Q}{cm} + t_1$ .



**Проверь себя!**

Упростите и вычислите значения выражений.

1.  $2a - b + 3a + 1\frac{1}{2}b$ , если  $a = \frac{5}{12}$ ;  $b = -\frac{2}{3}$

2.  $8c - 0,4b$ , если  $c = 0,05$ ;  $b = 2,5$

3. ГИА. Выразите из формулы пути  $S = S_0 + vt$  скорость  $v$ .

Ответ: 1).  $1\frac{3}{4}$ ; 2).  $-0,6$ ; 3).  $v = (S - S_0) : t$ .

**Алгебраическая сумма**

**Определение.** Алгебраическая сумма — это запись, состоящая из нескольких алгебраических выражений, соединенных знаками «+» или «-».

**Замечание.** В алгебраической сумме действие вычитания заменяем сложением, тогда знаки между членами суммы относятся к слагаемым, а знак сложения «+» подразумевается.

Например, вместо  $a + (-b) + (-c) + 1$  пишут  $a - b - c + 1$ , где  $a$ ;  $-b$ ;  $-c$ ;  $1$  — слагаемые.

Если перед первым членом нет знака, то подразумевается знак «+».

**Пример.** Назовите слагаемые в сумме:  $3 - 10a - 7 + 5b$ .

**Решение.**

$3$ ;  $-10a$ ;  $-7$ ;  $5b$  — слагаемые,

так как  $3 - 10a - 7 + 5b = 3 + (-10a) + (-7) + 5b$

**Алгоритм****4****Раскрытие скобок**

1. Если перед скобкой стоит знак «+» или нет знака, то скобки опустите и сохраните знаки перед всеми членами выражения, стоящими в скобках.

Например:

$$a + (b - c) = a + b - c; (a - b) + (b - c) = a - b + b - c = a - c;$$

$$(5 - c) + b = 5 - c + b$$



2. Если перед скобкой стоит знак «-», то скобки опустите, а перед каждым членом в скобках поменяйте знак на противоположный.

Например:

$$1. 15 - (12 + 15 - 17) = \underline{15} - 12 - \underline{15} + 17 = 5$$

$$2. a - (b + c) = a - b - c$$

$$3. -(a - b) + b = -a + b + b = 2b - a$$

$$4. -(-a) = +a \text{ (или просто } a)$$

$$5. 2x + (3x - 2) - (5x - 3) = \underline{2x} + \underline{3x} - 2 - \underline{5x} + 3 = 1 \quad | \quad -a + a = 0$$

## Алгоритм

## 5

## Заключение в скобки

1. Если несколько слагаемых заключаем в скобки (группируем), перед которыми стоит знак «+», то знаки слагаемых сохраняем.

Например:

$$1. a - 2b + m + c = (a - 2b) + (m + c)$$

$$2. 3m - 3 + 3n - 5 = (3m + 3n) + (-3 - 5)$$

2. Если перед скобкой поставим знак «-», то знаки всех слагаемых, заключенных в скобки, изменяем на противоположные.

Например:

$$1. x - y - 3x^2 + 3y^2 = (x - y) - (3x^2 - 3y^2)$$

$$2. 1 - x^2 + 2xy - y^2 = 1 - (x^2 - 2xy + y^2)$$

**Полезный совет.** Чтобы проверить правильность решения, мысленно снова откройте скобки — у вас должно получиться заданное выражение.

## Примеры

Раскройте скобки.

$$1. -(a - 2b + 3c) = -a + 2b - 3c$$

$$2. a - (b + (c - (d - k))) =$$

$$= a - b - (c - (d - k)) =$$

$$= a - b - c + (d - k) = a - b - c + d - k$$

$$-(a + b) = -a - b$$

Можно снять скобки, начиная с первой внешней, а можно начинать с внутренней скобки.



3. Упростите выражение  $5(2y - 3x) - 6(y - 2x)$  и найдите его числовое

значение при  $x = -\frac{2}{3}$ ;  $y = \frac{3}{2}$ .

Решение.

$$\begin{aligned} 1). \quad & 5(2y - 3x) - 6(y - 2x) = \\ & (10y - 15x) - (6y - 12x) = \\ & = 10y - 15x - 6y + 12x = 4y - 3x \end{aligned}$$

$$2). \quad 4y - 3x = 4 \cdot \frac{3}{2} - 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 6 + 2 = 8$$

$$a(b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

$$+(a - b) = a - b; -(a - b) = -a + b$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}; \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$(-) \cdot (-) = (+)$$

Ответ: 8.

**З а м е ч а н и е.** Чтобы лучше запомнить правило, записывайте его за чертой в виде формулы.

### Проверь себя!

1. Упростите выражение и найдите его числовое значение:

$0,5(a - 2b) - (3b + 1,5a)$  при  $a = 0,48$ ;  $b = 0,03$ .

2. Упростите выражение  $(-2ab + 3b - a) - (3b - a + ab)$ .

Ответ: 1).  $-0,6$ ; 2).  $-3ab$ .



### § 3. Одночлен. Стандартный вид одночлена

При изучении степени с натуральным показателем  $\left( a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n; a^1 = a \right)$  мы записывали произведение не только

чисел, но и букв, обозначающих некоторые повторяющиеся условия, например площадь квадрата:  $a^2$ ; периметр квадрата:  $4a$ ; объем куба:  $a^3$ ; площадь прямоугольника:  $ab$  и т. д. Такие алгебраические выражения назовем одночленами.

**Определение 1.** Одночленом называется выражение, состоящее из произведения чисел и буквенных множителей с натуральным показателем, или из одного числа, или из одной буквы.

Например:  $3a^2b$ ;  $\frac{1}{2}x^2y^2$ ;  $2$ ;  $x$ ;  $x^4$ ;  $-0,3a$

**Определение 2.** Одночленом стандартного вида называется такой одночлен, который содержит только один числовой множитель, стоящий на первом месте, и степени с натуральным показателем с различными буквенными основаниями (как правило, в алфавитном порядке).

Например:  $5a^2b^3$ ;  $-3a^5x^2$ ;  $x$ ;  $-ab$ ;  $0,1x^2y$

**Определение 3.** Коэффициент — это единственный числовой множитель одночлена.

#### Алгоритм

6

#### Приведение одночлена к стандартному виду

1. Перемножьте все числовые множители и полученное число запишите на первом месте.
2. Перемножьте все степени с одинаковым основанием (по формуле  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ) и запишите их произведение в алфавитном порядке  $a, b, c, d \dots x, y$ .
3. Запишите произведение коэффициента на буквенный множитель.
4. Ответ запишите в виде одночлена стандартного вида.



**З а м е ч а н и е.** Если коэффициент равен 1, то его не пишут, например:  $ab$ ;  $x^2y^2$ ;  $c$ . Если коэффициент равен  $(-1)$ , то перед одночленом ставят знак минус, например:  $-bc$ ;  $-a$ ;  $-x^2y$ .

### Примеры

Запишите одночлен в стандартном виде (1, 2).

$$1. 3a^2b \cdot 2cab^3 = (3 \cdot 2) \cdot (a^2 \cdot a)(b \cdot b^3) \cdot c = 6a^3b^4c \quad \left| \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n} \right.$$

одночлен стандартного вида

$$2. -2,5m \cdot (-0,8)m^3n^4 = -2,5 \cdot (-0,8) \cdot m^4n^4 = 2m^4n^4.$$

3. Запишите одночлен в стандартном виде и найдите его числовое значение.

$$\frac{1}{6}a \cdot 8 \cdot b^2 \cdot \frac{3}{4}a^3b \text{ при } a = -2; b = \frac{1}{2}$$

*Решение.*

$$1). \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot \frac{3}{4} \cdot a^{1+3} \cdot b^{2+1} = a^4b^3$$

$$2). a^4b^3 = (-2)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2^4 \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{2^4}{2^3} = 2$$

$$\frac{1}{6} \cdot 8 \cdot \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 8 \cdot 3}{6 \cdot 1 \cdot 4} = 1$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}; a^m : a^n = a^{m-n}$$

*Ответ:* 2.

4. Найдите коэффициенты одночленов (1–5).

*Решение.*

$$1). -2ab \cdot 3ac = (-2 \cdot 3)a^2bc = -6a^2bc$$

$$2). \frac{1}{2}xy \cdot 2x = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^2y = 1x^2y = x^2y$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$3). -a^3b = -1a^3b; 4). a = 1a; 5). -5x \cdot 2y \cdot a = (-5 \cdot 2) \cdot axy = -10axy$$

*Ответ:* коэффициенты одночленов: 1).  $-6$ ; 2).  $1$ ; 3).  $-1$ ; 4).  $1$ ; 5).  $-10$ .

### Умножение одночленов

**Определение.** Степенью одночлена называется сумма показателей степеней всех буквенных множителей одночлена.



Например:  $x^2y^1$  — одночлен третьей степени ( $2 + 1 = 3$ );  $3a^3b^2$  — одночлен пятой степени ( $3 + 2 = 5$ ).

**З а м е ч а н и е.** Не путайте с понятием возведения одночлена в степень.

**Алгоритм****7****Умножение одночленов**

При умножении одночленов в результате получится снова одночлен!

1. Если в примере есть действие возведения одночлена в степень, то сначала возведите одночлен в степень по формулам  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ ;  $(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$ , а затем умножайте одночлены (п. 2).
2. Перемножьте коэффициенты одночленов, считая, что одночлены даны в стандартном виде.
3. Умножьте степени с одинаковым основанием по формуле  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ .
4. Умножьте коэффициент на буквенный множитель п. 3.
5. Запишите в ответе одночлен стандартного вида.

**Примеры**

Выполните умножение одночленов (1–4).

$$1. (3xy) \cdot (-2y) = -6xy \cdot y = -6xy^2$$

$$2. \left(\frac{1}{2}a^2b\right) \cdot (4ab^2) = \frac{1 \cdot 4}{2}a^2 \cdot a \cdot b \cdot b^2 = 2a^3b^3$$

$$3. \left(\frac{2}{3}a^2b^3x\right) \cdot \left(\frac{3}{4}a^3bx^2\right) = \\ = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4}a^{2+3} \cdot b^{3+1}x^{1+2} = \frac{1}{2}a^5b^4x^3$$

$$4. \left(-1\frac{3}{5}x^3y^2\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}c^2x^2\right)^3 = \\ = -\frac{8}{5}x^3y^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (c^2)^3 \cdot (x^2)^3 = \\ = \frac{8 \cdot 1}{5 \cdot 8}x^3 \cdot x^6 \cdot y^2 \cdot c^6 = \frac{1}{5}c^6x^9y^2$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$-1\frac{3}{5} = -\frac{1 \cdot 5 + 3}{5} = -\frac{8}{5}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(-a)^3 = -a^3$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$(-) \cdot (-) = (+)$$



5. Запишите одночлен в виде квадрата другого одночлена.

$$36x^{10}y^4 = 6^2 \cdot (x^5)^2 (y^2)^2 = (6x^5y^2)^2 \quad \left| \quad a^{m \cdot n} = (a^m)^n; a^m \cdot b^m \cdot c^m = (abc)^m \right.$$

(Поделите каждый показатель данного одночлена на 2 и найдите одночлен во II степени.)

### Проверь себя!

Выполните действия.

1.  $(8ac^3) \cdot (-2a^3c)$

2.  $(-3bc^2)^2 \cdot (-2ab^2)^3$

3.  $(-0,1 \cdot a^2b)^3$

Ответ: 1).  $-16a^4c^4$ ; 2).  $-72a^3b^8c^4$ ; 3).  $-0,001a^6b^3$ .

Попробуй-ка реши!

При каком значении  $n$  верно равенство?

1.  $(0,2y^2)^n \cdot 100 = 4y^4$

2.  $\left(3\frac{1}{3}m^4\right)^n \cdot 0,001 = \frac{1}{27}m^{12}$

Ответ: 1).  $n = 2$ ; 2).  $n = 3$ .



## § 4.

## Многочлен

**Определение 1.** Многочленом называется алгебраическая сумма нескольких одночленов. Одночлен считается многочленом, состоящим из одного члена.

Одночлены, из которых составлен многочлен, называются членами этого многочлена.

**Определение 2.** Одночлены стандартного вида называются подобными, если они отличаются только коэффициентами или не отличаются совсем.

Например:  $2a^2b$ ;  $\frac{1}{2}a^2b$ ;  $-3a^2b$  — подобные одночлены, у них одинаковый буквенный множитель  $a^2b$ , коэффициенты разные или равные.

**Определение 3.** Приведением подобных одночленов называется упрощение, при котором алгебраическая сумма подобных одночленов заменяется одним одночленом.

Например:  $5a^2b^2 - 2a^2b^2 + a^2b^2 = 4a^2b^2$

**Определение 4.** Стандартный вид многочлена — это запись многочлена, в которой все члены записаны в стандартном виде и среди них нет подобных.

## Алгоритм

## 8

## Приведение подобных членов

1. Все члены многочлена приведите к стандартному виду.
2. Подчеркните подобные слагаемые одной, двумя или тремя черточками.
3. Сложите коэффициенты подобных слагаемых и полученное число умножьте на их буквенный множитель.

Например:

$$\underline{2bc} + \underline{3ab} - \underline{5bc} - \underline{ab} = (2bc - 5bc) + (3ab - ab) = (2 - 5)bc + (3 - 1)ab = 2ab - 3bc$$

**Помните!** В алгебраической сумме знак перед одночленом относится к коэффициенту, а знак сложения подразумевается.



**Внимание!**  $-a + a = 0$  Противоположные члены при сложении взаимно уничтожаются, их можно зачеркнуть.

Например:  $-7xy + 7xy = 0$ ;  $-ab + ab = 0$ ;  $5a + b - 5a = b$

### Примеры

Приведите многочлен к стандартному виду.

$$\begin{array}{lcl}
 1. & 3ab^2a^2 \cdot (-2) + 3a^2b^2 \cdot (-3)a - a^2b^2 \cdot b + 2b^3a^2 = & \left| \begin{array}{l} a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \\ -6 - 9 = -15; -1 + 2 = 1 \\ -6a^3b^2 - 9a^3b^2 - a^2b^3 + 2a^2b^3 = -15a^3b^2 + a^2b^3 \end{array} \right. \\
 2. & \underline{2x^2} - \underline{3x} - \underline{x^2} + \underline{5} + \underline{2x} - \underline{x^2} + \underline{10} = -x + 15 & \left| \begin{array}{l} -3 + 2 = -1; -a + a = 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

**Полезный совет.** Числа складывают с числами, а члены, содержащие буквенный множитель, с подобными им членами.

$$\begin{aligned}
 3. & \quad 2m \cdot 4n - 3a \cdot 2b + 2 - 0, 2n \cdot 5m + b \cdot 5a - 5nm + 8ab - 3 = \\
 & = \underline{8mn} - \underline{6ab} - \underline{mn} + \underline{5ab} - \underline{5mn} + \underline{8ab} + (2 - 3) = \\
 & = (8 - 1 - 5)mn + (-6 + 5 + 8)ab - 1 = 2mn + 7ab - 1
 \end{aligned}$$

4. Найдите значение многочлена при  $x = 2$  и  $y = 4$ .

$$\begin{aligned}
 & 2xy \cdot 5x + 1\frac{5}{7}x^2 \cdot \frac{7}{12}y - 2\frac{2}{3}xy \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)x = \left| \begin{array}{l} 1\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{12} = \frac{12}{7} \cdot \frac{7}{12} = 1; \\ 2\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{8} = 1 \end{array} \right. \\
 & = 10x^2y + x^2y + x^2y = 12x^2y \\
 & 12x^2y = 12 \cdot 2^2 \cdot 4 = 12 \cdot 16 = 192
 \end{aligned}$$

### Проверь себя!

Приведите подобные члены:  $2x^5y^2 - 3x^2y^5 - 3x^5y^2 + x^2y^5$ .

Ответ:  $-x^5y^2 - 2x^2y^5$ .

## Сложение и вычитание многочленов

В результате сложения и вычитания многочленов получается многочлен.



## Алгоритм

## 9

## Сложение и вычитание многочленов

1. Если многочлен заключен в скобки, перед которыми стоит знак плюс (+), то скобки опустите, а все члены в этой скобке перепишите со своим знаком:  $+(a + b) = +a + b$ .
2. Если перед скобкой стоит знак минус (-), то скобки опустите, а у всех членов в этой скобке поменяйте знак на противоположный:  $-(a + b) = -a - b$ .
3. После раскрытия скобок приведите подобные члены, получите многочлен стандартного вида.

**З а м е ч а н и е.** Многочлены можно складывать и вычитать столбиком, подписывая подобные члены друг под другом.

## Примеры

Найдите алгебраическую сумму многочленов.

1.  $(8a - 3b) + (5a - 2b) = \underline{8a} - \underline{3b} + \underline{5a} - \underline{2b} = 13a - 5b$ 

$+(a + b) = +a + b;$   
 $8 + 5 = 13; -3 - 2 = -5$
2.  $(12x - 11y + 8z) - (-12x + y - 2z) =$   
 $= \underline{12x} - \underline{11y} + \underline{8z} + \underline{12x} - \underline{y} + \underline{2z} = 24x - 12y + 10z$ 

$-(a + b) = -a - b;$   
 $12 + 12 = 24;$   
 $-11 - 1 = -12; 8 + 2 = 10$
3. Найдите сумму и разность многочленов  $0,1x^2 + 0,02y^2$  и  $0,17x^2 + 0,08y^2$ .
  - 1).  $(0,1x^2 + 0,02y^2) + (0,17x^2 - 0,08y^2) =$   
 $= \underline{0,1x^2} + \underline{0,02y^2} + \underline{0,17x^2} - \underline{0,08y^2} = \underline{0,27x^2 - 0,06y^2}$ 

$+(a + b) = +a + b;$   
 $0,1 + 0,17 = 0,27;$   
 $0,02 - 0,08 = -0,06$
  - 2).  $(0,1x^2 + 0,02y^2) - (0,17x^2 - 0,08y^2) =$   
 $= \underline{0,1x^2} + \underline{0,02y^2} - \underline{0,17x^2} + \underline{0,08y^2} = \underline{-0,07x^2 + 0,1y^2}$ 

$-(a + b) = -a - b;$   
 $0,1 - 0,17 = -0,07;$   
 $0,02 + 0,08 = 0,1$

4. Найдите разность многочленов  $3a^2 + 10a - 6$  и  $3 - a^2 + 3a$  столбиком.

*Решение.*

$3a^2 + 10a - 6$	$3a^2 - (-a^2) = 3a^2 + a^2 = 4a^2;$
$- a^2 + 3a + 3$	$10a - 3a = 7a; -6 - 3 = -9$
$\hline 4a^2 + 7a - 9$	



5. Решите уравнение  $-(2x - x^2) + (5x - x^2) = -9$ .

$$-2x + \cancel{x^2} + 5x - \cancel{x^2} = -9$$

$$3x = -9 \mid : 3; \quad x = -3$$

Ответ:  $-3$ .

6. ГИА. Упростите  $12,5x^2 + y^2 - (8x^2 - 5y^2 - (-10x^2 + (5,5x^2 - 6y^2)))$ .

$$\begin{aligned} & 12,5x^2 + y^2 - \left( 8x^2 - 5y^2 - \left( -10x^2 + \left( 5,5x^2 - 6y^2 \right) \right) \right) = \\ & = 12,5x^2 + y^2 - \left( 8x^2 - 5y^2 - \left( -10x^2 + 5,5x^2 - 6y^2 \right) \right) = \\ & = 12,5x^2 + y^2 - \left( 8x^2 - 5y^2 + 10x^2 - 5,5x^2 + 6y^2 \right) = \\ & = \underline{12,5x^2} + \underline{y^2} - \underline{8x^2} + \underline{5y^2} - \underline{10x^2} + \underline{5,5x^2} - \underline{6y^2} = \\ & = (12,5x^2 + 5,5x^2) - (8x^2 + 10x^2) = 18x^2 - 18x^2 = 0 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} -(-a+b) = a-b \\ -a-b = -(a+b) \end{array}$$

**Полезный совет.** Раскрывайте скобки постепенно: сначала ту скобку, над которой выполняли бы первое действие, затем снимите скобку второго действия и т. д.

### Проверь себя!

Найдите алгебраическую сумму многочленов.

1.  $-(2a^2b - 3ab) + (a^2b + 2ab) - (ab - a^2b)$

2.  $-(2m^2n - 3mn) - (-m^2n + 3mn)$

3. Найдите разность многочленов столбиком:

$$3a^2 + 8a - 4 \quad \text{и} \quad 3 + 8a - 5a^2.$$

Ответ: 1).  $4ab$ ; 2).  $-m^2n$ ; 3).  $8a^2 - 7$ .

### Алгоритм

10

### Умножение многочлена на одночлен

1. Умножайте каждый член многочлена на одночлен по алгоритмам 7 и 43 с учетом знака каждого члена, используя распределительный закон:  $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$  и правило умножения степеней  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ .



2. Приведите подобные слагаемые.
3. Запишите полученный многочлен в стандартном виде.

Например:

$$(a + b + c) \cdot p = a \cdot p + b \cdot p + c \cdot p \quad a \cdot (b + c + k) = a \cdot b + a \cdot c + a \cdot k$$

**З а м е ч а н и е.** Умножение одночлена на многочлен выполняется по тому же правилу в силу переместительного закона  $ab = ba$ .

### Примеры

1.  $3xy(2x - 3y + 5) = 6x^2y - 9xy^2 + 15xy$  |  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2.  $(x^2 - 2x + 3) \cdot 2xy^2 = 2x^3y^2 - 4x^2y^2 + 6xy^2$
3. Найдите произведение многочлена и одночлена.  
 $-5(3x^3 + 7x^2 - x) = -15x^3 - 35x^2 + 5x$  | Правило знаков  
 $(-) \cdot (+) = (-); (-) \cdot (-) = (+)$

4. Упростите и найдите значение алгебраического выражения при  $a = 2; b = -3$ .

$$7(4a + 3b) - 6(5a + 7b) = 28a + 21b - 30a - 42b = -2a - 21b,$$

$$\text{если } a = 2 \text{ и } b = -3, \text{ то } -2a - 21b = -2 \cdot 2 - 21 \cdot (-3) = -4 + 63 = 59$$

5. Решите уравнение  $3(x - 1) - 2(3 - 7x) = 2(x - 2)$  |  $a(b + c) = ab + ac$

Решение.

$$3x - 3 - 6 + 14x = 2x - 4$$

$$3x + 14x - 2x = -4 + 3 + 6; \quad 15x = 5 \quad | :15; \quad x = \frac{1}{3}$$

Ответ:  $\frac{1}{3}$ .

### Алгоритм

11

### Умножение многочлена на многочлен стандартного вида

#### I способ

1. Приведите многочлен в скобках к стандартному виду.
2. Если дано произведение двух многочленов, то умножьте каждый член первого многочлена на первый член второго многочлена.
3. Умножьте каждый член первого многочлена на второй член второго многочлена.



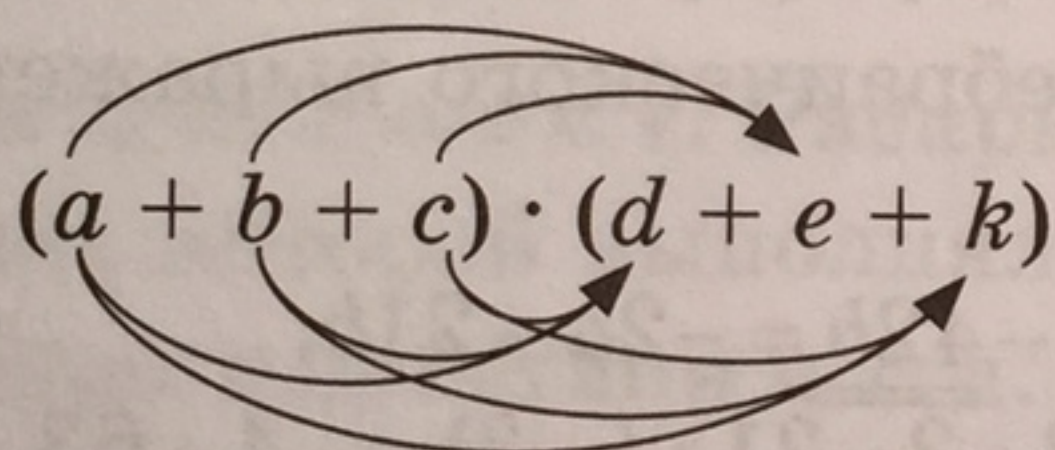
4. Повторите операцию умножения всех членов первого многочлена на третий, четвертый и т. д. член второго многочлена.
5. Полученные произведения сложите (приведите подобные слагаемые).
6. В ответе получите снова многочлен.
7. Если дано произведение трех многочленов (или одночлена и двух многочленов), то сначала перемножьте два многочлена (или одночлен и один многочлен), а затем умножайте два многочлена по алгоритму.

### II способ

Можно умножать в другом порядке: сначала первый член первого многочлена умножьте на каждый член второго многочлена, затем второй член первого многочлена умножьте на каждый член второго многочлена и т. д.

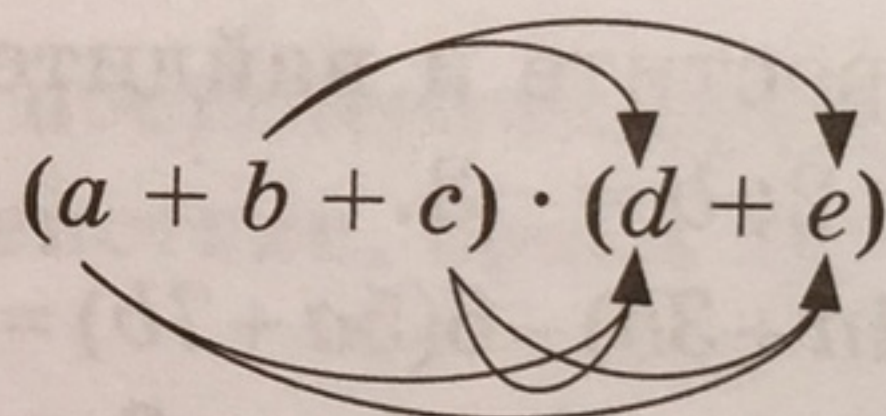
### Схемы умножения

#### I способ



$$(a + b + c) \cdot (d + e + k) = \\ = ad + bd + cd + ae + be + ce + ak + bk + ck$$

#### II способ



$$(a + b + c) \cdot (d + e) = \\ = ad + ae + bd + be + cd + ce$$

### Полезные советы

1. Первым записывайте тот многочлен, в котором больше членов (удобнее умножать на многочлен, в котором меньше членов).
2. Не применяйте сразу два способа умножения многочленов, чтобы не сделать ошибку.

### Примеры

Умножьте многочлены.

1.  $(m + 6) \cdot (m - 1) = m^2 - \underline{m} + \underline{6m} - 6 = m^2 + 5m - 6$  (II способ)
2.  $(a - 5) \cdot (-a - 1) = -a^2 + \underline{5a} - \underline{a} + 5 = -a^2 + 4a + 5$  (I способ)



$$3. (2a-b) \cdot (4a^2+2ab+b^2) = (4a^2+2ab+b^2)(2a-b) =$$

$$= 8a^3 + \cancel{4a^2b} + \cancel{2ab^2} - \cancel{4a^2b} - \cancel{2ab^2} - b^3 = 8a^3 - b^3$$

(или по формуле  $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$ )

$$\left| \begin{array}{l} a^2 \cdot a = a^3; \\ ab \cdot a = a^2b; \\ b^2 \cdot b = b^3 \end{array} \right.$$

$$4. (x-2) \cdot (3x+1) \cdot (4x-3) = ((x-2) \cdot (3x+1))(4x-3) =$$

$$= (3x^2+x-6x-2)(4x-3) = (3x^2-5x-2)(4x-3) =$$

$$= 12x^3 - \underline{20x^2} - \underline{8x} - \underline{9x^2} + \underline{15x} + 6 = 12x^3 - 29x^2 + 7x + 6$$

$$\left| a^m \cdot a^n = a^{m+n} \right.$$

5. ГИА. Вычислите значение выражения при  $n = \frac{1}{3}$ .

$$\left( n - \frac{1}{3} \right) \left( n^2 + \frac{1}{3}n + \frac{1}{9} \right) = \left( n^2 + \frac{1}{3}n + \frac{1}{9} \right) \left( n - \frac{1}{3} \right) =$$

$$= n^3 - \frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{3}n^2 - \frac{1}{9}n + \frac{1}{9}n - \frac{1}{27} = n^3 - \frac{1}{27};$$

$$n^3 - \frac{1}{27} = \left( \frac{1}{3} \right)^3 - \frac{1}{27} = \frac{1}{27} - \frac{1}{27} = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} (a-b)(a^2+ab+b^2) = \\ = a^3-b^3 \\ a = n \\ b = \frac{1}{3} \\ n^3 - \frac{1}{27} \end{array} \right.$$

6. ГИА. Докажите равенство<sup>1</sup>  $(n-2)(n-1) \cdot n(n+1) + 1 = (n^2 - n - 1)^2$ .

Левая часть:

$$(n-2)(n-1) \cdot n(n+1) + 1 = (n^2 - 2n)(n^2 - \underline{n} + \underline{n} - 1) + 1 =$$

$$= (n^2 - 2n)(n^2 - 1) + 1 = \underline{n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n + 1}$$

Правая часть:

$$(n^2 - n - 1)^2 = (n^2 - n - 1)(n^2 - n - 1) =$$

$$= n^4 - n^3 - n^2 - n^3 + n^2 + n - n^2 + n + 1 =$$

$$= \underline{n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n + 1}$$

Левая часть равенства равна правой части, равенство доказано.

## Степень многочлена

Наибольшая степень одночлена в многочлене и есть степень многочлена с одной переменной.

Например:

$3x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1$  — многочлен четвертой степени

$3x^4$  — высший член многочлена

$-1$  — свободный член

<sup>1</sup> Проверьте! Левая часть равенства должна быть равна правой части.



Обычно многочлен с одной переменной располагают по убывающей степени одночленов.

Такие многочлены удобно умножать в столбик, начиная с высшего члена множителя.

### Примеры

Найдите произведение многочленов (1–3).

1.  $(3x^3 - 5x^2 + x - 4) \cdot (x^2 - 2x + 3)$

Решение.

$$\begin{array}{r}
 \times \quad \begin{array}{r} 3x^3 - 5x^2 + x - 4 \\ x^2 - 2x + 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3x^3 \cdot x^2 = 3x^5; \quad -5x^2 \cdot x^2 = -5x^4; \\ x \cdot x^2 = x^3; \quad -4 \cdot x^2 = -4x^2 \end{array} \\
 \hline
 + \quad \begin{array}{r} 3x^5 - 5x^4 + x^3 - 4x^2 \\ -6x^4 + 10x^3 - 2x^2 + 8x \\ +9x^3 - 15x^2 + 3x - 12 \end{array} \\
 \hline
 3x^5 - 11x^4 + 20x^3 - 21x^2 + 11x - 12
 \end{array}$$

Ответ:  $3x^5 - 11x^4 + 20x^3 - 21x^2 + 11x - 12$ .

Первый член результата есть произведение высших членов, а свободный член — произведение свободных членов, все подобные члены расположены друг под другом.

2.  $(2x^2 + 3x + 1) \cdot (x - 1)$

3.  $(x^2 + x + 1) \cdot (x - 1)$

Решение.

$$\begin{array}{r}
 \times \quad \begin{array}{r} 2x^2 + 3x + 1 \\ x - 1 \end{array} \\
 \hline
 + \quad \begin{array}{r} 2x^3 + 3x^2 + x \\ -2x^2 - 3x - 1 \end{array} \\
 \hline
 2x^3 + x^2 - 2x - 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times \quad \begin{array}{r} x^2 + x + 1 \\ x - 1 \end{array} \\
 \hline
 + \quad \begin{array}{r} x^3 + x^2 + x \\ -x^2 - x - 1 \end{array} \\
 \hline
 x^3 - 1
 \end{array}$$

Ответ: 2).  $2x^3 + x^2 - 2x - 1$ ; 3).  $x^3 - 1$ .

### Алгоритм

12

### Деление одночлена на одночлен

1. Приведите одночлены к стандартному виду.
2. Разделите коэффициент делимого на коэффициент делителя.



3. Разделите степени с одинаковыми основаниями по правилу  $a^m : a^n = a^{m-n}$  ( $m > n$ ).
4. Умножьте полученный коэффициент на буквенную часть.

### Примеры

Выполните деление (1–4).

$$1. (-6xy) : (-3xy) = +2$$

$$2. -1,7p^2q^2y^3 : (28,9p^2y^3) = \\ = -1,7 : 28,9 \cdot q^2 = -\frac{1}{17}q^2$$

$$3. 20a^3b^2c^2 : 4a^2b = 5abc^2$$

$$4. (-abc^2)^5 : (-a^2bc^3)^2 = \\ = -a^5b^5c^{10} : a^4b^2c^6 = -ab^3c^4$$

$$a : a = 1$$

$$p^2 : p^2 = 1; (-) : (+) = (-);$$

$$1,7 : 28,9 = 17 : 289 = \frac{1}{17}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}; (-1)^5 = -1;$$

$$(abc)^n = a^n b^n c^n; (a^n)^m = a^{mn}$$

$$(-1)^2 = 1$$

### Алгоритм

13

### Деление многочлена на одночлен

1. Приведите одночлены к стандартному виду.
2. Разделите первый член многочлена на одночлен по формуле  $a^m : a^n = a^{m-n}$ , затем второй член многочлена на одночлен и т. д. по свойству  $(a+b) : c = a : c + b : c$ .
3. Полученные результаты от деления сложите (приведите подобные слагаемые). Если делитель-одночлен записан как степень в степени, то сначала возведите его в степень, а затем выполняйте деление.
4. *Ответ:* многочлен стандартного вида.

### З а м е ч а н и я

1. Деление многочлена на одночлен нацело не всегда возможно.

Например:  $(xy + xt) : xy = 1 + \frac{t}{y}$

2. Считается, что делитель не равен нулю.



## Примеры

Выполните деление (1–4).

1.  $(14m - 8) : (-2) = -7m + 4$

2.  $(3a^3b^2 - 4a^2b^3) : (5ab)^2 =$   
 $= (3a^3b^2 - 4a^2b^3) : 25a^2b^2 = \frac{3}{25}a - \frac{4}{25}b$

$$(+):(-) = (-); (-):(-) = (+);$$

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

$$a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$a^n : a^n = 1$$

3.  $(6a^3 - 3a^2) : a^2 + (12a^2 + 9a) : 3a = 6a - 3 + (4a + 3) = \underline{6a} - \underline{3} + \underline{4a} + \underline{3} = 10a$

4. Найдите значение выражения  $(18a^4 - 27a^3) : 9a^2 - 10a^3 : (5a)$  при  $a = -8$ .

$$(18a^4 - 27a^3) : 9a^2 - 10a^3 : (5a) = \underline{2a^2} - 3a - \underline{2a^2} = -3a$$

$$-3a = -3 \cdot (-8) = 24$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(-):(+) = (-)$$

$$(-):(-) = (+)$$

**Попробуй не реши!**

1.  $(4a^2b^2c) : (-5abc)$

2.  $\left(-\frac{2}{5}a^4x^3y^2\right) : \left(-\frac{1}{2}a^3xy^2\right)$

3.  $(15a^3x^5 - 10a^4x^4 - 25a^5x^3) : (5a^3x^3)$

Ответ: 1).  $-\frac{4}{5}ab$ ; 2).  $\frac{4}{5}ax^2$ ; 3).  $3x^2 - 2ax - 5a^2$ .

**Попробуй-ка реши!**

1.  $2,7x^{m+1}y^{n+1} : 9x^{m-2}y^{n-2}$

2.  $(6x^8y^5 - 13,5x^{10}y^{15} + 16,5x^7y^4) : 1,5x^6y^4$

3. Делится ли  $45^{45} \cdot 15^{15}$  на  $75^{30}$ ?

4. Найдите значение \*, чтобы равенство было верным:  $(x^4)^3 \cdot * = x^{15}$ .

5.  $n$  — натуральное число. Запишите выражение в виде степени

$$\frac{a^{5n-4} \cdot a^{4n+1}}{a^{5n-2}}.$$

Ответ: 1).  $0,3x^3y^3$ ; 2).  $4x^2y - 9x^4y^{11} + 11x$ ; 3). Да; 4).  $x^3$ ; 5).  $a^{4n-1}$ .



## § 5. Разложение многочленов на множители

Разложить многочлен на множители — это значит представить его в виде произведения двух или нескольких многочленов.

### Способы разложения многочлена на множители

I способ. Вынесение общего множителя за скобки

II способ. Группировка членов

III способ. Применение формул сокращенного умножения

IV способ. Применение I, II и III способов вместе

#### Алгоритм

14

#### Вынесение общего множителя за скобки

1. Найдите НОД всех коэффициентов слагаемых, если они натуральные числа.
2. Найдите НОД буквенных множителей всех слагаемых (если они степени с одинаковым основанием, то их НОД есть степень с наименьшим показателем).

Например:  $\text{НОД}(a^3b^5; a^2b^7) = a^2b^5$

3. Разделите каждое слагаемое на НОД коэффициентов и НОД буквенных множителей и запишите перед скобкой НОД, а в скобках частное от деления слагаемых на НОД, то есть многочлен.

Например, разложите на множители:

$$9a^2b^2 - 12ab^3 = 3ab^2(3a - 4b) \quad \left| \begin{array}{l} \text{НОД}(9; 12) = 3; 9 = 3 \cdot 3; 12 = 3 \cdot 4; \\ \text{НОД}(a^2b^2; ab^3) = ab^2 \end{array} \right.$$

4. Если общий множитель будет двучлен или многочлен, то запишите его в скобках перед общей скобкой и разделите на этот двучлен или многочлен каждое слагаемое, а в скобках запишите частное от деления всех членов многочлена на общий многочлен.

$$\text{Например: } b(a+5) - c(a+5) = (a+5)(b-c) \quad \left| \begin{array}{l} b(a+5):(a+5) = b; \\ -c(a+5):(a+5) = -c \end{array} \right.$$



5. Если общий множитель-многочлен отличается от других только знаками перед каждым членом, то поменяйте знак перед скобкой этого многочлена и у каждого члена в скобках и вынесите его за общую скобку.

Например:

$$2a(x-y) - (y-x) = 2a(x-y) \oplus (x-y) = (x-y)(2a+1) \quad \left| \begin{array}{l} (y-x) = -(x-y); \\ (x-y):(x-y) = 1 \\ \text{НОД}(2; 1) = 1 \end{array} \right.$$

### Примеры

Разложите на множители (1-4).

$$1. \quad a(b-3) + (3-b) - b(3-b) = a(b-3) - (b-3) + b(b-3) = \quad \left| \begin{array}{l} (3-b) = -(b-3); \\ (b-3):(b-3) = 1 \end{array} \right.$$

$$= (b-3)(a-1+b)$$

**Не забудь!** Записать слагаемое  $\pm 1$ , когда делите равные выражения с коэффициентом  $\pm 1$ .

$$2. \quad 3(x+y)(x-y) - (x+y)^2 = \quad \left| \begin{array}{l} \text{НОД}((x+y); (x+y)^2) = x+y; \\ 3(x+y)(x-y):(x+y) = 3(x-y); \\ (x+y)^2:(x+y) = x+y; \\ -(x+y) = -x-y \end{array} \right.$$

$$= (x+y)(3(x-y) - (x+y)) =$$

$$= (x+y)(3x-3y-x-y) =$$

$$= (x+y)(2x-4y) = 2(x+y)(x-2y)$$

$$3. \quad 137^2 + 137 \cdot 63 = 137(137+63) =$$

$$= 137 \cdot 200 = 27400$$

$$4. \quad 2x^2y^4 - 2x^4y^2 + 6x^3y^3 = \quad \left| \begin{array}{l} \text{НОД}(2; 6) = 2; \quad x^m : x^n = x^{m-n} \\ \text{НОД}(x^2y^4; x^4y^2; x^3y^3) = x^2y^2 \end{array} \right.$$

$$= 2x^2y^2(y^2 - x^2 + 3xy)$$

### Проверь себя!

Вынесите за скобку общий множитель.

$$1. \quad 3(b+c) - a(b+c) \quad 2. \quad 8a^3b - 2ab \quad 3. \quad 6x^2m^3 - 2xm^2 - 4xm$$

$$4. \quad (x-y) + a(y-x)$$

5. Найдите значение выражения  $2x(x+y) - 3y(x+y) + 7(x+y)$  при  $x = 4; y = 5$ .

$$6. \quad \text{Вычислите: } 23^2 + 23 \cdot 17.$$

Ответ: 1).  $(b+c)(3-a)$ ; 2).  $2ab(4a^2-1)$ ; 3).  $2xm(3xm^2-m-2)$ ; 4).  $(x-y)(1-a)$ ; 5). 0; 6). 920.



## Алгоритм

15

Разложение многочлена на множители  
способом группировки

1. Если все члены многочлена не имеют общего множителя, то, пользуясь переместительным и сочетательным законом, объедините в группы слагаемые, у которых есть общий множитель, и заключите их в скобки.
2. Вынесите общий множитель в каждой группе за скобки.
3. Если получится общий множитель в каждом слагаемом, то вынесите его за скобки, а в скобках получится многочлен, содержащий частное от деления каждого члена на общий множитель.

## Примеры

1. ГИА. Разложите на множители.

$$3x + xy^2 - x^2y - 3y = (3x - 3y) - (x^2y - xy^2) = \\ = 3(x - y) - xy(x - y) = (x - y)(3 - xy)$$

2. ГИА. Разложите на множители.

$$a^3 - ab - a^2b + a^2 = (a^3 + a^2) - (a^2b + ab) = \\ = a^2(a + 1) - ab(a + 1) = (a + 1)(a^2 - ab) = a(a + 1)(a - b)$$

3. Пример повышенной трудности: разложите на множители.

$$a^4 + 2a^3 + 1 = a^4 + a^3 + a^3 + a^2 - a^2 + a - a + 1 = \\ = (a^4 + a^3) + (a^3 + a^2) - (a^2 + a) + (a + 1) = \\ = a^3(a + 1) + a^2(a + 1) - a(a + 1) + (a + 1) = \\ = (a + 1)(a^3 + a^2 - a + 1)$$

$$\text{Или так: } (a^4 + a^3) + (a^3 + 1)$$

Прибавьте  
противоположные  
одночлены:

$$a^2 - a^2; a - a;$$

$$2a^3 = a^3 + a^3$$

## Попробуй-ка реши!

1. Вычислите:  $14,7 \cdot 13 - 2 \cdot 14,7 + 13 \cdot 5,3 - 2 \cdot 5,3$  (примените разложение многочлена на многочлен).

2. Решите уравнение  $(x^2 - 4x) + x - 4 = 0$ .

Ответ: 1). 220; 2). -1; 4.



### Формулы сокращенного умножения

Преобразование суммы в произведение		Преобразование произведения в сумму
1.	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
2.	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
3.	$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
4.	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
5.	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
6.	$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) =$ $= (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$	$(a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = a^4 - b^4$
7.	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3 =$ $= (a + b)(a + b)(a + b)$	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$
8.	$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3 =$ $= (a - b)(a - b)(a - b)$	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$
9.	$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc =$ $= (a + b + c)^2$	$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc =$ $= (a + b + c)^2$
10.	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$ где $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$	

### Формулы приближенного вычисления

$(1 + \alpha)^2 = 1 + 2\alpha$ ;  $(1 - \alpha)^2 = 1 - 2\alpha$ , где  $|\alpha| < 1$  и  $\alpha$  — очень мало



## Примеры

Найдите приближенное значение чисел.

1.  $(1,005)^2 = (1+0,005)^2 \approx 1+2 \cdot 0,005 \approx 1+0,01 \approx 1,01$
2.  $(0,994)^2 = (1-0,006)^2 \approx 1-2 \cdot 0,006 \approx 1-0,012 \approx 0,988$

$$(1+\alpha)^2 = 1+2\alpha$$

$$(1-\alpha)^2 = 1-2\alpha$$

## Алгоритм

16

## Разложение многочлена на множители по формулам сокращенного умножения

1. Если каждое слагаемое многочлена содержит общий множитель, то сначала вынесите его за скобки, а потом узнайте по виду примера формулу:

- а) если дана разность или сумма двух одночленов, то примените одну из формул:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

- б) если даны три члена, то примените одну из формул:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2; \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

- в) если даны четыре члена, то примените одну из формул:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3; \quad a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$$

Если нельзя применить эти формулы, то примените метод группировки.

2. В формулах под  $a$  и  $b$  понимают любые числа или алгебраические выражения, и ваша задача — найти в примере, что принять за  $a$  и что за  $b$ .

Например:

$$\begin{aligned} 0,09x^2 - 0,16y^2 &= (0,3x)^2 - (0,4y)^2 = \\ &= (0,3x - 0,4y)(0,3x + 0,4y) \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} a = 0,3x; \quad b = 0,4y \\ a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \end{array} \right.$$

3. Узнав формулу, запишите ее за чертой, а в примере выделите квадраты или кубы одночленов.
4. Подставьте в формулу вместо  $a$  и  $b$  их значения п. 2 и получите вместо суммы произведение.



**З а м е ч а н и е.** Признак узнавания формул: количество членов в формуле и знак перед вторым членом в трехчлене или перед вторым и четвертым в четырехчлене.

**П о л е з н ы й с о в е т.** Иногда удобно использовать формулы:

1.  $(a-b)^2 = (b-a)^2$
2.  $(-a-b)^2 = (a+b)^2$
3.  $(-a-b)(a+b) = -(a+b)^2$
4.  $(a-b)^3 = -(b-a)^3$

### Примеры

Разложите на множители (1–14).

$$1. \quad 9x^2 + 24x + 16 = \left(\underbrace{3x}_a\right)^2 + 2 \cdot \underbrace{3x}_a \cdot \underbrace{4}_b + \underbrace{4}_b^2 = \\ = (3x + 4)^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2; \\ a = 3x; \quad b = 4$$

$$2. \quad 100 - 60a + 9a^2 = \underbrace{10}_a^2 - 2 \cdot \underbrace{10}_a \cdot \underbrace{3a}_b + \left(\underbrace{3a}_b\right)^2 = \\ = (10 - 3a)^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2; \\ x = 10; \quad y = 3a$$

$$3. \quad \left(\underbrace{x+y}_a\right)^2 - \left(\underbrace{x-y}_b\right)^2 = \\ = (x+y-(x-y))(x+y+x-y) = \\ = (\underline{x+y-x+y}) \cdot 2x = 2y \cdot 2x = 4xy$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b); \\ a = x+y; \quad b = x-y$$

$$4. \quad 16x - 4x^3 = 4x(4 - x^2) = 4x(2 - x)(2 + x)$$

Вынесите  $4x$  за скобку

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\ a = 2; \quad b = x$$

$$5. \quad 12m^5n + 24m^4n + 12m^3n = \\ = 12m^3n(m^2 + 2m + 1) = 12m^3n(m+1)^2$$

Вынесите  $12m^3n$  за скобку

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2; \\ a = m; \quad b = 1$$



$$\begin{aligned}
 6. \quad 25a^2 - 4b^2 - 4b - 1 &= 25a^2 - (4b^2 + 4b + 1) = \left( \underbrace{5a}_x \right)^2 - \left( \underbrace{2b+1}_y \right)^2 = (5a - 2b - 1)(5a + 2b + 1) \\
 7. \quad m^3 - 12m^2 + 48m - 64 &= (m - 4)^3 \\
 \text{Проверка:} \\
 (m - 4)^3 &= m^3 - 12m^2 + 48m - 64 \text{ — верно}
 \end{aligned}
 \left| \begin{array}{l}
 a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2; \\
 a = 2b; b = 1; \\
 x^2 - y^2 = (x - y)(x + y); \\
 x = 5a; y = 2b + 1 \\
 a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3; \\
 a = m; b = 4; a \text{ и } b \\
 \text{находите по 1 и 4 членам,} \\
 \text{а знак — по 2 и 4 членам}
 \end{array} \right.$$

8. Вычислите значение выражения, применяя формулы.

$$\begin{aligned}
 \frac{38^2 - 17^2}{47^2 - 19^2} &= \frac{(38 - 17)(38 + 17)}{(47 - 19)(47 + 19)} = \frac{21^{(7)} \cdot 55^{(11)}}{28 \cdot 66} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{5}{8} \\
 9. \quad x^2 + 2xy + y^2 - z^2 + 2z - 1 &= (x + y)^2 - (z - 1)^2 = (x + y - (z - 1))(x + y + z - 1) = (x + y - z + 1)(x + y + z - 1)
 \end{aligned}
 \left| \begin{array}{l}
 a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \\
 a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2; \\
 a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \\
 a = x + y; b = z - 1
 \end{array} \right.$$

10. ГИА. Разложите на множители.

$$\begin{aligned}
 a^2 - 9b^2 + 18bc - 9c^2 &= a^2 - (9b^2 - 18bc + 9c^2) = a^2 - (3b - 3c)^2 = (a - (3b - 3c))(a + 3b - 3c) = (a - 3b + 3c)(a + 3b - 3c)
 \end{aligned}
 \left| \begin{array}{l}
 x^2 - y^2 = (x - y)(x + y); \\
 a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2; \\
 a = 3b; b = 3c
 \end{array} \right.$$

11. ГИА. Разложите на множители.

$$\begin{aligned}
 ax^2 - 2ax - bx^2 + 2bx - b + a &= (ax^2 - bx^2) - (2ax - 2bx) + (a - b) = x^2(a - b) - 2x(a - b) + (a - b) = (a - b)(x^2 - 2x + 1) = (a - b)(x - 1)^2
 \end{aligned}
 \left| \begin{array}{l}
 a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2
 \end{array} \right.$$

**Полезный совет.** Группировать можно по разным признакам: по равным коэффициентам, по одинаковым степеням, по одинаковым буквенным множителям, чтобы при вынесении множителя за скобку получить или формулу в скобке, или один и тот же многочлен, который можно вынести за скобку во всех слагаемых.

12. ГИА. Разложите на множители.

$$\begin{aligned}
 x^3y^2 - xy - x^3 + x &= (x^3y^2 - x^3) - (xy - x) = x^3(y^2 - 1) - x(y - 1) = x^3(y - 1)(y + 1) - x(y - 1) = x(y - 1)(x^2(y + 1) - 1) = x(y - 1)(x^2y + x^2 - 1) \\
 &= x^3(y - 1)(y + 1) - x(y - 1) = x(y - 1)(x^2(y + 1) - 1) = x(y - 1)(x^2y + x^2 - 1)
 \end{aligned}$$

13. Решите уравнение  $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - 4x(2x^2 - 3) = 23$ .



Решение.

$$(2x)^3 - 1^3 - 8x^3 + 12x = 23$$

$$8x^3 - 1 - 8x^3 + 12x = 23$$

$$12x = 24 \quad | :12$$

$$x = 2$$

Ответ: 2.

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3;$$

$$a=2x; b=1$$

14. Запишите выражение в виде многочлена:  $(x^2 - (y-a)) \cdot (x^2 + (y-a))$ .

$$(x^2)^2 - (y-a)^2 = x^4 - y^2 + 2ay - a^2$$

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2;$$

$$a=x^2; b=y-a$$

**Проверь себя!**1. ГИА. Разложите на множители  $5m^2n - 20mn^2$ .2. ГИА.  $1 - 64b^2$ . 3. ГИА.  $x - y - 3x^2 + 3y^2$ .Ответ: 1).  $5mn(m-4n)$ ; 2).  $(1-8b)(1+8b)$ ; 3).  $(x-y)(1-3x-3y)$ .**Попробуй не реши!** Разложите на множители.

1.  $-x^3 + x^2 + x$

2.  $-3,2x^2y^3 + 1,6x^2y^2 - 6,4x^2y$

3.  $a(x-5) + x - 5$

4.  $(3x-6y) - (10y-5x)$

5.  $(a+4)(9a-12b) + (a-4)(24b-18a)$

6.  $a^8 - b^6$

7.  $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$

8.  $x(m-n) + y(n-m) - z(m-n)$

Ответ: 1).  $x(-x^2 + x + 1)$ ; 2).  $-1,6x^2y(2y^2 - y + 4)$ ; 3).  $(x-5)(a+1)$ ;4).  $8(x-2y)$ ; 5).  $3(3a-4b)(12-a)$ ; 6).  $(a^4 - b^3)(a^4 + b^3)$ ;7).  $(a-b-c)(a-b+c)$ ; 8).  $(m-n)(x-y-z)$ .**Попробуй-ка реши!** Разложите на множители.

1.  $81a^2 - 16(2a-3b)^2$

2.  $x^5 - x^3 + x^2 - 1$

3.  $6y^6 - 12y^5 - 4y^4 + 8y^3$

4.  $ab^2 - b^2y - ax + xy + b^2 - x$

5. Решите уравнение  $(x-2)(x+3) - (x-2)^2 = 5$ .Ответ: 1).  $(17a-12b)(a+12b)$ ; 2).  $(x-1)(x+1)^2(x^2-x+1)$ ;3).  $2y^3(y-2)(3y^2-2)$ ; 4).  $(a-y+1)(b^2-x)$ ; 5). 3.**Алгоритм****17****Нахождение неизвестного члена  
в формулах сокращенного умножения**

1. Определите вид формулы по количеству членов:

1). Если два члена, то формула имеет вид:  $a^2 - b^2$ ,  $a^3 + b^3$  или  $a^3 - b^3$ .



2). Если три члена, то формула имеет вид:  $a^2 + 2ab + b^2$  или  $a^2 - 2ab + b^2$ .

3). Если четыре члена, то формула имеет вид:  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  или  $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ .

2. Определите один известный член в I степени для формул:  $a^2 \pm 2ab + b^2$  или  $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ .

Например:

$$\underbrace{9x^2}_{a^2} + \underbrace{6x}_{2ab} + \underbrace{\dots}_{b^2} \quad \left| \quad a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \right.$$

$9x^2 = a^2$ , тогда  $a = 3x$ , так как  $(3x)^2 = 9x^2$ .

3. Найдите второй член в I степени через второй член в формуле  $2ab$ ;  $6x = 2ab$ .

$$6x = 2 \cdot \underbrace{3x}_a \cdot b \quad | \quad : 6x; b = 1$$

$$9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2$$

Подобным образом поступают в случае  $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ .

4. Определите один член в I степени в формулах  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  или  $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ .

Например:

$$\underbrace{8}_{a^3} + \underbrace{12x}_{3a^2b} + \underbrace{6x^2}_{3ab^2} + \underbrace{\dots}_{b^3}; 8 = a^3, \quad \left| \quad a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3 \right.$$

то  $a = 2$ , так как  $2^3 = 8$

5. Определите второй член в I степени, например, через второй член  $12x$ , который в формуле равен  $3a^2b$ :  $12x = 3a^2b$ ;  $a = 2$ , то  $12x = 12b$ ;  $b = x$ .

Запишите формулу:  $(2+x)^3$ . Проверьте найденную формулу:

$$(2+x)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot x + 3 \cdot 2 \cdot x^2 + x^3 = 8 + 12x + 6x^2 + x^3 \text{ — верно}$$

6. Если дана формула  $a^2 - b^2$ , то:

1). Найдите  $a$  и  $b$  в I степени.

2). Подставьте значения  $a$  и  $b$  в формулу  $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ .

Например:  $25c^2 - 9q^2$

$25c^2 = a^2$ , тогда  $a = 5c$ , так как  $(5c)^2 = 25c^2$

$9q^2 = b^2$ , тогда  $b = 3q$ , так как  $(3q)^2 = 9q^2$

Получим формулу  $25c^2 - 9q^2 = (5c - 3q)(5c + 3q)$

7. Если дана формула  $a^3 \pm b^3$ , то:

1). Найдите  $a$  и  $b$  в I степени.



2). Подставьте значения  $a$  и  $b$  в формулу  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ .

Например:  $27 - 8q^3$

$27 = a^3$ , тогда  $a = 3$ , так как  $3^3 = 27$

$8q^3 = b^3$ , тогда  $b = 2q$ , так как  $(2q)^3 = 8q^3$

Получим формулу:  $27 - 8q^3 = (3 - 2q)(9 + 6q + 4q^2)$

### Проверь себя!

Найдите неизвестный член в формуле и запишите формулу кратко.

1.  $\dots - 12b + 9b^2 =$

2.  $25a^2 + \dots + 16b^2 =$

3.  $27a^3 - 135a^2b + \dots - 125b^3 =$

4.  $\dots x^2 + 30xy + \dots y^2 =$

Ответ: 1).  $4$ ;  $(2 - 3b)^2$ ; 2).  $40ab$ ;  $(5a + 4b)^2$ ; 3).  $225ab^2$ ;  $(3a - 5b)^3$ ;  
4).  $25$ ;  $9$  или  $9$ ;  $25$ ;  $(5x + 3y)^2$  или  $(3x + 5y)^2$ .



## Глава II. Алгебраические дроби

### § 1. Алгебраические дроби

**Определение 1.** Дробь, в которой числитель и знаменатель алгебраические выражения, называется алгебраической дробью.

Например:  $\frac{a-b}{a+b}$ ;  $\frac{5}{c}$ ;  $\frac{y}{x+y}$ ;  $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

**З а м е ч а н и е.** Числитель алгебраической дроби может быть числом, а знаменатель — только буквенный одночлен или многочлен.

**Определение 2.** Областью допустимых значений (ОДЗ) буквенных величин, входящих в алгебраическую дробь, называют все такие числовые значения букв, при которых знаменатель дроби не равен нулю, т.е. дробь имеет смысл.

ОДЗ целых алгебраических выражений есть множество любых действительных чисел.

Например:

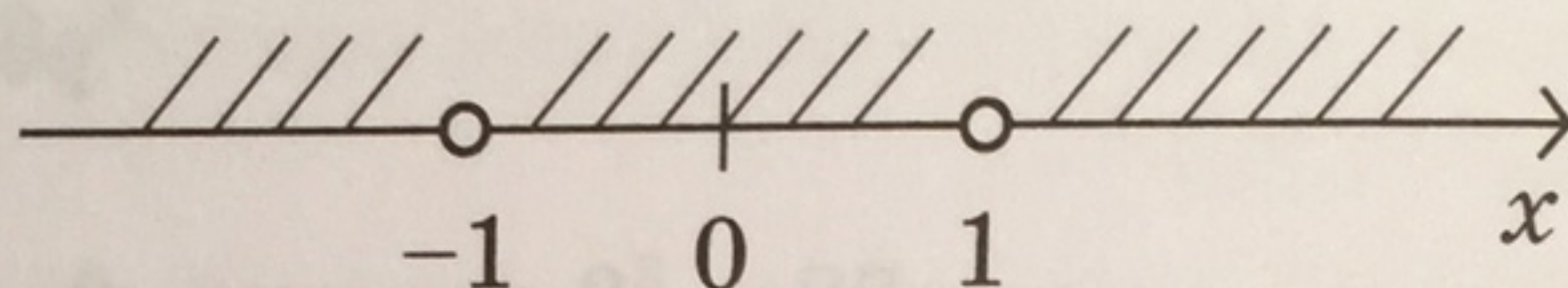
1. ОДЗ дроби  $\frac{5}{x^2-1}$  есть все множество действительных чисел, кроме  $x = \pm 1$ .

2. ОДЗ выражения  $\frac{1}{2}a^2 - ab + \frac{1}{5}b^3$  есть множество действительных чисел.

ОДЗ можно изобразить на числовой прямой.



Например, ОДЗ дроби  $\frac{5}{x^2-1}$  будет изображено так:



Числа  $-1$  и  $1$ , не принадлежащие ОДЗ, изображаются пустыми кружочками, а все остальные точки оси (ОДЗ) показаны штриховкой.

Ответ: ОДЗ выражения:  $(-\infty; +\infty)$ , кроме...

**Определение 3.** Значением алгебраической дроби называется число, которое получится, если вместо букв подставить некоторые числа и произвести указанные действия.

Например, найти значение дроби  $\frac{ab}{a+b}$ , если  $a = \frac{1}{8}$ ;  $b = 2$ .

Решение.

Подставьте вместо  $a$  и  $b$  их числовые значения и вычислите:

$$\frac{\frac{1}{8} \cdot 2}{\frac{1}{8} + 2} = \frac{1}{4} : \frac{17}{8} = \frac{1 \cdot 8}{4 \cdot 17} = \frac{2}{17} \quad \left| \quad \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{8} + 2 = 2\frac{1}{8} = \frac{17}{8}; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \right.$$

**Определение 4.** Целые и дробные алгебраические выражения называются рациональными выражениями.

### Примеры

Найдите значения дроби.

1. ГИА.  $\frac{ax}{a+x}$  при  $a = \frac{1}{2}$ ;  $x = \frac{1}{3}$

Решение.

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{6} : \frac{5}{6} = \frac{1 \cdot 6}{6 \cdot 5} = \frac{1}{5} \quad \left| \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \right.$$

Ответ: значение дроби равно  $\frac{1}{5}$ .



2. ГИА.  $\frac{a+x}{a-x}$  при  $a = -0,7$ ;  $x = -0,3$ .

Решение.

$$\frac{-0,7-0,3}{-0,7-(-0,3)} = \frac{-1}{-0,4} = 1:0,4 = 10:4 = 2,5$$

Ответ: значение дроби равно 2,5.

## Алгоритм

18

## Нахождение ОДЗ алгебраической дроби

1. Выпишите знаменатели дробей (дроби) и приравняйте их нулю.
2. Решите уравнение п. 1.
3. Отбросьте корни уравнения п. 2 из множества всех действительных чисел, тогда остальные числа и будут ОДЗ.
4. Запишите ответ: ОДЗ — все числа  $(-\infty; +\infty)$ , кроме корней уравнения п. 2.

## Примеры

Укажите допустимые значения букв, входящих в выражение.

1.  $\frac{x+1}{\underbrace{8x-4}_b}$

Решение.

1).  $8x - 4 = 0$

2).  $8x = 4$ ;  $x = \frac{1}{2}$

3).  $x \neq \frac{1}{2}$

Дробь  $\frac{a}{b}$  имеет смысл, если  $b \neq 0$

Ответ: ОДЗ — все действительные числа, кроме  $0,5$ .



$$2. \frac{x^2 - 4}{\underbrace{3x(x-1)}_b}$$

Решение.

1).  $3x(x-1)=0 \quad | :3$

2).  $x(x-1)=0; x=0$

или  $x-1=0; x=1$

3).  $x \neq 0; x \neq 1$

Дробь  $\frac{a}{b}$  имеет смысл, если  $b \neq 0$  $a \cdot b = 0$ , если  $a = 0$  или  $b = 0$ 

Ответ: ОДЗ — все действительные числа, кроме 0 и 1.

$$3. \frac{a+3}{a^2+9}$$

Решение.

1).  $a^2+9=0; a^2=-9$  — нет решений

2).  $a$  — любое действительное число

Ответ: ОДЗ — любые действительные числа.

$$4. \text{Найдите ОДЗ выражения } \frac{x}{x-2} + \frac{a}{2+x}.$$

Решение.

1).  $x-2=0; x=2$

$x+2=0; x=-2$

2).  $x \neq 2; x \neq -2$

Дробь  $\frac{a}{b}$  имеет смысл, если  $b \neq 0$ 

Ответ: ОДЗ: — любое действительное число, не равное 2 и -2.

$$5. \text{Найдите ОДЗ уравнения } \frac{x}{2x-3} = \frac{4}{x}.$$

Решение.

1).  $2x-3=0; x=\frac{3}{2}; x=0$

2).  $x \neq 0; x \neq \frac{3}{2}$

Дробь  $\frac{a}{b}$  имеет смысл, если  $b \neq 0$ Ответ: ОДЗ:  $x$  — любое действительное число, не равное 0 и  $\frac{3}{2}$ .

**З а м е ч а н и е.** Нельзя записывать ответ как неравенство, например  $x \neq 0, x \neq 1$ , так как ОДЗ — это множество всех чисел, при которых выражение имеет смысл.



**Проверь себя!**

Найдите ОДЗ дроби.

1.  $\frac{3}{x-25}$

2.  $\frac{a-b}{a+4}$

3.  $\frac{c}{c^2-9}$

4.  $\frac{5}{x}$

**Ответ:** ОДЗ всех дробей — любые действительные числа, кроме:1).  $x = 25$ ; 2).  $a = -4$ ; 3).  $c = \pm 3$ ; 4).  $x = 0$ .**Попробуй-ка реши!****ГИА.** При каких значениях переменной имеет смысл выражение

$$1 + \frac{x}{1 - \frac{x}{x + \frac{x}{x-1}}}$$

**Ответ:** ОДЗ:  $x$  — любое действительное число, не равное 1 и 0.**Сокращение алгебраических дробей**Основное свойство дроби  $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}}$  ( $b \neq 0$ ;  $m \neq 0$ ) выполняетсяи для алгебраических дробей, причем,  $m$  — это число, одночлен или многочлен, не равные нулю.Если  $\frac{P}{Q}$  — дробь, где  $Q \neq 0$ ,  $P$  и  $Q$  — одночлены или многочлены,  
то  $\boxed{\frac{P \cdot m}{Q \cdot m} = \frac{P}{Q}}$ ,  $m \neq 0$ .**Алгоритм****19****Сокращение алгебраических дробей**

1. Разложите числитель и знаменатель дроби на множители (алгоритмы 14, 15, 16).
2. Разделите числитель и знаменатель дроби на общий множитель.
3. Запишите полученную после сокращения дробь.



**Полезные советы**

Если перед дробью стоит знак минус (-), то его можно ставить там,

где удобно для решения:  $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$ .

Если знаков минус (-) в дроби два, то ставьте их как удобно для ре-

шения или опустите совсем:  $\frac{-a}{-b} = -\frac{-a}{b} = -\frac{a}{-b} = \frac{a}{b}$ .

Помните, что внутри скобки, которая стоит в квадрате, члены можно менять местами:  $(a-b)^2 = (b-a)^2$ .

При сокращении дроби считают, что множитель, на который сокра-  
щают, не равен нулю.

Подписывайте на «полочке» множитель, на который сокращаете  
дробь.

**Примеры**

Сократите дроби (1-7).

$$1. \quad \frac{6ab^{2a}}{-4a} = -\frac{3b}{2}$$

$$\left| \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \right.$$

$$2. \quad \frac{1(a-b)}{3(b-a)} = \frac{2(a-b)^{(a-b)}}{-3(a-b)} = -\frac{2}{3}$$

$$3. \quad \frac{(m-n)}{(n-m)^2} = \frac{(m-n)^{(m-n)}}{(m-n)^2} = \frac{1}{m-n}$$

$$(m-n)^2 = (n-m)^2$$

$$4. \quad \frac{7a+14b}{3a+6b} = \frac{7(a+2b)^{(a+2b)}}{3(a+2b)} = \frac{7}{3}$$

$$5. \quad \frac{a^2+3a}{9-a^2} = \frac{a(a+3)^{(a+3)}}{(3-a)(3+a)} = \frac{a}{3-a}$$

$$\left| \begin{array}{l} a^2-b^2 = (a-b)(a+b) \\ a+b = b+a \end{array} \right.$$



$$6. \frac{b^2 - b}{ab - b} = \frac{b(b-1)}{b(a-1)} = \frac{b-1}{a-1}$$

$$7. \frac{ax^2 - ax}{ax} = \frac{ax(x-1)}{ax} = x-1$$

**Внимание!** Нельзя сокращать на слагаемое! Можно сокращать только на общий множитель по основному свойству дроби.

### Проверь себя!

Сократите дроби.

1. ГИА.  $\frac{ab}{ab - ab^2}$

2.  $\frac{16 - a^2}{4 + a}$

3.  $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)^2}$

Ответ: 1).  $\frac{1}{1-b}$ ; 2).  $4 - a$ ; 3). 1.

Попробуй-ка реши! Сократите дроби.

1.  $\frac{a^2 + 6ab + 9}{a^2 - 9}$

2.  $\frac{a^2 - 2a + 1}{a - 1}$

3.  $\frac{2 - 12a + 18a^2}{1 + b - 3a - 3ab}$

Ответ: 1).  $\frac{a+3}{a-3}$ ; 2).  $a-1$ ; 3).  $\frac{2(1-3a)}{1+b}$ .

### Алгоритм

20

### Приведение дробей к общему знаменателю

1. Найдите общий знаменатель дробей. Для этого:
  - а) выпишите все знаменатели дробей в столбик за чертой;
  - б) разложите знаменатели на множители (числа на простые множители);
  - в) допишите к каждому знаменателю те множители из других знаменателей, которых в нем нет (дополнительные множители).



2. Найдите НОК знаменателей (перемножьте множители любой строки) — это общий знаменатель (ОЗ).
3. Подпишите к каждой дроби ее дополнительный множитель.
4. Умножьте числитель каждой дроби на ее дополнительный множитель (п. 1 в), а в знаменателе сразу пишите ОЗ. Общий знаменатель не равен нулю.

**З а м е ч а н и е.** Если знаменатели нельзя разложить на множители, то ОЗ равен произведению знаменателей, а дополнительными множителями являются знаменатели других дробей для данной дроби. Дополнительный множитель можно найти делением ОЗ на знаменатель дроби.

### Примеры

Приведите дроби к общему знаменателю.

$$1. \quad \frac{2a}{b^2}; \quad \frac{4}{15a^2b}; \quad \frac{3}{20a^3b^4}$$

Решение.

$$\overset{60a^3b^2)}{\frac{2a}{b^2}} = \frac{2a \cdot 60a^3b^2}{60a^3b^4} = \frac{120a^4b^2}{60a^3b^4}$$

$$\overset{4ab^3)}{\frac{4}{15a^2b}} = \frac{4 \cdot 4ab^3}{60a^3b^4} = \frac{16ab^3}{60a^3b^4}$$

$$\overset{3)}{\frac{3}{20a^3b^4}} = \frac{9}{60a^3b^4}$$

Ответ:  $\frac{120a^4b^2}{60a^3b^4}; \quad \frac{16ab^3}{60a^3b^4}; \quad \frac{9}{60a^3b^4}.$

$$2. \quad \frac{a-b}{a+b} \text{ и } \frac{a+b}{a-b}$$

$b^2$	$b^2$	Доп. множители $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a^3 \cdot b^2$ $4 \cdot a \cdot b^3$ $3$
$15a^2b$	$3 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot b$	
$20a^3b^4$	$4 \cdot 5 \cdot a^3 \cdot b^4$	
	$3$	

ОЗ:  $60a^3b^4 \neq 0$

НОК  $(a^n b^p; a^m b^k) = a^m \cdot b^k,$

если  $m > n, k > p$



Решение.

$$^{a-b)} \frac{a-b}{a+b} = \frac{(a-b)(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{(a+b)(a-b)}$$

$$^{a+b)} \frac{a+b}{a-b} = \frac{(a+b)(a+b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a-b)(a+b)}$$

$$a+b$$

$$a-b$$

Доп. множители

$$a-b$$

$$a+b$$

$$\text{ОЗ: } (a-b)(a+b) \neq 0$$

**З а м е ч а н и я**

1. В знаменателе скобки открывать не надо, удобнее иметь его в виде произведения.
2. Если целое число или выражение надо привести к общему знаменателю, то запишите его дробью со знаменателем 1 и тогда умножьте числитель на ОЗ и в знаменателе запишите ОЗ.

Например, привести дроби к общему знаменателю:

$$1. a+b \text{ и } \frac{c}{a-b}. \text{ Получим: } a+b = \frac{a+b}{1} = \frac{(a+b)(a-b)}{a-b} \text{ и дробь } \frac{c}{a-b}.$$

$$2. a \text{ и } \frac{c}{b}. \text{ Получим: } a = \frac{a}{1} = \frac{a \cdot b}{1 \cdot b} = \frac{ab}{b} \text{ и дробь } \frac{c}{b}.$$

**Примеры**

Приведите дроби к общему знаменателю.

$$1. \frac{3b}{b-2} \text{ и } \frac{4b}{b^2-4}$$

Решение.

$$^{b+2)} \frac{3b}{b-2} = \frac{3b(b+2)}{(b-2)(b+2)} = \frac{3b^2 + 6b}{(b-2)(b+2)}$$

$$\frac{4b}{b^2-4} = \frac{4b}{(b-2)(b+2)}$$

$$b-2$$

$$b^2-4$$

$$b-2$$

$$(b-2)(b+2)$$

Доп. множители

$$b+2$$

$$1$$

$$\text{ОЗ: } (b-2)(b+2) \neq 0$$



2.  $\frac{1}{a^2 - 4b^2}; \frac{1}{3a^2 + 6ab}$  и  $\frac{1}{2ab - a^2}$

Решение.

$$\frac{\overset{3a)}{1}}{a^2 - 4b^2} = \frac{3a}{3a(a - 2b)(a + 2b)}$$

$$\frac{\overset{a-2b)}{1}}{3a^2 + 6ab} = \frac{a - 2b}{3a(a - 2b)(a + 2b)}$$

$$\frac{\overset{-3(a+2b)}{1}}{2ab - a^2} = \frac{-3(a + 2b)}{3a(a - 2b)(a + 2b)} =$$

$$= \frac{-3a - 6b}{3a(a - 2b)(a + 2b)}$$

$a^2 - 4b^2$	$(a - 2b)(a + 2b)$	Доп. множители
$3a^2 + 6ab$	$3a(a + 2b)$	$3a$
$2ab - a^2$	$a(2b - a)$	$a - 2b$
		$-3(a + 2b)$

ОЗ:  $3a(a - 2b)(a + 2b) \neq 0$

**Проверь себя!**

Приведите дроби к общему знаменателю:  $\frac{5}{4x - 4}; \frac{4x}{1 - x^2}; \frac{1}{3x^2 + 3x}$ .

Ответ:  $\frac{15x^2 + 15x}{12x(x - 1)(x + 1)}; -\frac{48x^2}{12x(x - 1)(x + 1)}; \frac{4x - 4}{12x(x - 1)(x + 1)}$ .

Алгоритм

21

Сложение и вычитание алгебраических дробей

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}; \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$$

1. Найдите общий знаменатель (ОЗ) по алгоритму 20.
2. Умножьте числитель каждой дроби на ее дополнительный множитель, а знаменатель у каждой дроби запишите общий.
3. Сложите или вычтите дроби с одинаковыми знаменателями по формулам  $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}; \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$ .



4. Упростите числитель общей дроби: раскройте скобки и приведите подобные слагаемые.

### Полезные советы

1. Если перед скобкой стоит знак минус (-), то при сложении дробей запишите его в числитель дроби, а сам числитель поставьте в скобки, тогда можно избежать ошибки в знаках при раскрытии скобок в числителе дроби.
2. Если знаменатель дроби отличается от других знаменателей только знаками перед его членами, то поменяйте знаки перед дробью и у каждого члена в знаменателе.

Например:

$$1. \frac{a+b}{a} - \frac{a-b}{a} = \frac{a+b-(a-b)}{a}; \quad 2. \frac{a}{b-a} + \frac{b}{a-b}, \text{ то } \frac{a}{b-a} - \frac{b}{b-a}$$

### Примеры

Выполните действия.

$$1. \frac{a+b}{2c} - \frac{a-b}{2c}$$

$$\frac{a+b}{2c} - \frac{a-b}{2c} = \frac{a+b-(a-b)}{2c} = \frac{a+b-a+b}{2c} = \frac{2b}{2c} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b};$$

$$-(a-b) = -a+b$$

$$2. \frac{2m}{n} + 4 - \frac{3}{n^2}$$

$$\frac{2m}{n} + 4 - \frac{3}{n^2} = \frac{n) 2m}{n} + \frac{n^2 4}{1} - \frac{1) 3}{n^2} = \frac{2mn}{n^2} + \frac{4n^2}{n^2} - \frac{3}{n^2} =$$

$$= \frac{2mn + 4n^2 - 3}{n^2}$$

$n$	$n$
$n^2$	$1$
$1$	$n^2$

ОЗ:  $n^2 \neq 0$

$$3. \frac{2x}{x-4} - \frac{5x-2}{x^2-16}$$



$$\frac{x+4}{x-4} \cdot \frac{2x}{x^2-16} = \frac{2x(x+4)-(5x-2)}{(x-4)(x+4)} =$$

$$= \frac{2x^2+8x-5x+2}{(x-4)(x+4)} = \frac{2x^2+3x+2}{(x-4)(x+4)}$$

$x-4$	$x-4$	Доп. множи- тели $x+4$ 1
$x^2-16$	$(x-4)(x+4)$	

ОЗ:  $(x-4)(x+4) \neq 0$

4. ГИА. Докажите тождество:

$$\frac{1}{(y-1)(y-2)} + \frac{1}{(y-2)(y-3)} + \frac{1}{(y-3)(y-4)} = \frac{3}{(y-1)(y-4)}$$

**З а м е ч а н и е.** Доказать тождество — это значит, упростив отдельно левую и правую части равенства, убедиться, что они равны.

Левая часть:

$$\left( \frac{y-3}{(y-1)(y-2)} + \frac{y-1}{(y-2)(y-3)} \right) + \frac{1}{(y-3)(y-4)} =$$

$$= \frac{y-3+y-1}{(y-1)(y-2)(y-3)} + \frac{1}{(y-3)(y-4)} =$$

$$= \frac{2(y-2)}{(y-1)(y-2)(y-3)} + \frac{1}{(y-3)(y-4)} =$$

$$= \frac{y-4}{(y-1)(y-3)} + \frac{y-1}{(y-3)(y-4)} = \frac{2y-8+y-1}{(y-1)(y-3)(y-4)} = \frac{3y-9}{(y-1)(y-3)(y-4)} =$$

$$= \frac{3(y-3)}{(y-1)(y-3)(y-4)} = \frac{3}{(y-1)(y-4)}$$

$(y-1)(y-2)$	Доп. множители $y-3$ $y-1$
$(y-2)(y-3)$	

ОЗ(I):  $(y-1)(y-2)(y-3) \neq 0$

$(y-1)(y-3)$	$y-4$
$(y-3)(y-4)$	$y-1$

ОЗ(II):  $(y-3)(y-4)(y-1) \neq 0$

— получили правую часть равенства, тождество доказано

**Проверь себя!**

Выполните действия.

1.  $\frac{2x}{3(a-b)} + \frac{x}{a-b}$       2.  $\frac{y-b}{a^2-ab} - \frac{y-a}{ab-b^2}$



3.  $\frac{5+p^2}{p^2-36} - \frac{p}{6+p}$

4.  $\frac{b}{c} + \frac{b}{c^2d} + \frac{b}{cd^2}$

Ответ: 1).  $\frac{5x}{3(a-b)}$ ; 2).  $\frac{a+b-y}{ab}$ ; 3).  $\frac{6p+5}{(p-6)(p+6)}$ ; 4).  $\frac{b(cd^2+d+c)}{c^2d^2}$ .

Попробуй-ка реши!

Найдите значение выражения  $\frac{3c^2-c+8}{c^3-1} + \frac{c-1}{c^2+c+1} - \frac{2}{1-c}$  при  $c = 1\frac{1}{2}$ .

Ответ:  $9\frac{13}{19}$ .

## Алгоритм

## 22

## Умножение и деление алгебраических дробей

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad \text{или} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

1. Запишите формулу деления или умножения дробей за чертой.
2. Примените формулу умножения или деления дроби (запишите действия под общей чертой).
3. Разложите на множители числитель и знаменатель дроби.
4. Сократите числитель и знаменатель дроби на общие множители (НОД) — их можно зачеркнуть.
5. Запишите в виде произведения оставшиеся множители в числителе дроби и в знаменателе дроби и запишите новую дробь.
6. Если дробь возводится в степень, то сначала выполните действие возведения дроби в степень, а затем выполняйте пункты алгоритма.

**Внимание!** Нельзя сокращать дроби не под общей чертой, нарушается

основное свойство дроби  $\frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a}{b}$ . Нельзя сокращать на слагаемое!

**З а м е ч а н и е.** Применяя алгоритм, выполняем шаги не разбивая решение на отдельные действия.



## Примеры

Выполните действия (1–6).

$$1. \frac{8a^2b}{9c} \cdot \frac{36c^3}{5a^3b}$$

Решение.

$$2). \frac{8a^2b}{9c} \cdot \frac{36c^3}{5a^3b} = \frac{8a^2b \cdot 36c^3}{9c \cdot 5a^3b} = \frac{8 \cdot 4c^2}{5 \cdot a} = \frac{32c^2}{5a}$$

$$\text{Ответ: } \frac{32c^2}{5a}.$$

$$1). \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d};$$

$$c^3 : c = c^2;$$

$$a^3 : a^2 = a;$$

$$b : b = 1$$

$$2. abc^2 \cdot \left(\frac{ab}{cd}\right)^2$$

Решение. Сначала возведите дробь в степень:

$$2). abc^2 \cdot \left(\frac{ab}{cd}\right)^2 = \frac{abc^2}{1} \cdot \frac{a^2b^2}{c^2d^2} = \frac{abc^2 \cdot a^2b^2}{c^2d^2} = \frac{a^3b^3}{d^2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{a^3b^3}{d^2}.$$

$$1). a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c};$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n};$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$3. \frac{a-b}{2b} : \frac{a-b}{6b^2}$$

Решение.

$$\frac{a-b}{2b} : \frac{a-b}{6b^2} = \frac{(a-b) \cdot 6b^2}{2b \cdot (a-b)} = 3b \quad \left| \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \right.$$

$$\text{Ответ: } 3b.$$

**Полезный совет.** При умножении многочленов в числителе и знаменателе обязательно записывайте их в скобках, иначе будет нарушен порядок действий.



$$4. \frac{5m}{m^2 - n^2} : \frac{15m^2}{m - n}$$

Решение.

$$\frac{5m}{m^2 - n^2} : \frac{15m^2}{m - n} = \frac{5m \cdot (m - n)^{(5m(m-n))}}{(m - n)(m + n) \cdot 15m^2} = \frac{1}{3m(m + n)} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}; \\ m^2 - n^2 = (m - n)(m + n) \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{3m(m + n)}.$$

$$5. \frac{x^2 - 2x + 1}{18x^2} \cdot \frac{9x^4}{x^2 - 1}$$

Решение.

$$2). \frac{x^2 - 2x + 1}{18x^2} \cdot \frac{9x^4}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 2x + 1) \cdot 9x^4}{18x^2(x^2 - 1)} = \frac{(x - 1)^2 \cdot 9x^{4(9x^2(x-1))}}{18x^2(x - 1)(x + 1)} = \frac{(x - 1)x^2}{2(x + 1)} \quad \left| \begin{array}{l} 1). \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}; \\ a^2 - b^2 = (a - b)(a + b); \\ a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ: } \frac{(x - 1)x^2}{2(x + 1)}.$$

$$6. \frac{am^2 - an^2}{m^2 + 2mn + n^2} : \frac{am^2 - 2amn + an^2}{3m + 3n}$$

Решение.

$$2). \frac{am^2 - an^2}{m^2 + 2mn + n^2} : \frac{am^2 - 2amn + an^2}{3m + 3n} = \frac{a(m^2 - n^2) \cdot 3(m + n)}{(m + n)^2 \cdot a(m^2 - 2mn + n^2)} = \frac{a(m - n)(m + n) \cdot 3(m + n)}{(m + n)(m + n) \cdot a(m - n)^2} = \frac{3}{m - n} \quad \left| \begin{array}{l} 1). \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}; \\ a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2; \\ a^2 - b^2 = (a - b)(a + b); \\ (m - n)^2 : (m - n) = m - n \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3}{m - n}.$$



**З а м е ч а н и е.** Равные члены в числителе и знаменателе дроби можно зачеркнуть и подписать множители, полученные при сокращении.

### Проверь себя!

Выполните действия.

$$1. \frac{a^2 - 4}{9a^2} \cdot \frac{3a}{(a-2)^2}$$

$$2. \frac{x^2 + xy}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

$$3. \frac{a^2 - b^2}{8a^3} : \frac{a+b}{4a^2}$$

$$4. \frac{x^2 - 2x + 1}{9y^2} : \frac{x^2 - 1}{3y}$$

Ответ: 1).  $\frac{a+2}{3a(a-2)}$ ; 2).  $\frac{x}{x-y}$ ; 3).  $\frac{a-b}{2a}$ ; 4).  $\frac{x-1}{3y(x+1)}$ .

### Алгоритм

23

### Выполнение совместных действий над алгебраическими дробями

1. Определите порядок действий в примере.
2. Выберите способ решения:
  - а) по действиям;
  - б) цепочкой (переписывая весь пример, постепенно выполняя упрощения).
3. Каждое действие выполняйте по алгоритму, прописывая за чертой формулу решения.
4. Ответ запишите в заданном примере.

### Примеры

Выполните действия.

$$1. \frac{ab+b^2}{3} : \frac{b^3}{3a} + \frac{a+b}{b}$$

**Решение.** Решим пример «цепочкой».



$$\begin{aligned} \frac{ab+b^2}{3} : \frac{b^3}{3a} + \frac{a+b}{b} &= \frac{b(a+b)}{3} : \frac{b^3}{3a} + \frac{a+b}{b} = \\ &= \frac{b(a+b) \cdot 3a}{3 \cdot b^3} + \frac{a+b}{b} = \frac{(a+b)a}{b^2} + \frac{a+b}{b} = \\ &= \frac{a^2+ab}{b^2} + \frac{ab+b^2}{b^2} = \frac{a^2+ab+ab+b^2}{b^2} = \frac{(a+b)^2}{b^2} \end{aligned}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c};$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b};$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

Ответ:  $\frac{(a+b)^2}{b^2}$ .

$$2. \left( \frac{x}{xy-y^2} - \frac{y}{x^2-xy} \right) : \frac{x^2-y^2}{8xy} = \frac{8}{x-y}$$

Решение. Решим пример по действиям.

$$\begin{aligned} 1). \frac{x}{xy-y^2} - \frac{y}{x^2-xy} &= \frac{x^{(x)}}{y(x-y)} - \frac{y^{(y)}}{x(x-y)} = \\ &= \frac{x^2}{xy(x-y)} - \frac{y^2}{xy(x-y)} = \frac{x^2-y^2}{xy(x-y)} \end{aligned}$$

Найдите ОЗ – НОК знаменателей:

$$\begin{array}{c|c|c} xy-y^2 & y(x-y) & \cdot x \\ x^2-xy & x(x-y) & \cdot y \end{array}$$

$$\text{ОЗ: } xy(x-y) \neq 0; \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

**З а м е ч а н и е.** Не надо сокращать полученную дробь, так как дальше надо выполнить действие деления на выражение, содержащее числитель этой дроби.

$$2). \frac{x^2-y^2}{xy(x-y)} : \frac{x^2-y^2}{8xy} = \frac{(x^2-y^2) \cdot 8xy}{xy(x-y) \cdot (x^2-y^2)} = \frac{8}{x-y}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

**Внимание!** Двучлены пишите в скобках, иначе нарушите порядок действий.

**П о л е з н ы й с о в е т.** Если в знаменателе дроби надо поменять

знак, то поменяйте знак и перед дробью тоже  $\left( +\frac{a}{b} = -\frac{a}{-b} \right)$ . Если в зна-

менателе стоит выражение  $(b-a)^2$ , а один из знаменателей равен  $(a-b)$ , то поменяйте знак внутри скобки:  $(b-a)^2 = (a-b)^2$ .



3. ГИА. Упростите выражение  $\frac{3c-2}{c+2} - \frac{c}{c+2} : \frac{c}{c^2-4} - \frac{4c}{c+2}$ .

*Решение.* Применим способ решения «цепочкой».

$$\begin{aligned} \frac{3c-2}{c+2} - \frac{c}{c+2} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{c}{c^2-4} - \frac{4c}{c+2} &= \\ = \frac{3c-2}{c+2} - \frac{c(c-2)(c+2)}{(c+2)c} - \frac{4c}{c+2} &= \frac{3c-2}{\underbrace{c+2}_a} - \frac{c-2}{\underbrace{1}_b} - \frac{4c}{\underbrace{c+2}_c} = \\ = \left( \frac{3c-2}{c+2} - \frac{4c}{c+2} \right) - (c-2) &= \frac{3c-2-4c}{c+2} - (c-2) = \\ = \frac{-c-2}{c+2} - (c-2) &= -1 - (c-2) = -1 - c + 2 = 1 - c \end{aligned}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c};$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$

$$a-b-c = (a-c)-b;$$

$$-\frac{c-2}{1} = -(c-2)!$$

$$\frac{-c-2}{c+2} = \frac{-(c+2)}{c+2} = -1$$

*Ответ:*  $1 - c$ .

**Внимание!** Старайтесь при решении применить свойства сложения и вычитания, чтобы упростить вычисления.

4. ГИА. Упростите выражение  $\frac{a - \frac{4a-4}{a}}{\frac{2}{a} - 1}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} \frac{\left( a - \frac{4a-4}{a} \right) \cdot a}{\left( \frac{2}{a} - 1 \right) \cdot a} &= \frac{a^2 - \frac{(4a-4) \cdot a}{a}}{\frac{2a}{a} - 1 \cdot a} = \frac{a^2 - (4a-4)}{2-a} = \\ = \frac{a^2 - 4a + 4}{2-a} &= \frac{(a-2)^2}{2-a} = \frac{(2-a)^2}{2-a} = 2-a \end{aligned}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}, m \neq 0;$$

$$(a-b) \cdot c = ac - bc;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2;$$

$$(a-b)^2 = (b-a)^2$$

*Ответ:*  $2 - a$ .

**З а м е ч а н и е.** При решении примера применили основное свойство

дроби:  $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}, m \neq 0$ , чтобы освободиться от знаменателя ( $a$ ) в чис-

лителе и знаменателе дроби. Можно было выполнять действия по по-

рядку как обычно.



5. ГИА. Решите уравнение  $\frac{x}{3} + \frac{x-1}{2} = 4$ .  
Решение.

$$\frac{x}{3} + \frac{x-1}{2} = 4 \quad | \cdot 6; \quad \frac{6x}{3} + \frac{6(x-1)}{2} = 4 \cdot 6; \quad 2x + 3x - 3 = 24; \quad 5x = 27; \quad x = \frac{27}{5}$$

Ответ: 5,4.

6. Решите уравнение  $\frac{x}{a^2 - b^2} = \frac{ab}{a^2 - ab}$ .  
Решение.

ОДЗ:  $a \neq \pm b$ ;  $a \neq 0$ ;  $b \neq 0$

$$x = \frac{ab(a^2 - b^2)}{a^2 - ab}$$

$$x = \frac{ab(a+b)(a-b)}{a(a-b)}$$

$$x = b(a+b)$$

По свойству пропорции  $\frac{x}{b} = \frac{c}{d}$  имеем  $x = \frac{bc}{d}$   
 $a^2 - b^2 = 0$ ;  $a^2 - ab = 0$ ;

$$(a-b)(a+b) = 0; \quad a(a-b) = 0;$$

$$a-b=0 \text{ или } a+b=0; \quad a=0 \text{ или } a-b=0$$

$$a \neq b; \quad a \neq -b; \quad a \neq 0; \quad a \neq b$$

Ответ:  $b(a+b)$ .

**Попробуй не реши!**

1. ГИА. Упростите выражение  $\left( \frac{3c+1}{c-1} + c \right) \cdot \frac{1}{c+1}$ .

2. ГИА. Упростите выражение  $\frac{a^2+b^2}{2a^2+2ab} + \frac{b}{a+b}$ .

Ответ: 1).  $\frac{c+1}{c-1}$ ; 2).  $\frac{a+b}{2a}$ .

**Попробуй-ка реши!**

1. ГИА. Упростите выражение:

$$\left( \frac{m}{m-6} - \frac{2m}{m^2-12m+36} \right) \cdot \frac{36-m^2}{m-8} + \frac{12m}{m-6}$$

Ответ:  $-m$ .

2. ГИА. Докажите тождество  $\frac{b(a+b)^2}{a^4-b^4} + \frac{a}{a^2+b^2} = \frac{1}{a-b}$ .

3. Докажите, что при всех допустимых значениях  $a$  и  $b$ ,  $n$  — натуральное число, верно равенство

$$\frac{a^{2n}-b^{2n}}{a^{2n}+b^{2n}} \cdot \frac{a^{4n}-b^{4n}}{a^{2n}-2a^nb^n+b^{2n}} = (a^n+b^n)^2$$



## Глава III. Неравенства

### § 1.

### Числовые неравенства

#### I. Числовые неравенства

При сравнении любых чисел  $a$  и  $b$  может выполняться только один из трех случаев:

1.  $a > b$  ( $a$  больше  $b$ )
2.  $a < b$  ( $a$  меньше  $b$ )
3.  $a = b$  ( $a$  равно  $b$ )

Выражения  $a > b$  и  $a < b$  называются неравенствами.

**Определение 1.** Неравенством называются два числа или алгебраических выражения, соединенных между собой знаком  $>$  (больше) или  $<$  (меньше).

Например:  $5 < 7$ ;  $-8 > -10$ ;  $(a-b)^2 \geq 0$

**Определение 2.** Строгими называются неравенства вида  $a > b$ ;  $a < b$ .

Нестрогими называются неравенства вида  $a \geq b$ ;  $a \leq b$ .

$a \geq b$  читают так:  $a$  больше или равно  $b$  или  $a$  не меньше  $b$ .

$a \leq b$  читают так:  $a$  меньше или равно  $b$  или  $a$  не больше  $b$ .

Строгие ( $c > a$  и  $c < b$ ) и нестрогие ( $c \geq a$  и  $c \leq b$ ) неравенства могут быть записаны двойными неравенствами:  $a < c < b$  (строгое) или



$a \leq c \leq b$  (нестрогое). Их начинают читать со среднего члена слева направо, например:  $c$  больше  $a$ , но меньше  $b$ .

Например:

1).  $c \geq 0$  и  $c \leq 3$ , то  $0 \leq c \leq 3$  — нестрогое неравенство

2).  $3 > 2$  и  $3 < 5$ , то  $2 < 3 < 5$  — строгое неравенство

**Определение 3.** Неравенства  $a > b$  и  $c > d$  или  $a < b$  и  $c < d$  называют неравенствами одинакового смысла. Неравенства  $a > b$  и  $c < d$  имеют противоположный смысл.

Например:  $12 > 6$  и  $7 < 8$  — неравенства разного (противоположного) смысла, а  $15 < 16$  и  $10 < 11$  — одного смысла.

**Определение 4.** Неравенства бывают верными ( $5 > 3$ ) и неверными ( $6 > 10$ ).

Например:  $a \geq 6$  при  $a = 6, 7, 8, \dots$  неравенство верное; при  $a = 5, 4, 3, \dots$  неравенство неверное.

Выражение  $a \neq b$  тоже называют неравенством.

## II. Сравнение чисел

При сравнении чисел составляют их разность и выясняют, какое число получается в ответе — положительное, отрицательное или нуль.

**Определение 5.** Число  $a$  называется бóльшим числа  $b$ , если разность чисел  $a - b$  положительное число:  $a > b$ , если  $a - b > 0$ , и наоборот, если  $a - b < 0$ , то  $a < b$ .

Например:

1.  $15 > 10$ , так как  $15 - 10 = 5$ ;  $5 > 0$

2.  $20 - 18 = 2$ ,  $2 > 0$ ; следовательно,  $20 > 18$

**Определение 6.** Число  $a$  меньше числа  $b$ , если разность  $a - b$  отрицательное число:  $a < b$ , если  $a - b < 0$ , и наоборот, если  $a - b > 0$ , то  $a > b$ .

Если разность  $a - b = 0$ , то  $a = b$ .

Например:

1.  $7 < 12$ , так как  $7 - 12 = -5$ ,  $-5 < 0$

2.  $9 - 10 = -1$ ,  $-1 < 0$ , то  $9 < 10$

3.  $11 - 11 = 0$ , то  $11 = 11$

4. Сравните числа  $a$  и  $b$ , если а)  $a - b = -1$ ; б)  $a - b = 0$ ; в)  $a - b = 8$ .



Решение.

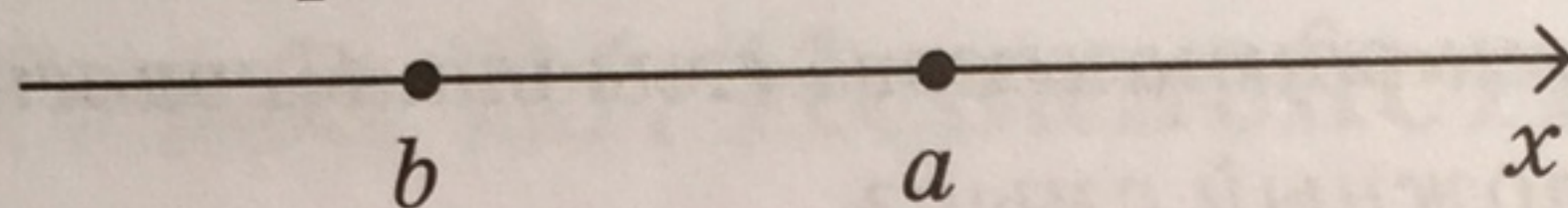
а)  $a < b$       $-1 < 0$

б)  $a = b$       $0$

в)  $a > b$       $8 > 0$

Если  $a - b < 0$ , то  $a < b$ Если  $a - b = 0$ , то  $a = b$ Если  $a - b > 0$ , то  $a > b$ 

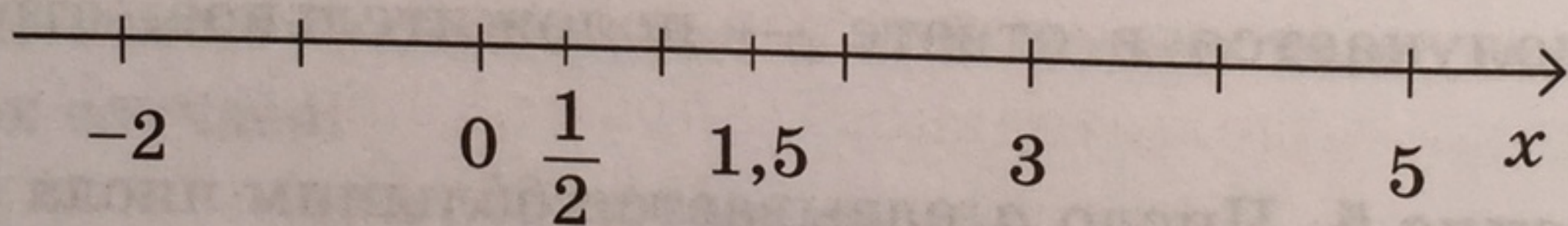
## Сравнение чисел на оси



На числовой оси большее число изображается точкой, стоящей правее точки, изображающей меньшее число:  $a > b$ , значит, точка с координатой  $a$  лежит правее точки с координатой  $b$ , а если  $a < b$ , то левее.

Все отрицательные числа расположены левее нуля, а положительные — правее нуля; все положительные числа больше нуля и отрицательных чисел.

Например:  $\frac{1}{2} > 0$ ;  $2 > 1,5$ ;  $3 < 5$ ;  $0 > -2$



## Алгоритм

24

## Сравнение двух выражений

1. Составьте разность двух выражений и упростите (раскройте скобки, приведите подобные слагаемые).
2. Определите знак полученной разности: если разность больше нуля, то первое выражение больше второго; если разность меньше нуля, то первое выражение меньше второго; если знак установить нельзя при всех значениях букв, входящих в разность, то нельзя утверждать, что одно из выражений больше другого при любых значениях букв.



## Примеры

1. Даны выражения:  $4b(b+1)$  (I) и  $(2b+7)(2b-8)$  (II).
- 1). Сравните значения выражений при  $b = -2$ ;  $b = 10$ .
  - 2). Можно ли утверждать, что при любом значении  $b$  значение первого выражения больше, чем значение второго?

Решение.

I. 1). Если  $b = -2$ , то  $4 \cdot (-2)(-2+1) = -8 \cdot (-1) = 8$  (I)

2).  $(2 \cdot (-2) + 7)(2 \cdot (-2) - 8) = 3 \cdot (-12) = -36$  (II)

3).  $8 - (-36) = 44$ ;  $44 > 0$

II. 1). Если  $b = 10$ , то  $4 \cdot 10 \cdot (10+1) = 40 \cdot 11 = 440$  (I)

2).  $(2 \cdot 10 + 7)(2 \cdot 10 - 8) = 27 \cdot 12 = 324$  (II)

3).  $440 - 324 = 116$ ;  $116 > 0$

В обоих случаях значение первого выражения больше значения второго.

III. Найдем разность первого и второго выражений (I)–(II):

$$4b(b+1) - (2b+7)(2b-8) = (4b^2 + 4b) - (4b^2 - 2b - 56) = \\ = 4b^2 + 4b - 4b^2 + 2b + 56 = 6b + 56$$

Разность (I) и (II) выражений равна  $6b + 56$ . Это выражение не при всех значениях  $b$  положительно. Например, при  $b = -10, -11, -12...$  значение выражения отрицательно. Поэтому нельзя утверждать, что при всех значениях  $b$  значение (I) выражения больше значений (II) выражения.

2. Верно ли неравенство  $(3x+8)^2 > 3x(x+16)$  при любом значении  $x$ ?

Решение.

- 1). Преобразуем выражения, стоящие в левой и правой частях неравенства:

$$(3x+8)^2 > 3x(x+16) \quad (\text{I})$$

$$(3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 8 + 64 > 3x^2 + 48x$$

$$9x^2 + 48x + 64 > 3x^2 + 48x \quad (\text{II})$$

- 2). Составим разность:

$$(3x+8)^2 - 3x(x+16) =$$

$$= 9x^2 + 48x + 64 - (3x^2 + 48x) =$$

$$= 9x^2 + 48x + 64 - 3x^2 - 48x = 6x^2 + 64 \quad (\text{III})$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

если  $a - b > 0$ ,

то  $a > b$



3).  $6x^2 + 64 > 0$  при всех значениях  $x$ , так как  $x^2 \geq 0$  при любых значениях  $x$ ; значит, неравенство (III) верно при любых значениях  $x$ , значит, и неравенство (I) верное.

Ответ: неравенство верно.

3. Докажите, что  $a + \frac{1}{a} \geq 2$ ,  $a > 0$ .

Доказательство.

Составим разность и упростим:

$$a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{a^2 - 2a + 1}{a} = \frac{(a-1)^2}{a} \geq 0,$$

что и требовалось доказать

если  $a - b \geq 0$ , то  $a \geq b$

$a > 0$  — по условию;

$(a-1)^2 > 0$ ,

при  $a = 1$  получаем нуль

## Проверь себя!

Сравните числа  $x$  и  $y$ , если разность  $x - y$  равна: 1).  $-3$ ; 2).  $5$ ; 3).  $0$ .

Ответ: 1).  $x < y$ ; 2).  $x > y$ ; 3).  $x = y$ .

Попробуй-ка реши!

Что больше:  $a^3 + b^3$  или  $ab(a+b)$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $a \neq b$ ?

Ответ:  $a^3 + b^3 > ab(a+b)$ .

## Свойства числовых неравенств

1.	Если $a > b$ , то $b < a$	$5 > 1$ , то $1 < 5$ (неравенство можно читать слева направо и справа налево)
2.	Если $a > b$ и $b > c$ , то $a > c$	$8 > 5$ и $5 > 3$ , то $8 > 3$
3.	Если $a > b$ и $c$ — любое число, то $a + c > b + c$	$-6 < -2 \mid +6$ , то $-6 + 6 < -2 + 6$ ; $0 < 0$ — верно Знак неравенства сохраняется!
4.	Если $a + c > b$ , то $a > b - c$	$4 + 3 > 5$ , то $4 > 5 - 3$ ; $4 > 2$ — верно Знак $c$ меняется, знак неравенства сохраняется!
5.	Если $a > b$ и $c > 0$ , то $ac > bc$ и $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$	1. $12 > 10 \mid \cdot 2$ ; $c = 2$ , $24 > 20$ — верно 2. $-8 < -6 \mid : 2$ ; $c = 2$ , $-4 < -3$ — верно Знак неравенства сохраняется!



6.	Если $a > b$ и $c < 0$ , то $ac < bc$ и $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$	$20 > 18 \mid \cdot (-3); c = -3; -60 < -54$ — верно $20 > 18 \mid : (-2); c = -2; -10 < -9$ — верно Знак неравенства меняется!
7.	Если $a > b > 0$ и $c > d > 0$ , то неравенства можно перемножить $ac > bd$	$a < 3,3; b < 5,2; ab < 3,3 \cdot 5,2;$ $ab < 17,16$ — верно Знак в ответе сохраняется!
8.	Если неравенства одного знака, то их можно сложить: $\begin{array}{r} a > b \\ + \\ c > d \\ \hline a + c > b + d \end{array}$	$\begin{array}{r} -3,2 < -0,5 \\ + \\ -6,2 < -2,5 \\ \hline -9,4 < -3 \end{array}$ Знак неравенства сохраняется!
9.	Если неравенства разного знака, то их можно вычесть: $\begin{array}{r} a > b \\ - \\ c < d \\ \hline a - c > b - d \end{array}$	$\begin{array}{r} 4,5 > 3,7 \\ - \\ -1,3 < 0,5 \\ \hline 5,8 > 3,2 \end{array}$ — верно Знак в ответе как в уменьшаемом
10.	Если $a > b > 0$ , то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ Если $a < b < 0$ , то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	$5 > 3$ , то $\frac{1}{5} < \frac{1}{3}$ $-3 < -2$ , то $-\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$ Знак неравенства меняется на противоположный
11.	Если $a > b > 0$ , то $a^n > b^n$ и $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$	$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ , то $\left(\frac{1}{2}\right)^n > \left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\frac{1}{25} > \frac{1}{81}$ , то $\sqrt{\frac{1}{25}} > \sqrt{\frac{1}{81}}; \frac{1}{5} > \frac{1}{9}$ Знак неравенства в ответе сохраняется!



## Замечательные неравенства

1.	$ a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n  \leq$ $\leq  a_1  +  a_2  +  a_3  + \dots +  a_n $	$ 2 - 3 + 5 - 7  <  2  +  -3  +  5  +  -7 ;$ $3 < 17$
2.	$\sqrt{a_1 \cdot a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}, a_1 \geq 0; a_2 \geq 0$ Свойство верно для любого количества $a_n$ $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ $\sqrt{a_1 \cdot a_2}$ — среднее геометрическое двух чисел $\frac{a_1 + a_2}{2}$ — среднее арифметическое двух чисел Если $a_1 = a_2$ , то $\sqrt{a_1 \cdot a_2} = \frac{a_1 + a_2}{2}$	$\sqrt{4 \cdot 9} < \frac{4+9}{2}; 6 < \frac{13}{2}$ — верно $\sqrt[4]{4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25} \leq \frac{4+9+16+25}{4};$ $\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \leq 13,5;$ $\sqrt{120} \approx 11; 11 \leq 13,5$
3.	$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, a > 0, b > 0$ Если $a = b$ , то $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$	$\frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{9+16}{12} = \frac{25}{12} = 2\frac{1}{12};$ $2\frac{1}{12} > 2$
4.	Если $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$ , то: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ $n = 2, 3, \dots$	$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \geq \frac{4}{a_1 + a_2};$ $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \geq \frac{9}{a_1 + a_2 + a_3}$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \geq \frac{4}{2+3}; \frac{5}{6} \geq \frac{4}{5}$ — верно $(n = 2, n^2 = 4)$ $\frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} \geq \frac{9}{9+12+18};$ $\frac{9}{36} \geq \frac{9}{39}$ — верно $(n = 3, n^2 = 9)$
5.	$(1+\alpha)^p > 1+p \cdot \alpha, 0 < \alpha < 1,$ $p = 2, 3, \dots, n$	$(1+0,1)^5 > 1+5 \cdot 0,1;$ $1+0,5 = 1,5; (1+0,1)^5 > 1,5$



## Алгоритм

25

## Решение числовых неравенств

1. Определите по заданному неравенству свойство (1–11) и запишите его за чертой справа.
2. Примените записанное свойство к неравенству.
3. Запишите ответ.

## Примеры

1. Сложите почленно неравенства  $-3,1 < -0,5$  и  $-6,3 < -3,5$ .

Решение.

$$\begin{array}{r} + -3,1 < -0,5 \\ + -6,3 < -3,5 \\ \hline -9,4 < -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + a < b \\ + c < d \\ \hline a + c < b + d \quad (\text{знак сохраняется}) \end{array}$$

2. Известно, что  $x < y$ . Подставьте вместо \* знак  $>$  или  $<$  так, чтобы получить верное неравенство.

$$1. -5,7x * -5,7y$$

$$2. \frac{x}{5} * \frac{y}{5}$$

Решение.

$$1). \text{ Если } x < y, \text{ то } x < y \mid \cdot (-5,7) < 0, \\ \text{получим } -5,7x > -5,7y$$

$$a < b \mid \cdot c < 0, \\ \text{то } ac > bc \text{ — по условию}$$

$$2). \text{ Если } x < y, \text{ то } x < y \mid : 5 > 0,$$

$$\text{получим } \frac{x}{5} < \frac{y}{5}$$

$$a < b \mid : c > 0, \text{ то } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

Ответ: 1). знак  $>$ ; 2). знак  $<$ .

## Алгоритм

26

## Сложение и умножение двойных неравенств

Сложение

$$\begin{array}{l} a < x < b \\ c < y < d \end{array}$$

Умножение

$$\begin{array}{l} a < x < b, a, b > 0 \\ c < y < d, c, d > 0 \end{array}$$



Сложите левые части неравенств (8-е свойство):  $a + c < x + y$ .

Сложите правые части неравенств (8-е свойство):  $x + y < b + d$ .

Запишите двойное неравенство:  $a + c < x + y < b + d$ .

Умножьте левые части неравенств (7-е свойство):  $ac < xy$ .

Умножьте правые части неравенств (7-е свойство):  $xy < bd$ .

Запишите двойное неравенство:  $ac < xy < bd$ .

**З а м е ч а н и е.** Операции слева и справа выполняем под чертой. Например:

$$\begin{array}{r} + \quad 3 < x < 5 \\ \quad -1 < y < -2 \\ \hline 3 - 1 < x + y < 5 - 2 \\ 2 < x + y < 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times \quad 2 < x < 4 \\ \quad 3 < y < 5 \\ \hline 6 < xy < 20 \end{array}$$

### Примеры

1. Известны границы длины  $a$  и ширины  $b$  (в метрах) комнаты прямоугольной формы  $7,5 \leq a \leq 7,6$  и  $5,4 \leq b \leq 5,5$ . Подойдет ли это помещение для библиотеки, для которой требуется комната площадью не менее  $40 \text{ м}^2$ ?

*Решение.*

$$S = a \cdot b$$

$$\begin{array}{r} \times \quad 7,5 \leq a \leq 7,6 \\ \quad 5,4 \leq b \leq 5,5 \end{array}$$

$$7,5 \cdot 5,4 \leq a \cdot b \leq 7,6 \cdot 5,5$$

$$40,5 \leq S \leq 41,8$$

$$S > 40 \text{ м}^2$$

$$\begin{array}{r} \times \quad a \geq b \\ \quad c \geq d \\ \hline ac \geq bd \end{array} \quad \begin{array}{r} \times \quad a \leq b \\ \quad c \leq d \\ \hline ac \leq bd \end{array}$$

$$a, b, c, d > 0$$

*Ответ:* помещение с размерами  $a$  и  $b$  подойдет для библиотеки.

2. Пусть  $5 < x < 6$  и  $7 < y < 8$ . Оцените сумму  $(x + y)$  и произведение  $(xy)$ .

*Решение.*

$$\begin{array}{r} 1). \quad + \quad 5 < x < 6 \\ \quad 7 < y < 8 \\ \hline 5 + 7 < x + y < 6 + 8 \\ 12 < x + y < 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + \quad a > b \\ \quad c > d \\ \hline a + c > b + d \end{array} \quad \begin{array}{r} + \quad a < b \\ \quad c < d \\ \hline a + c < b + d \end{array} \quad (8\text{-е свойство})$$



$$2). \quad \begin{array}{l} \times 5 < x < 6 \\ 7 < y < 8 \end{array}$$

$$\hline 5 \cdot 7 < xy < 6 \cdot 8$$

$$35 < xy < 48$$

$$\times \begin{array}{l} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{array}$$

$$\hline a \cdot c > b \cdot d$$

$$\times \begin{array}{l} a < b \\ c < d \end{array}$$

$$\hline ac < bd$$

(7-е свойство)

Ответ:  $12 < x + y < 14$ ;  $35 < xy < 48$ .

## Алгоритм

27

## Вычитание двойных неравенств

**I способ.** Назовем двойное неравенство, из которого будем вычитать, — уменьшаемое  $a < x < b$ , а неравенство, которое будем вычитать, — вычитаемое  $c < y < d$ .

1. Умножьте все члены вычитаемого неравенства на  $(-1)$ , поменяв знаки неравенства на противоположные:

$$c < y < d \mid \cdot (-1); -c > -y > -d \text{ или } -d < -y < -c \text{ (1-е свойство)}$$

2. Сложите почленно левые и правые части полученных неравенств:

$$+ \begin{array}{l} a < x < b \\ -d < -y < -c \end{array}$$

$$\hline a - d < x - y < b - c$$

## Примеры

Найдите разность  $y - x$ , если  $5 < x < 6$  и  $7 < y < 8$ .

Решение.

- 1). Запишем  $5 < x < 6 \mid \cdot (-1)$ , то  $-5 > -x > -6 \mid a < b \mid \cdot (-1)$ , то  $-a > -b$

$$2). \quad \begin{array}{l} + 7 < y < 8 \\ -6 < -x < -5 \end{array}$$

$$\hline 7 + (-6) < y - x < 8 + (-5)$$

$$\text{получим } 1 < y - x < 3$$

## II способ

1. Запишите неравенство, вычитаемое в обратном порядке:  $a < x < b$ ; запишем как  $b > x > a$  (1-е свойство).
2. Вычтем почленно левые и правые части неравенств, получим знак неравенства уменьшаемого (9-е свойство).



## Примеры

$$7 < y < 8$$

$$6 > x > 5$$

$$7 - 6 < y - x < 8 - 5$$

получим  $1 < y - x < 3$

## Алгоритм

28

## Деление двойных неравенств

Назовем неравенство, которое делим, делимым, а неравенство, на которое делим, делителем.

1. Запишите неравенство-делитель в виде  $\frac{1}{x}$ . Пусть  $a < x < b$ ;  $a, b > 0$ , тогда

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$$

Если  $a > b$ , то  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$  (10-е свойство)

Представьте  $\frac{y}{x} = y \cdot \frac{1}{x}$  и найдите произведение.

## Примеры

Даны неравенства  $5 < x < 6$  и  $7 < y < 8$ . Найдите  $\frac{y}{x}$ .  
Решение.

1). Найдите  $\frac{1}{x}$ :

$$5 < x < 6, \text{ то } \frac{1}{6} < \frac{1}{x} < \frac{1}{5}$$

$$\begin{array}{l} \text{Если } x > 5, \text{ то } \frac{1}{x} < \frac{1}{5}; \\ \frac{y}{x} < y \cdot \frac{1}{x} \end{array} \quad \begin{array}{l} a > b, \\ \text{то } \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \end{array}$$

2). Найдите произведение:

$$y \cdot \frac{1}{x} = \frac{y}{x}$$

$$\text{Если } x < 6, \text{ то } \frac{1}{x} > \frac{1}{6}$$



$$\times \quad 7 < y < 8$$

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{x} < \frac{1}{5}$$

$$7 \cdot \frac{1}{6} < \frac{y}{x} < 8 \cdot \frac{1}{5}$$

получим  $\frac{7}{6} < \frac{y}{x} < \frac{8}{5}$

Ответ:  $\frac{7}{6} < \frac{y}{x} < \frac{8}{5}$ .

### Проверь себя!

Пользуясь тем, что  $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$  и  $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ , оцените:

1).  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ; 2).  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ; 3).  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ ; 4).  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$  с точностью до 0,01.

Ответ: 1).  $3,1 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3,3$ ; 2).  $0,2 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 0,4$ ;

3).  $2,38 < \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} < 2,7$ ; 4).  $1,13 < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} < 1,29$ .

### Алгоритм

### 29

### Доказательство числовых неравенств

Доказать неравенство — значит привести его к верному числовому неравенству.

1. Составьте разность левой и правой частей неравенства и преобразуйте выражение (раскройте скобки, приведите подобные слагаемые).
2. Сгруппируйте члены так, чтобы получить формулу  $(a + b)^2$ , или  $(a - b)^2$ , или члены  $a^2$ ,  $b^2$ , или такое выражение, знак которого определен.
3. Оцените знак полученного выражения и сделайте вывод, верное или неверное заданное неравенство.



## Примеры

1. Докажите, что при любом значении  $a$  верно неравенство  $10a^2 - 5a + 1 \geq a^2 + a$ .

*Доказательство.*

$$\begin{array}{l|l} 1). 10a^2 - 5a + 1 - a^2 - a = 9a^2 - 6a + 1 = (3a - 1)^2 & 9a^2 = (3a)^2; 1 = 1^2, \\ 2). (3a - 1)^2 \geq 0 \text{ — верно при любом } a, \text{ значит, и данное неравенство верно} & \text{получим формулу} \\ & (x - y)^2, x = 3a; y = 1 \end{array}$$

*Ответ:* неравенство верное.

2. Докажите неравенство выделением полного квадрата  $b^2 + 70 > 16b$ .

*Доказательство.*

$$\begin{array}{l|l} 1). \text{ Составим разность: } b^2 + 70 - 16b & b^2 - 2ab + a^2 = (b - a)^2 \\ 2). \text{ Выделим полный квадрат:} & b^2 - 16b + ? + 70 = \\ (b^2 - 16b + 64) + 6 = \underbrace{(b - 8)^2}_{\geq 0} + \underbrace{6}_{> 0} & = (b^2 - 16b + 64) - 64 + 70 = \\ & = (b - 8)^2 + 6; \\ & 16 : 2 = 8; 70 - 64 = 6 \end{array}$$

- 3).  $(b - 8)^2 > 0$ ;  $6 > 0$ , значит, сумма двух положительных чисел — число положительное. Получили очевидное числовое неравенство, а значит, и заданное неравенство верное.

*Ответ:* неравенство верное.

3. Докажите неравенство  $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$ .

*Доказательство.*

$$\begin{array}{l|l} 1). a^2 + b^2 + c^2 + 3 - (2a + 2b + 2c) = & 3 = 1 + 1 + 1; \\ = a^2 + b^2 + c^2 + 3 - 2a - 2b - 2c = & (a - 1)^2 \geq 0; \\ = (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + (c^2 - 2c + 1) = & (b - 1)^2 \geq 0; \\ = \underbrace{(a - 1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(b - 1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(c - 1)^2}_{\geq 0}; & (c - 1)^2 \geq 0 \end{array}$$

- 2).  $(a - 1)^2 \geq 0$ ;  $(b - 1)^2 \geq 0$ ;  $(c - 1)^2 \geq 0$ , значит,  
 $(a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 \geq 0$  — верное неравенство

*Ответ:* неравенство верное.

## Проверь себя!

Укажите свойства неравенств, которые надо применить, чтобы получить верные неравенства.



1.  $11 + 3 < 12 + 3$ , то  $11 < 12$

2.  $10 + 2 > 5$ , то  $10 > 5 - 2$

3.  $4 \cdot 5 > 3 \cdot 5$ , то  $4 > 3$

4.  $-6 < 9$ ;  $c = -3$ , то  $2 > -3$

5. 
$$\begin{array}{r} + \quad 8 > 5 \\ \quad 7 > 6 \\ \hline 15 > 11 \end{array}$$

6. 
$$\begin{array}{r} - \quad 15 > 12 \\ \quad 7 < 9 \\ \hline 8 > 3 \end{array}$$

7. 
$$\begin{array}{r} \times \quad 5 > 2 \\ \quad 12 > 3 \\ \hline 60 > 6 \end{array}$$

Ответ:

1).  $a + c < b + c$ , то  $a < b$ ; 2).  $a + c > b$ , то  $a > b - c$ ;

3).  $ab > bc \mid : b$ , то  $a > c$ ,  $b > 0$ ; 4).  $ab < bc \mid : b$ , то  $a > c$ , если  $b < 0$ ;

5). 
$$\begin{array}{r} + \quad a > b \\ \quad c > d \\ \hline a + c > b + d \end{array}$$

6). 
$$\begin{array}{r} - \quad a > b \\ \quad c < d \\ \hline a - c > b - d \end{array}$$

7). 
$$\begin{array}{r} \times \quad a > b > 0 \\ \quad c > d > 0 \\ \hline ac > bd \end{array}$$

**Попробуй не реши!**

1. Докажите, что  $(2a - 3b) \cdot b < 0$ , если  $a > 0$ ;  $b < 0$ .

2. Докажите неравенства при любых  $x$  и  $y$ .

1).  $x^2 - 2xy + 4y^2 \geq 0$  2).  $x^2 + 2y^2 + 2xy + 6y + 10 > 0$

**Попробуй-ка реши!**

Докажите.

1.  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

2.  $1 + a^9 \leq \frac{1}{a} + a^{10}$  при  $a > 0$

3.  $a^4 + 2b^4 + 2c^2 \geq 4b^2c$



## § 2. Неравенства с одной переменной

**Определение 1.** Неравенство, содержащее переменную, называют неравенством с переменной<sup>1</sup>.

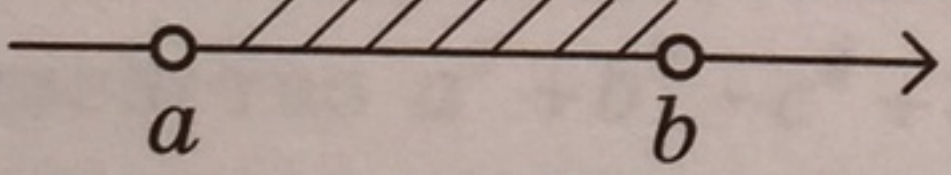
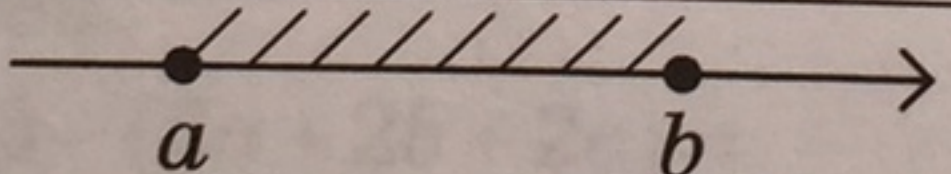
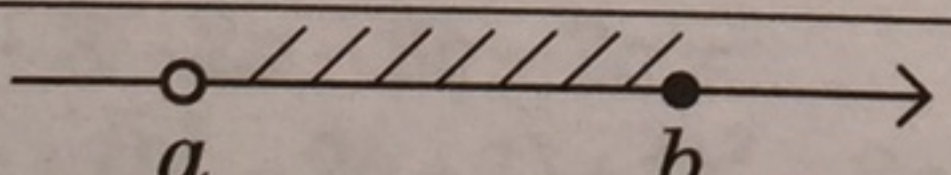
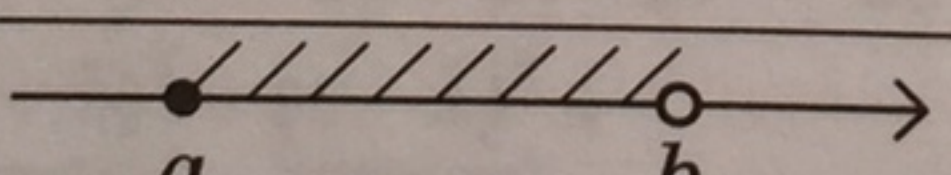
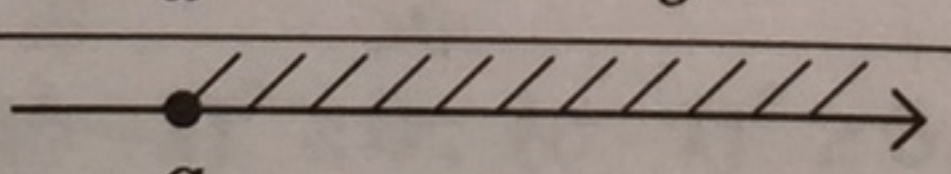
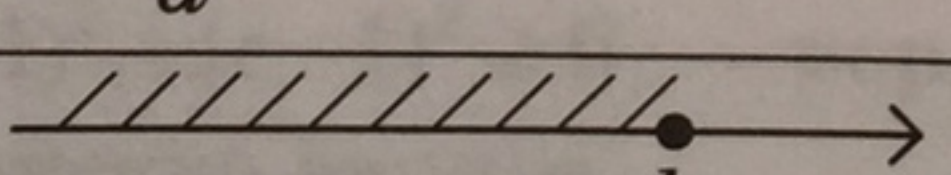
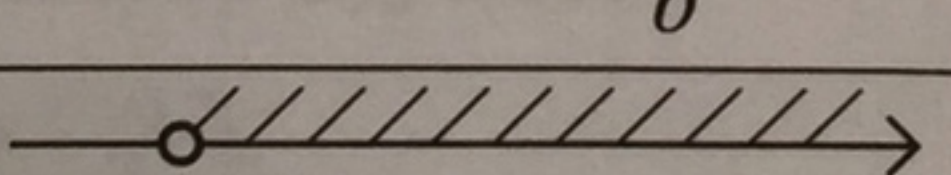
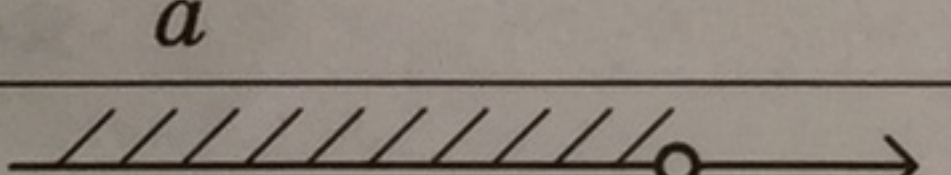
Например:  $2x > 3$ ;  $\frac{x-3}{x+1} \geq 0$ ;  $x^2 - 5x - 6 \leq 0$ ;  $x^2 > 1$  и т. д.

**Определение 2.** Решением неравенства с переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

Например, число 2 — решение неравенства  $2x > 3$ , так как  $4 > 3$ .

**Определение 3.** Решить неравенство с переменной — значит найти все значения переменной, при которых это неравенство будет верным (или убедиться, что таких значений переменной нет).

Решение неравенства записывают числовыми промежутками или числом.

Вид промежутка	Изображение решения на числовой оси	Решения, записанные промежутками	Неравенства
Интервал		$(a; b)$	$a < x < b$
Отрезок		$[a; b]$	$a \leq x \leq b$
Полуинтервал		$(a; b]$	$a < x \leq b$
Полуинтервал		$[a; b)$	$a \leq x < b$
Луч		$[a; +\infty)$	$x \geq a$
Луч		$(-\infty; b]$	$x \leq b$
Открытый луч		$(a; +\infty)$	$x > a$
Открытый луч		$(-\infty; b)$	$x < b$

<sup>1</sup> Неизвестное называют переменной.



Например, решение неравенства  $x \geq 3$  записывают числовым промежутком  $[3; +\infty)$ . В этой записи квадратной скобкой  $([$ ) включается в решение число 3; если  $x > 3$ , то пишут круглую скобку  $(3; +\infty)$ , которая число 3 исключает из решения. Читают промежуток  $(3; +\infty)$  так: промежуток чисел от 3 до плюс бесконечности, не включая число 3.

Изображают промежуток на координатной прямой штриховкой и само число плотной ( $\bullet$ ) или пустой ( $\circ$ ) точкой в зависимости от скобки. Если знак  $\geq$  или  $\leq$ , то точка плотная ( $\bullet$ ); если знак  $>$  или  $<$ , то точка пустая ( $\circ$ ). В таблице промежутков указаны все возможные случаи решения неравенств: промежутками, на оси и неравенствами. Если решением является множество всех чисел, то пишут  $(-\infty; +\infty)$  — вся координатная прямая.

### Пересечение и объединение промежутков решения неравенств

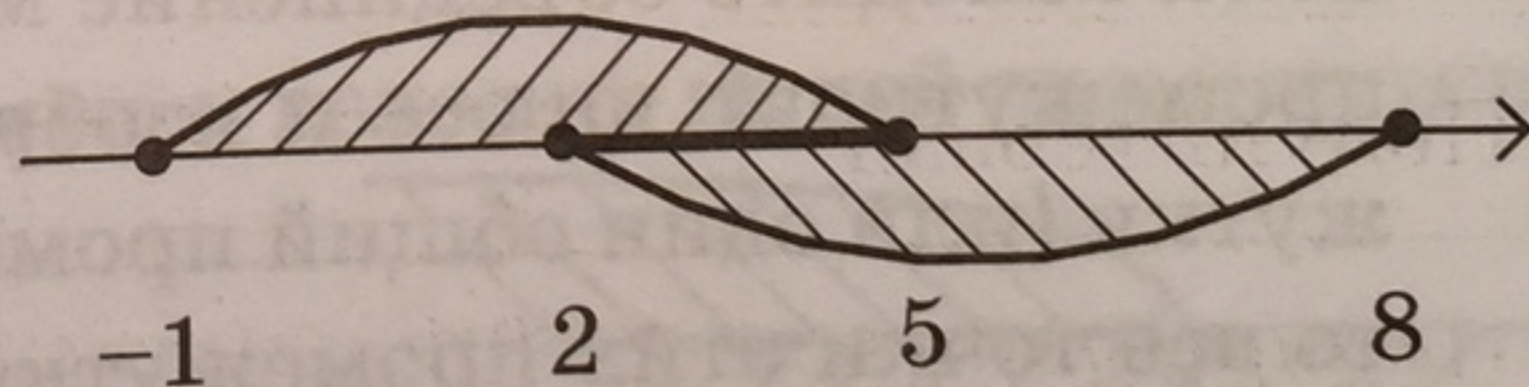
**Определение 1.** Множество  $C$ , составляющее общую часть множеств  $A$  и  $B$ , называют пересечением этих множеств и обозначают  $A \cap B = C$ .

Например, даны промежутки  $[-1; 5]$  и  $[2; 8]$ . Найти пересечение этих промежутков.

*Решение.*

Изобразите оба промежутка на одной оси (условно, не соблюдая масштаба).

$$[-1; 5] \cap [2; 8] = [2; 5]$$



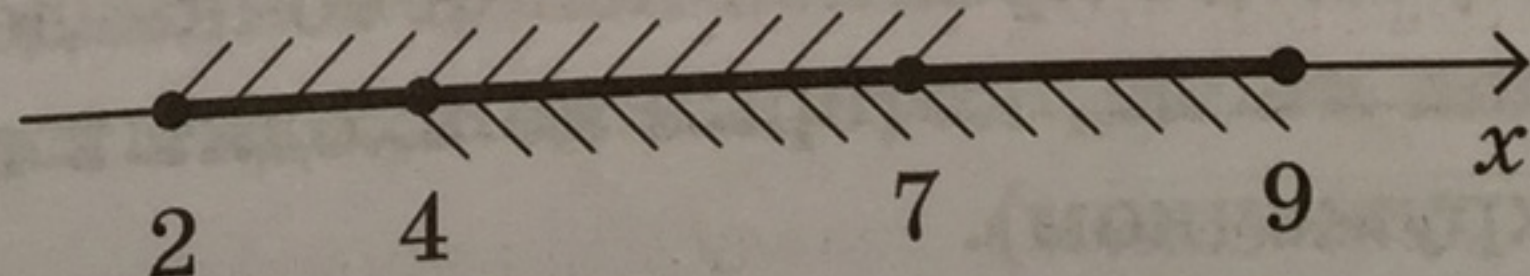
На оси отрезок, на котором штриховки пересекаются, изображает пересечение промежутков.

**Определение 2.** Множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств  $A$  и  $B$ , называют объединением этих множеств и обозначают  $A \cup B$ .

Например, даны промежутки  $[2; 7]$  и  $[4; 9]$ . Найти объединение этих промежутков.

*Решение.*

$$[2; 7] \cup [4; 9] = [2; 9]$$

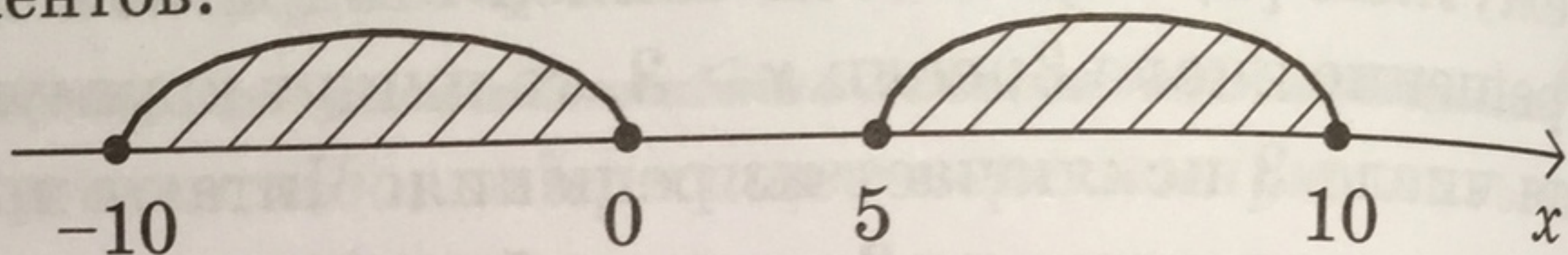




Объединение может состоять из нескольких промежутков, не имеющих общих элементов.

Например:

$$[-10; 0] \cup [5; 10]$$



Пересечение положительных и отрицательных чисел — пустое множество ( $\emptyset$ ), а объединение этих чисел и числа ноль есть все множество чисел  $(-\infty; +\infty)$ .

**З а м е ч а н и е.** Символ  $+\infty$  не имеет определенного числового значения, а обозначает бесконечность перечисления чисел.

### Алгоритм

30

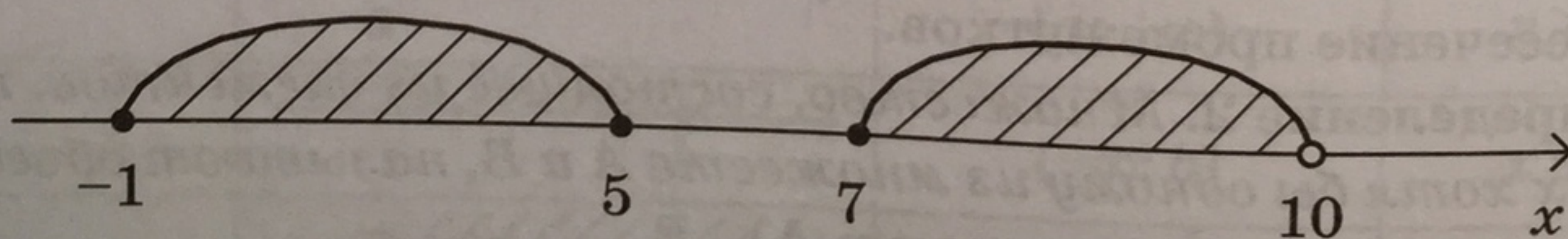
### Нахождение объединения и пересечения множеств

1. Изобразите координатную прямую и нанесите на ней точки — концы промежутков (( $\bullet$ ) — если знак  $\geq$  или  $\leq$ ; ( $\circ$ ) — если знак  $>$  или  $<$ ).
2. Изобразите дугами и штриховкой промежутки.
3. Если находите пересечение промежутков, то найдите общую часть оси, где промежутки имеют общие точки (штриховки пересекаются); иногда это может быть одна точка. Если общих точек нет, то пересечение пустое множество ( $\emptyset$ ).

Например:  $[0; 4] \cap [-2; 3) = [0; 3)$ ;  $(-1; 0) \cap (1; 2) = \emptyset$

4. Если находите объединение множеств, то нанесите точки (концы промежутков) на ось и изобразите штриховкой и дугами промежутки (или один общий промежуток). Если они не пересекаются, то все точки этих промежутков и будут объединением множеств.

Например:  $[-1; 5] \cup [7; 10)$



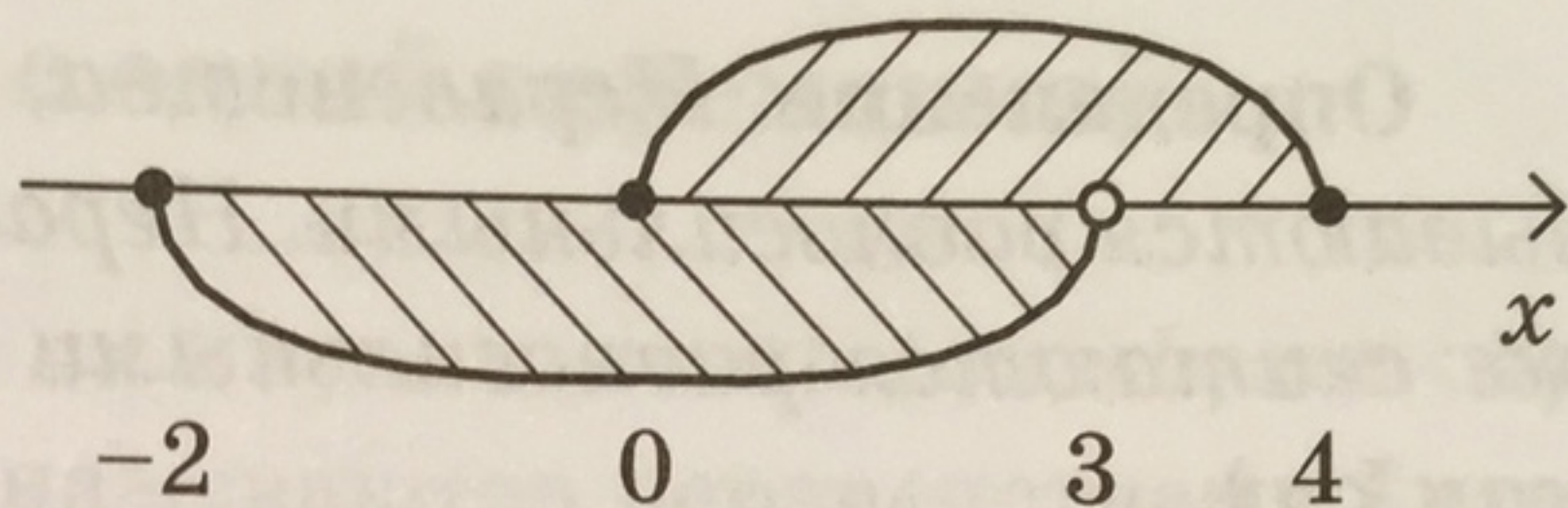
Если промежутки пересекаются, то объединением будет промежуток от крайней левой точки до крайней правой точки, исключая числа, которые не входят в промежуток (они обозначены ( $\circ$ ) кружочком).



Например:

$$[0; 4] \cup [-2; 3] = [-2; 3) \cup (3; 4]$$

(число 3 исключается)



5. Запишите ответ промежутками.

**З а м е ч а н и е.** Запись пересечения и объединения промежутков будет применяться в дальнейшем школьном курсе математики при нахождении ОДЗ и решении неравенств.

### Примеры

Используя координатную прямую, найдите пересечение и объединение промежутков.

1.  $(5; +\infty)$  и  $(7; +\infty)$

*Решение.*

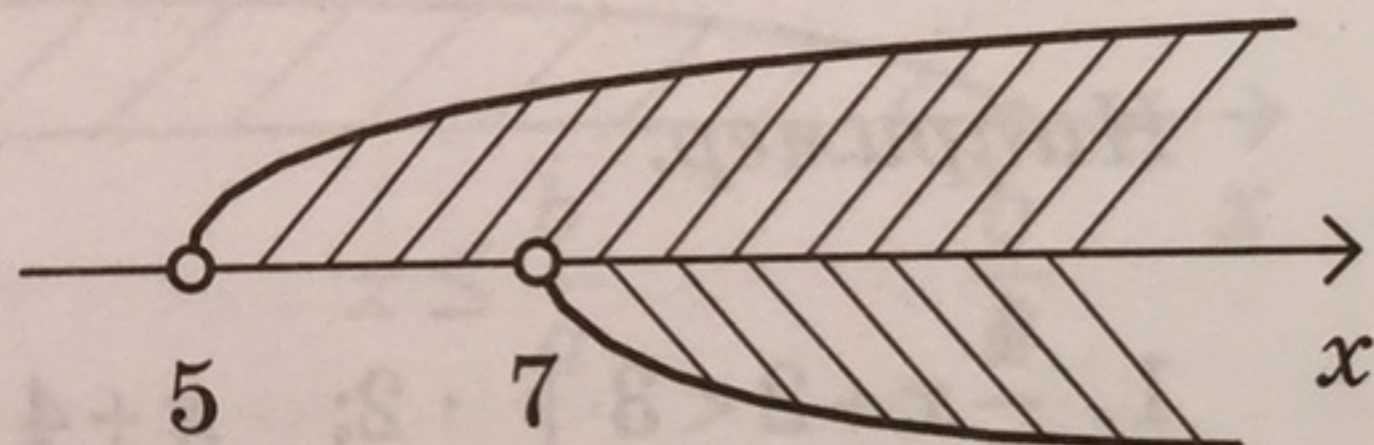
1). Изобразите координатную прямую и нанесите на ней промежутки.

2). Пересечение:

$$(5; +\infty) \cap (7; +\infty) = (7; +\infty)$$

3). Объединение:

$$(5; +\infty) \cup (7; +\infty) = (5; 7) \cup (7; +\infty)$$



2.  $(-\infty; 2)$  и  $[0; +\infty)$

*Решение.*

1). Изобразите координатную прямую и нанесите на ней промежутки.

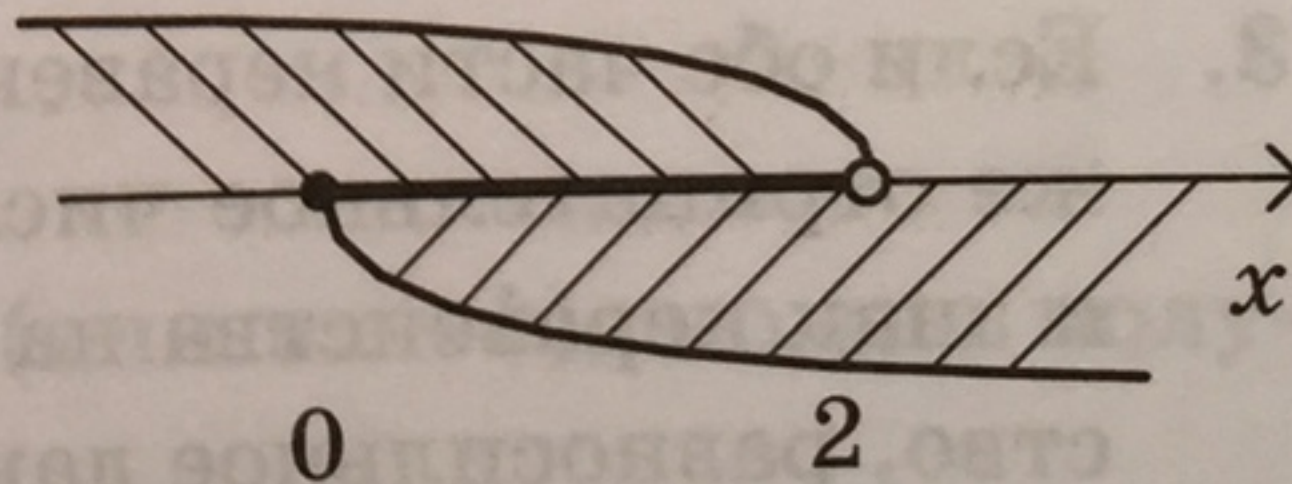
2). Пересечение:

$$(-\infty; 2) \cap [0; +\infty) = [0; 2)$$

3). Объединение:

$$(-\infty; 2) \cup [0; +\infty) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$$

Число 2 исключено из решения круглой скобкой.



### Равносильность неравенств

При решении неравенств с одной переменной мы переходим от сложных неравенств к более простым, применяя при этом определенные свойства.



**Определение.** Неравенства, имеющие одни и те же решения, называются равносильными. Неравенства, не имеющие решений, также считаются равносильными (равносильность изображают знаком  $\Leftrightarrow$ ).

### Свойства равносильности неравенств

1. Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится равносильное ему неравенство  $f(x) + c \leq g(x) \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) - c$ .

Например: если  $2x + 3 > 5$ , то  $2x > 5 - 3 \Leftrightarrow 2x > 2$

2. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится равносильное ему неравенство.

$$f(x) \geq g(x) \mid \cdot (c > 0); \quad f(x) \cdot c \geq g(x) \cdot c$$

$$f(x) \geq g(x) \mid : (c > 0); \quad \frac{f(x)}{c} \geq \frac{g(x)}{c}$$

Например:

$$1. \frac{1}{2}x + 2 < 3 \mid \cdot 2; \quad x + 4 < 6; \quad x < 6 - 4; \quad x < 2$$

$$2. 5x \geq 10 \mid : 5; \quad x \geq 2$$

3. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак каждого члена и знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.

$$f(x) > g(x) \mid \cdot (c < 0); \quad f(x) \cdot c < g(x) \cdot c$$

$$f(x) < g(x) \mid : (c < 0); \quad \frac{f(x)}{c} > \frac{g(x)}{c}$$

Например:

$$1. -4x > 8 \mid : (-4); \quad x < -2 \quad 2. -\frac{x}{3} < 2 \mid \cdot (-3); \quad x > -6$$



## Неравенства I степени с одной переменной

**Определение.** Неравенства вида  $ax \geq b$  или  $ax \leq b$  ( $ax > b$ ,  $ax < b$ ), где  $a$  и  $b$  — числа,  $x$  — переменная, называются неравенствами I степени с одной переменной.

### Алгоритм

31

### Решение неравенств $ax \geq b$

Приведите неравенство к виду  $ax \geq b$ :

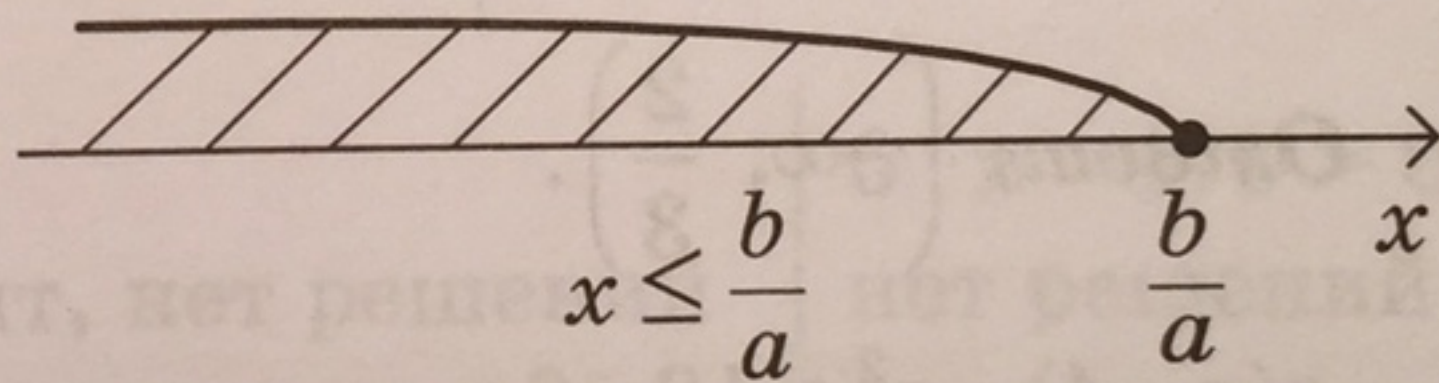
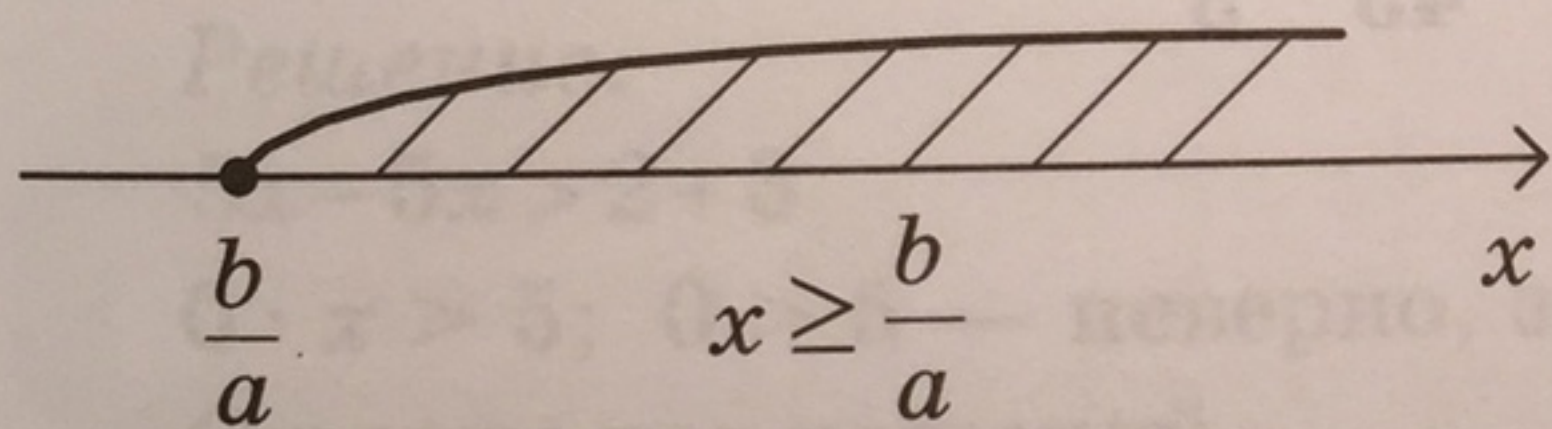
а) раскройте скобки;

б) перенесите члены, содержащие  $x$ , в одну часть, а числа — в другую часть неравенства (I свойство), изменив их знак на противоположный;

в) приведите подобные члены.

Найдите  $x$ , применив II или III свойство:  $ax \geq b \mid : a, x \geq \frac{b}{a}$ .

Изобразите решение на оси:



Запишите ответ неравенством  $x \geq \frac{b}{a}$  или  $x \leq \frac{b}{a}$  или промежутками

$$\left[ \frac{b}{a}; +\infty \right) \text{ или } \left( -\infty; \frac{b}{a} \right].$$

**Внимание!** Решая неравенство  $ax > b$  (или  $ax < b$ ), можно получить 3 случая:

1.  $x > \frac{b}{a}$  или  $x < \frac{b}{a}$ ,  $a \neq 0$

2.  $a = 0$  и  $b > 0$ , то неравенство  $0 \cdot x > b$  не имеет решений, а в неравенстве  $0 \cdot x < b$  решение  $x$  — любое действительное число.

3.  $a = 0$  и  $b < 0$ , то решение неравенства  $0 \cdot x > b$  будет  $x$  — любое число, а неравенство  $0 \cdot x < b$  не имеет решений.

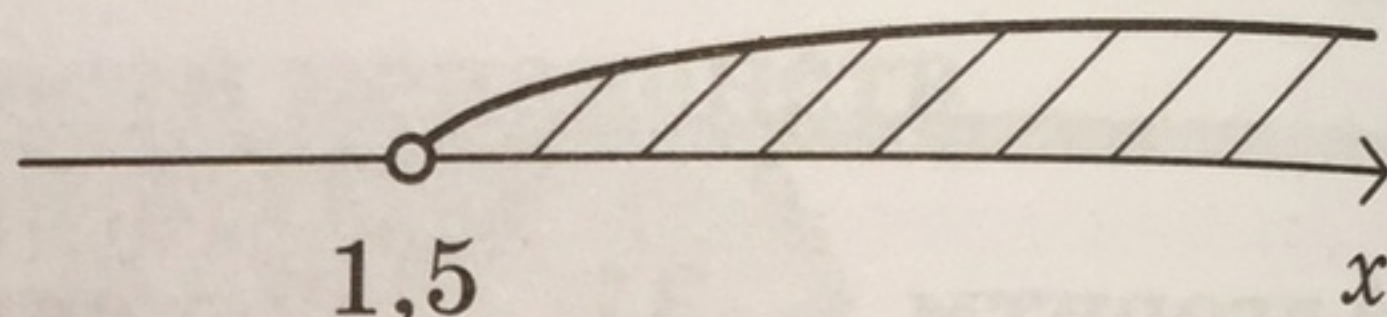


## Примеры

Решите неравенства (1–4).

1.  $2x - 3 > 0$

$$\begin{array}{l|l} 2x > 3 & :2 \\ \hline x > 1,5 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} ax + b > c; & ax > c - b \\ \hline ax > b & :a; \quad x > \frac{b}{a} \end{array}$$



Ответ:  $(1,5; +\infty)$ .

2. При каких значениях  $p$  значение двучлена  $3p + 2$  меньше значений двучлена  $5 - 1,5p$ ?

Решение.

- 1). Запишите условие примера неравенством:  $3p + 2 < 5 - 1,5p$ .

2).  $3p + 1,5p < 5 - 2$

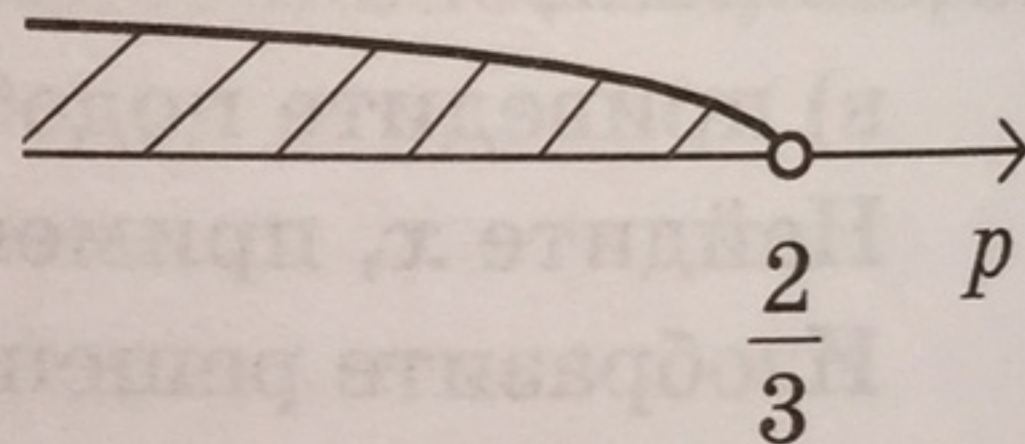
$4,5p < 3 \quad | :4,5$

$p < \frac{3}{4,5}; \quad p < \frac{2}{3}$

$ax + c > b; \quad ax < b - c$

$ax < b \quad | : (a > 0); \quad x < \frac{b}{a}$

$3 : 4,5 = 30 : 45 = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$



Ответ:  $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$ .

3.  $a(a - 4) - a^2 > 12 - 6a$

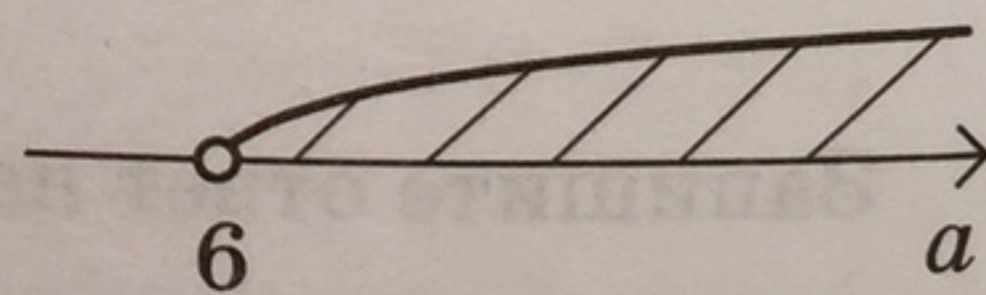
$a^2 - 4a - a^2 + 6a > 12$

$2a > 12 \quad | :2$

$a > 6$

$ax + b > c; \quad ax > c - b$

$ax > b \quad | : a > 0; \quad x > \frac{b}{a}$



Ответ:  $(6; +\infty)$ .

4. Решите неравенство  $\frac{3x-1}{4} > 2$  и найдите наименьшее целое число,

удовлетворяющее неравенству.

Решение.

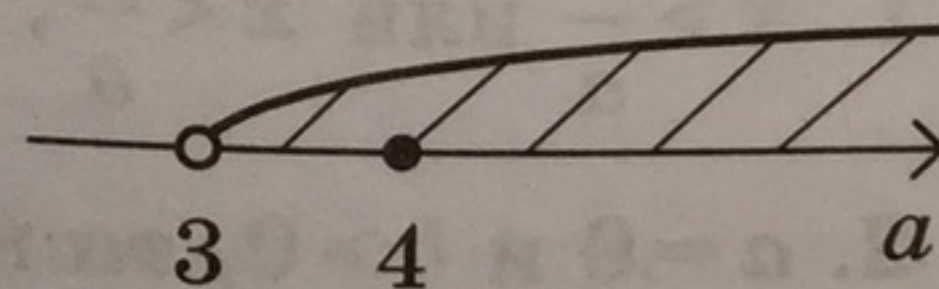
$\frac{3x-1}{4} > 2 \quad | \cdot 4$

$3x - 1 > 8$

$3x > 8 + 1; \quad 3x > 9 \quad | :3$

$\frac{x}{a} > b \quad | \cdot a > 0$

$x > ab$



$x > 3$ , наименьшее целое число 4, число 3 не входит в решение

Ответ: 4.



**Полезный совет.** Члены неравенства, содержащие  $x$ , удобно переносить в ту часть неравенства, где получим  $ax$  при  $a > 0$ . Меньшая возможность сделать ошибку, легче делить на  $a > 0$ .

5. ГИА. При каких значениях  $x$  значение выражения  $10 - 8x$  больше значений выражения  $2x + 18$ ?

*Решение.*

- 1). Составьте неравенство  $10 - 8x > 2x + 18$  и найдите  $x$ .

2).  $10 - 18 > 2x + 8x$

$-8 > 10x$

$10x < -8 \quad | :10$

$x < -0,8$

или так:

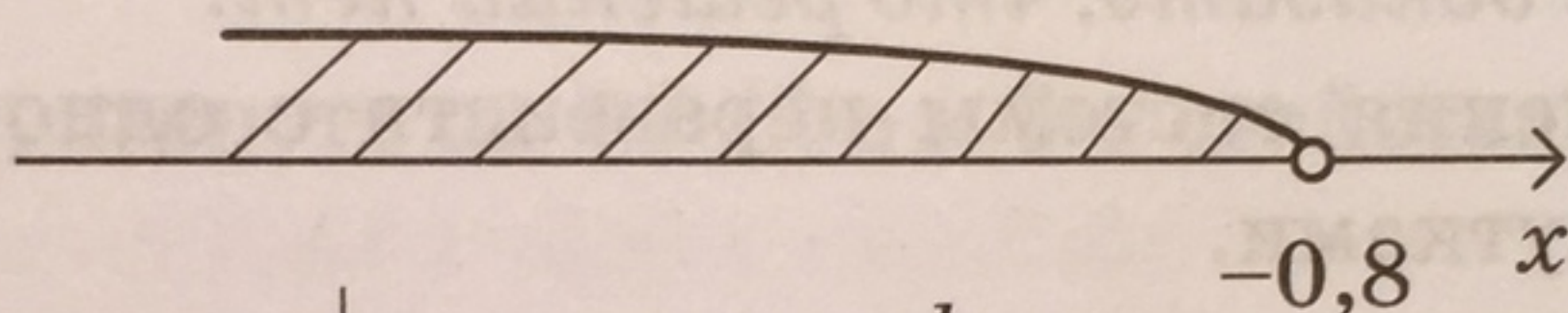
$-8x - 2x > 18 - 10$

$-10x > 8 \quad | :(-10)$

$x < -0,8$

$$ax < b \quad | :a > 0; \quad x < \frac{b}{a}$$

Если  $a > b$ , то  $b < a$



$$ax > b \quad | :(-a); \quad x < \frac{b}{-a}$$

*Ответ:* при  $x < -0,8$  значения выражения  $10 - 8x$  больше значений выражения  $2x + 18$ .

6.  $5x - 3 > 5x + 2$

*Решение.*

$5x - 5x > 2 + 3$

$0 \cdot x > 5; 0 > 5$  — неверно, значит, нет решений

$0 \cdot x > b, b > 0$

нет решений

*Ответ:* нет решений.

7.  $2x + 3 > 2x - 3$

*Решение.*

$2x - 2x > -3 - 3$

$0 \cdot x > -6; 0 > -6$  — при любом  $x$

$0 \cdot x > -b, x$  — любое число

*Ответ:*  $(-\infty; +\infty)$ .

**Попробуй не реши!**

1. ГИА. Решите неравенство  $5(x + 2) < x - 2(5 - x)$ .

2. ГИА. При каких значениях  $x$  значение выражения  $-2x + 13$  меньше значения выражения  $3x - 2$ ?

*Ответ:* 1).  $(-\infty; -10)$ ; 2).  $(3; +\infty)$ .

**Попробуй-ка реши!**

Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$(x + 4)^2 - (x - 10)^2 \leq 140$ .

*Ответ:* 8.



### § 3.

## Системы неравенств с одной переменной

**Определение 1.** Системой линейных неравенств с одной переменной называется совокупность нескольких неравенств, в которых переменная одна и та же.

**Определение 2.** Решением системы неравенств с одной переменной называются те значения переменной, при которых все неравенства системы обращаются в верные числовые неравенства.

**Определение 3.** Решить систему — значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

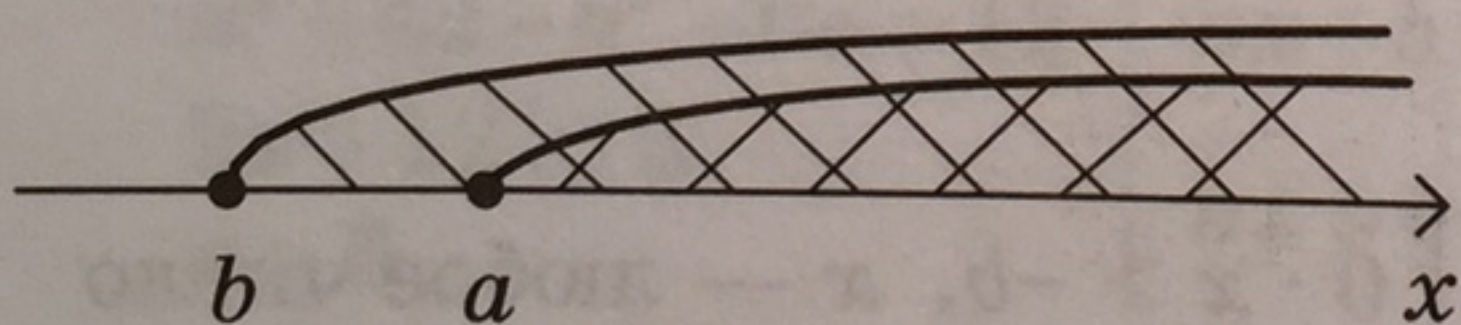
Решения системы неравенств с одной переменной записывают промежутками.

Решение систем неравенств сводится к решению простейших систем неравенств преобразованиями с применением свойств.

### Схема решения систем неравенств с одной переменной

Пусть  $a > b$  во всех системах.

$$\text{I. } \begin{cases} x \geq a \\ x \geq b \\ a > b \end{cases} \\ \hline x \geq a$$

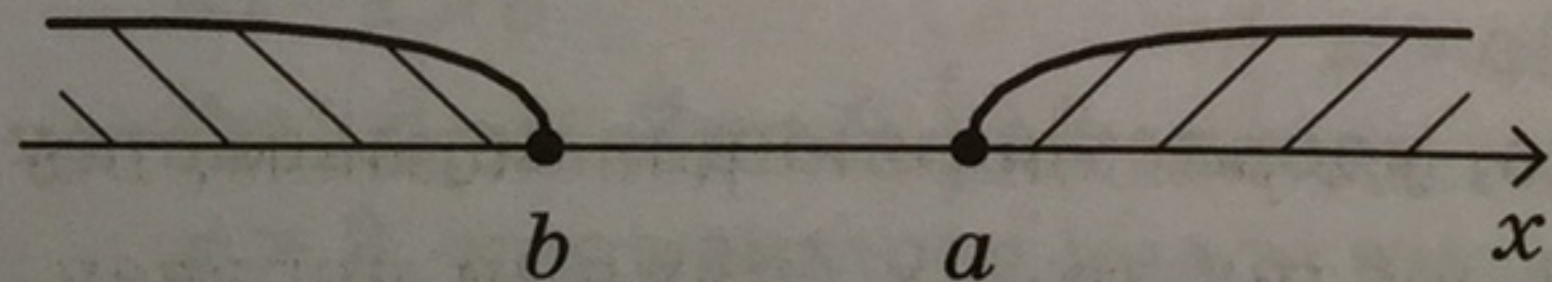


Ответ:  $x \geq a$  или  $[a; +\infty)$ .

**З а м е ч а н и е.** В системе (I) выбираем ответ больше большего числа, а в системе (II) — меньше меньшего числа.

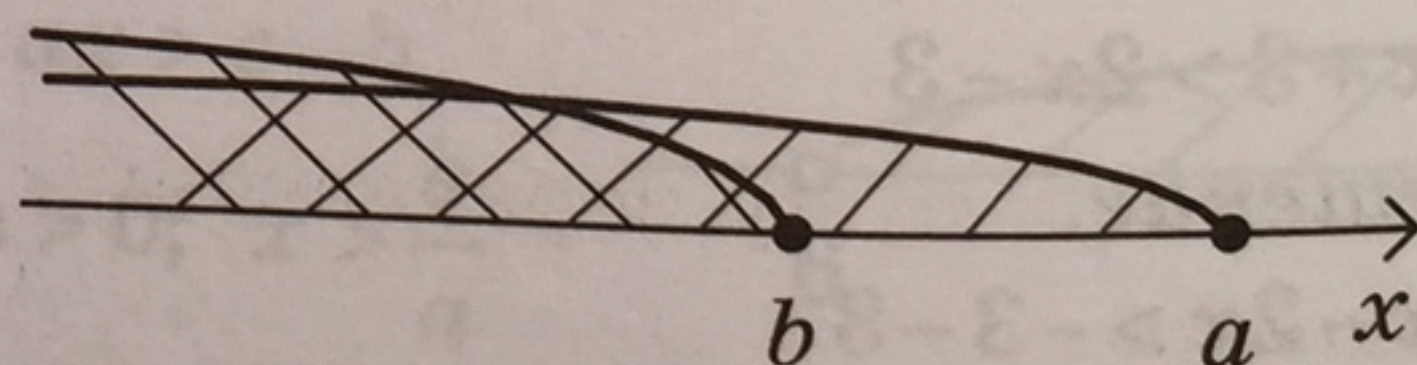
$$\text{III. } \begin{cases} x \geq a \\ x \leq b \\ a > b \end{cases}$$

нет решений



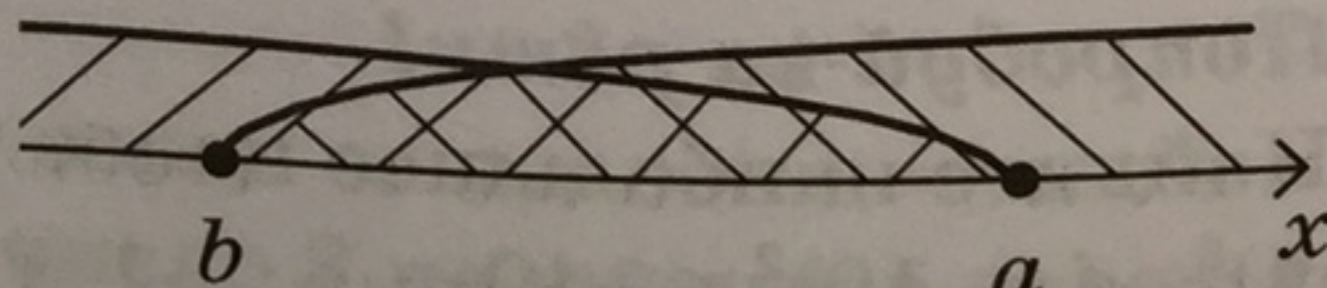
Ответ: нет решений.

$$\text{II. } \begin{cases} x \leq a \\ x \leq b \\ a > b \end{cases} \\ \hline x \leq b$$



Ответ:  $x \leq b$  или  $(-\infty; b]$ .

$$\text{IV. } \begin{cases} x \leq a \\ x \geq b \\ a > b \end{cases} \\ \hline b \leq x \leq a$$



Ответ:  $b \leq x \leq a$  или  $[b; a]$ .



**З а м е ч а н и е.** Если неравенства системы строгие, то на оси изображайте  $a$  и  $b$  пустым кружочком ( $\circ$ ) и в ответе пишите круглую скобку.

**Алгоритм****32****Решение систем неравенств с одной переменной**

1. Приведите каждое неравенство системы к виду  $ax \geq b$ : раскройте скобки, перенесите члены, содержащие  $x$ , влево, числа — вправо по первому свойству.
2. Приведите систему неравенств к одному из случаев схемы, раз-

делив на  $a$  обе части неравенств  $ax \geq b$  (2-е и 3-е свойства):  $\begin{cases} x \geq a \\ x \geq b \end{cases}$

или  $\begin{cases} x \geq a \\ x \leq b \end{cases}$  или  $\begin{cases} x \leq a \\ x \leq b \end{cases}$  и т. д.

Изобразите решение каждого неравенства на одной оси штриховкой и выберите ответ по схеме.

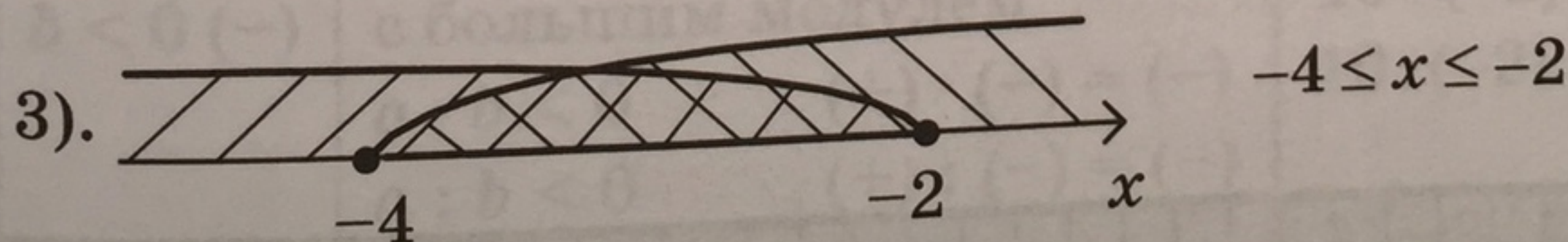
Запишите ответ промежутками.

**Примеры**

1. Решите систему неравенств:  $\begin{cases} 3x + 3 \leq 2x + 1 \\ 3x - 2 \leq 4x + 2 \end{cases}$

Решение.

$$1). \begin{cases} 3x - 2x \leq 1 - 3 \\ 3x - 4x \leq 2 + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -2 \\ -x \leq 4 \mid \cdot (-1) \end{cases} \quad 2). \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq -4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} a \leq b \mid \cdot (-1); -a \geq -b \end{array}$$



Ответ:  $-4 \leq x \leq -2$  или  $[-4; -2]$ .

**П о л е з н ы й с о в е т.** Чтобы записать решение неравенством, поставьте  $x$  между числами:  $-4$  и  $-2$  и соедините их знаками неравенства, как правило  $< x <$  или  $\leq x \leq$ .



2. ГИА. Решите систему неравенств:  $\begin{cases} x-1 < 7x+2 \\ 11x+13 > x+3 \end{cases}$

Решение.

1).  $\begin{cases} x-7x < 2+1 \\ 11x-x > 3-13 \end{cases}$

$ax+b > c; \quad ax > c-b \quad (I)$

$\begin{cases} x > a \\ x > b \\ a > b \end{cases}$

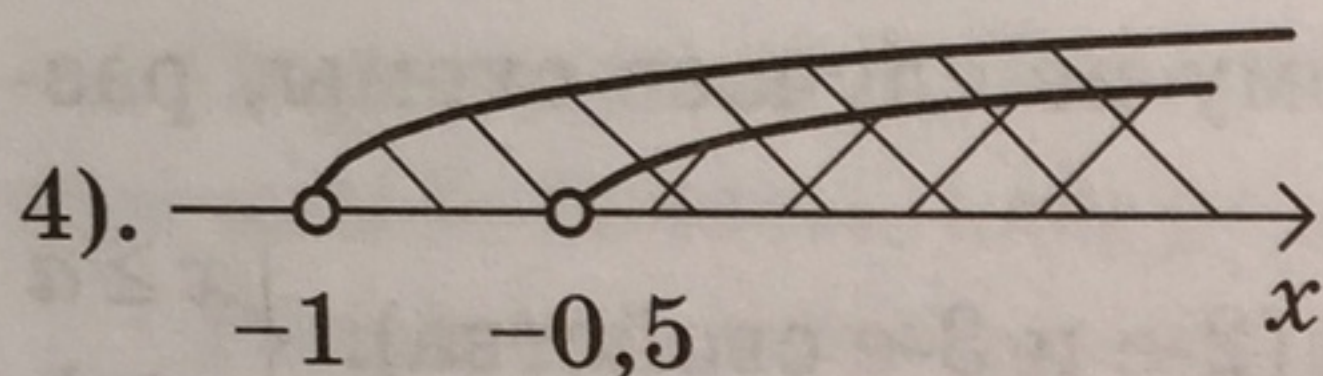
2).  $\begin{cases} -6x < 3 \mid :(-6) \\ 10x > -10 \mid :10 \end{cases}$

$-ax < b \mid :(-a); \quad x > b :(-a) \quad (II)$

$\begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases}$   
 $-0,5 > -1$

3).  $\begin{cases} x > -0,5 \\ x > -1 \end{cases}$

$ax > b \mid :a; \quad x > b :a \quad (II)$



Ответ:  $x > -0,5$  или  $(-0,5; +\infty)$ .

### Алгоритм

33

### Решение двойных неравенств

#### I способ

1. Разбейте двойное неравенство на систему двух неравенств

$b < ax < c : \begin{cases} ax > b \\ ax < c \end{cases}$

2. Решите систему неравенств.

3. Запишите ответ промежутками.

#### II способ

Двойное неравенство можно решать, используя свойства неравенств (1–3), постепенно приводя его к виду  $a < x < b$ .

#### Пример

Решите двойное неравенство  $-4 < 2x - 1 < 2$ .

Решение.

#### I способ

$\begin{cases} 2x-1 > -4; \\ 2x-1 < 2 \end{cases} \begin{cases} 2x > -4+1; \\ 2x < 2+1 \end{cases} \begin{cases} 2x > -3 \mid :2; \\ 2x < 3 \mid :2 \end{cases} \begin{cases} x > -1,5; \\ x < 1,5 \end{cases}$



Ответ:  $(-1,5; 1,5)$ .

II способ

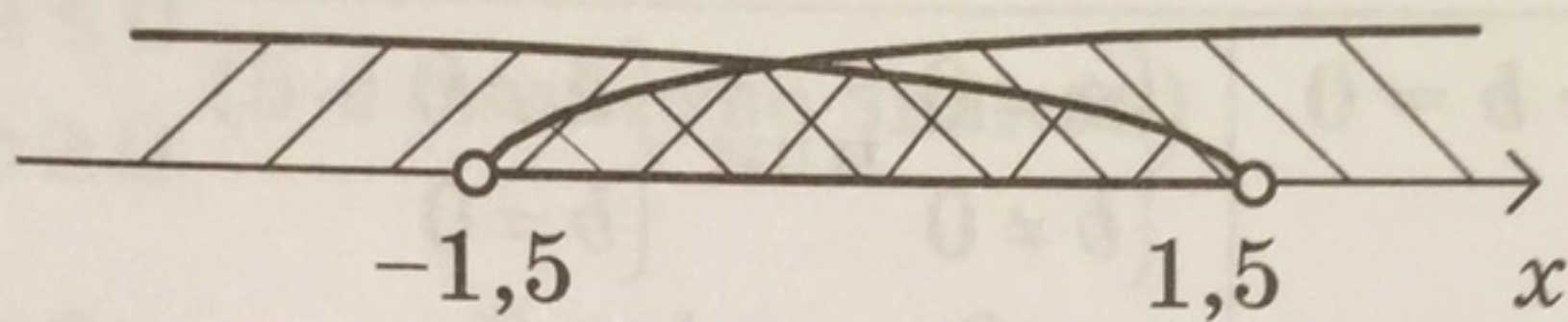
$$-4 < 2x - 1 < 2 \quad | +1$$

$$-4 + 1 < 2x < 2 + 1$$

$$-3 < 2x < 3 \quad | :2$$

$$-1,5 < x < 1,5$$

Ответ:  $-1,5 < x < 1,5$  или  $(-1,5; 1,5)$ .



$a > b \quad | +c$ , то  $a + c > b + c$  — I свойство

$x < b \quad | : (a > 0)$ ;  $x < \frac{b}{a}$  — II свойство

**Проверь себя!**

1. ГИА. Решите двойное неравенство  $-15 < x - 4 < -14$ .

2. ГИА. При каких значениях  $x$  выражение  $10x - 3$  принимает положительные значения, меньшие 1?

Ответ: 1).  $-11 < x < -10$  или  $(-11; -10)$ ; 2).  $(0,3; 0,4)$ .

### Таблица знаков чисел при выполнении действий

$a > 0$  — положительное число;  $a < 0$  — отрицательное число

1.	$a > 0 (+)$ $b > 0 (+)$	$a + b > 0$ $a \cdot b > 0$ $a : b > 0$	$(+) + (+) = (+)$ $(+) \cdot (+) = (+)$ $(+) : (+) = (+)$	$5 + 7 = 12; 12 > 0$ $5 \cdot 7 = 35; 35 > 0$ $15 : 3 = 5; 5 > 0$ знаки одинаковые
2.	$a < 0 (-)$ $b < 0 (-)$	$a + b < 0$ $a \cdot b > 0$ $a : b > 0$	$(-) + (-) = (-)$ $(-) \cdot (-) = (+)$ $(-) : (-) = (+)$	$-3 - 5 = -8; -8 < 0$ $(-3) \cdot (-5) = 15; 15 > 0$ $(-10) : (-5) = 2; 2 > 0$
3.	$a > 0 (+)$ $b < 0 (-)$	$a + b = c$ — знак числа с большим модулем $a \cdot b < 0$ $a : b < 0$	$(+) \cdot (-) = (-)$ $(+) : (-) = (-)$	$-7 + 5 = -2;  -7  >  5 $ $10 \cdot (-2) = -20; -20 < 0$ $10 : (-2) = -5; -5 < 0$
4.	$a \cdot b > 0$ $a : b > 0$	$\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$ знаки одинаковые		$21 = 3 \cdot 7 = (-3) \cdot (-7)$ $6 = 12 : 2 = (-12) : (-2)$
5.	$a \cdot b < 0$ $a : b < 0$	$\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$ знаки разные		$-15 = (-5) \cdot 3 = 5 \cdot (-3)$ $-5 = (-15) : 3 = 15 : (-3)$



6.	$a \cdot b = 0$	$\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a \neq 0 \\ b = 0 \end{cases}$ $a = 0$ и $b = 0$	$x \cdot (x-5) = 0;$ $x = 0$ или $x = 5$ $(x-1) \cdot (x-1) = 0; x = 1$
7.	$a : b = 0$	$\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$	$\frac{x+3}{x-1} = 0; \begin{cases} x+3=0, & x=-3 \\ x-1 \neq 0, & x \neq 1 \end{cases}$
8.	$a^n > 0$ $a^n < 0$	$a > 0$ или $a < 0$ и $n = 2k$ — четное $a < 0$ и $n = 2k + 1$ — нечетное	$3^3 = 27; 3 > 0$ и $3^3 > 0$ $(-2)^4 = 16; -2 < 0;$ $n = 4$ — четное $(-3)^3 = -27; -3 < 0; -27 < 0;$ $n = 3$ — нечетное

### Примеры

Определите знак результата.

1.  $(-5) \cdot (-1,3)^2 < 0$

2.  $(-8,1)^2 - (-7,5)^3 > 0$

3.  $(-1,5)^5 - a^2 < 0$

4.  $2 - \frac{1}{a^2 + 1} > 0$

5.  $-a < 0$ , то  $a > 0$

6.  $a^5 < 0$ , то  $a < 0$

7.  $(x-3) \cdot (x+1) = 0$   
 $x = 3$  или  $x = -1$

8.  $a^2 \cdot a^3 < 0$ , то  $a < 0$

1).  $(-a)^2 > 0; (-) \cdot (+) = (-)$

2).  $(-a)^2 > 0; (-a)^3 < 0;$

$(+) - (-) = (+) + (+) = (+)$

3).  $(-a)^5 < 0; -a^2 < 0; (-) + (-) = (-)$

4).  $a^2 > 0; 1 + a^2 > 1; 0 < \frac{1}{a^2 + 1} < 1$

$-a < 0 \mid \cdot (-1); a > 0$

$a^n < 0$ , то  $a < 0$   $n = 2k + 1$

6-е СВОЙСТВО

$a^n < 0$ , то  $a < 0$ ,  $n = 5$

### Алгоритм

34

Решение неравенств  $(x-a)(x-b) \geq 0$   
и  $\frac{x-a}{x-b} \geq 0$  с помощью систем неравенств

1. Запишите за чертой условно решение неравенства:

1).  $a \cdot b \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$  или  $\begin{cases} a \leq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$  (4-е свойство знаков)



$$2). a \cdot b \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a \leq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \text{ (5-е свойство знаков)}$$

$$3). \frac{a}{b} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b > 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a \leq 0 \\ b < 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \text{ (4-е свойство знаков)}$$

$$4). \frac{a}{b} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b < 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a \leq 0 \\ b > 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \text{ (5-е свойство знаков)}$$

- Составьте две системы неравенств по одному из случаев п. 1.
- Решите системы неравенств.
- Изобразите решение каждой системы на осях.
- Запишите ответ объединением двух решений или одним промежутком.

### Примеры

Решите неравенства.

1.  $(2x+3)(x-4) \geq 0$

Решение.

$$\underbrace{(2x+3)}_a \underbrace{(x-4)}_b \geq 0$$

$$2) \begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2x+3 \leq 0 \\ x-4 \leq 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x \geq -3 \mid :2 \\ x \geq 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2x \leq -3 \mid :2 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

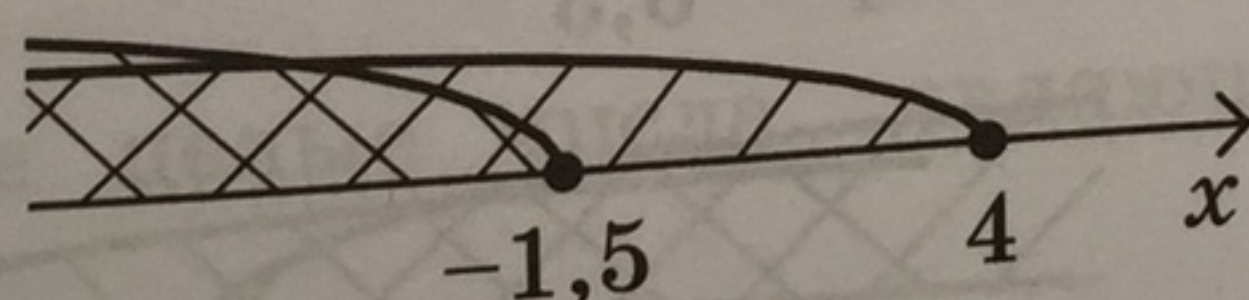
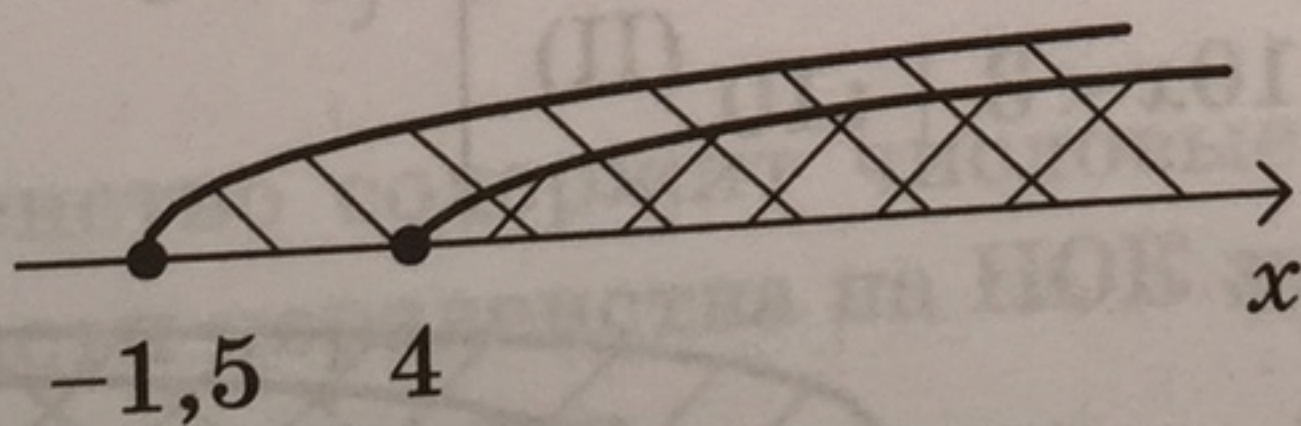
$$4) \begin{cases} x \geq -1,5 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$x \geq 4$$

или

$$\begin{cases} x \leq -1,5 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$x \leq -1,5$$



$$1) a \cdot b \geq 0$$

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a \leq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$$

$$ax \geq b \mid :a > 0; x > b : a$$

$$\begin{cases} x \geq a \\ x \geq b \\ b \geq a \end{cases}$$

$$x \geq b$$

Ответ:  $(-\infty; -1,5] \cup [4; +\infty)$ .



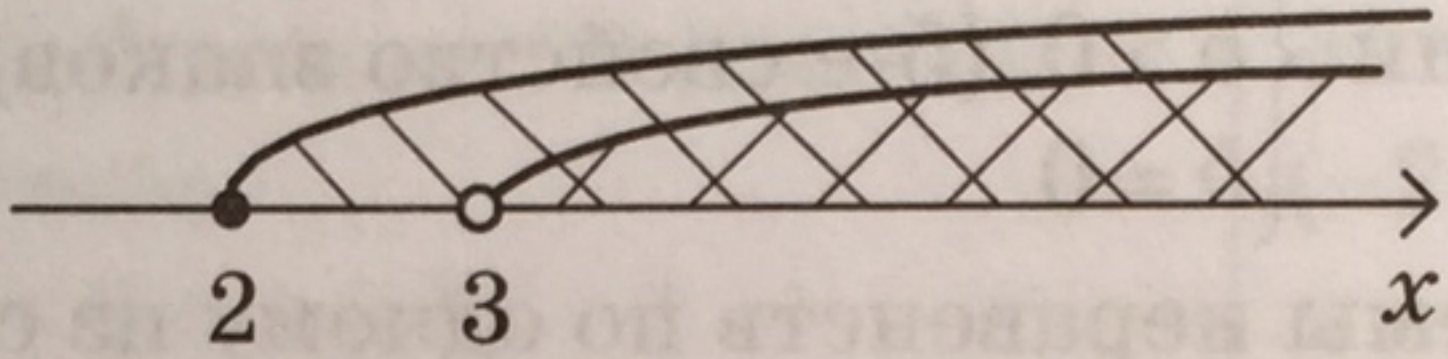
2.  $\frac{x-2}{3-x} \leq 0$

Решение.

2).  $\frac{\overset{a}{x-2}}{\underset{b}{3-x}} \leq 0 \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 3-x < 0 \end{cases} \text{ (I) или } \begin{cases} x-2 \leq 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} \text{ (II)}$

1).  $\frac{a}{b} \leq 0$

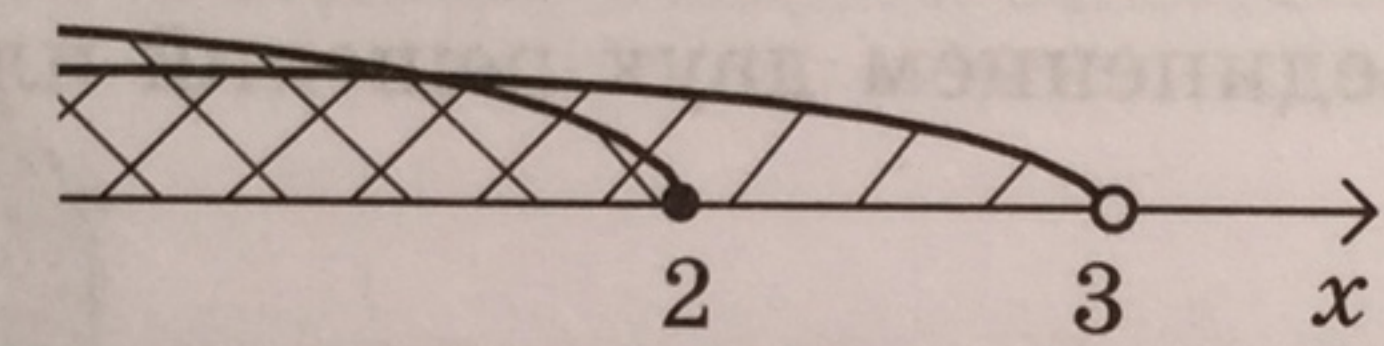
3). (I)  $\begin{cases} x \geq 2 \\ x > 3 \end{cases} \Rightarrow x > 3$



$\begin{cases} a \geq 0 \\ b < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a \leq 0 \\ b > 0 \end{cases}$   
 $b \neq 0$

или

(II)  $\begin{cases} x \leq 2 \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow x \leq 2$



$a - b \geq 0; a \geq b$   
 $a < b; b > a$   
 $3 - x < 0; 3 < x; x > 3$

Ответ:  $(-\infty; 2] \cup (3; +\infty)$ .

3. ГИА. Решите неравенство  $\frac{20}{(x+4)(10x-3)} > 0$ .

Решение.

$\frac{\overset{a}{20}}{\underset{b}{(x+4)(10x-3)}} > 0$

$\frac{a}{b} > 0, a = 20 (> 0)$

$(x+4)(10x-3) > 0$

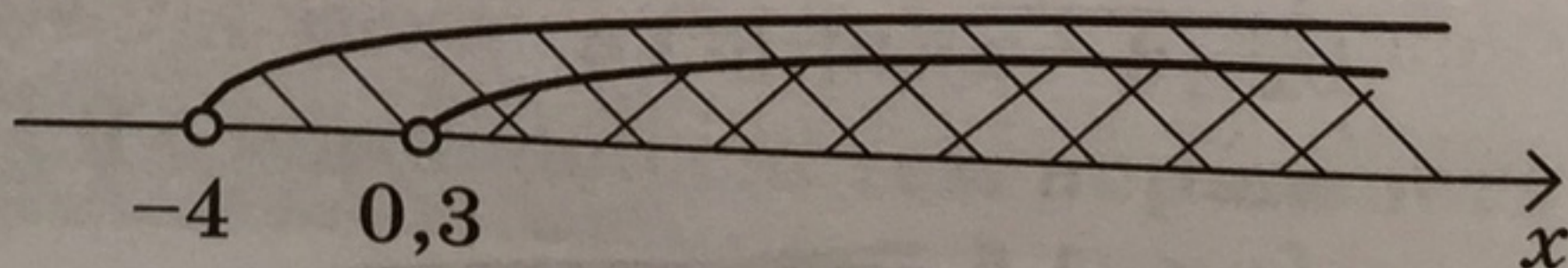
и если  $a > 0$ , то и  $b > 0$   
 $a \cdot b > 0$

$\begin{cases} x+4 > 0 \\ 10x-3 > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+4 < 0 \\ 10x-3 < 0 \end{cases}$

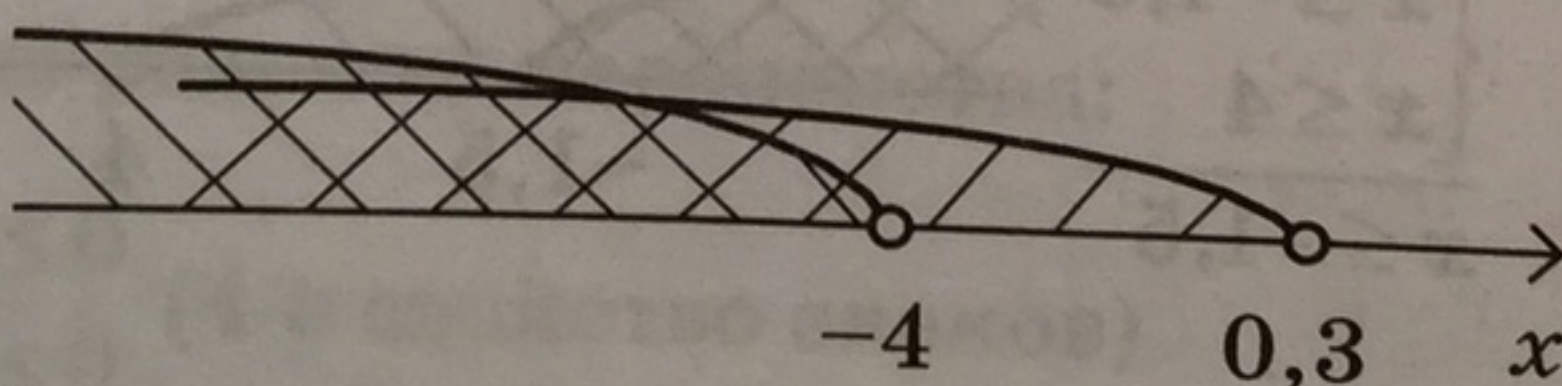
$\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$   
 $b \neq 0$

$\begin{cases} x > -4 \\ 10x > 3 \end{cases} \mid :10 \text{ (I) или } \begin{cases} x < -4 \\ 10x < 3 \end{cases} \mid :10 \text{ (II)}$

(I)  $\begin{cases} x > -4 \\ x > 0,3 \end{cases} \Rightarrow x > 0,3$



или (II)  $\begin{cases} x < -4 \\ x < 0,3 \end{cases} \Rightarrow x < -4$



Ответ:  $(-\infty; -4) \cup (0,3; +\infty)$ .



$$4. \frac{x-1}{2-x} > 1$$

Решение.

Сравнивайте дробь с нулем! Для этого надо перенести все члены неравенства в левую часть и привести к общему знаменателю.

$$1). \frac{x-1}{2-x} - 1 > 0; \frac{x-1}{2-x} - \frac{2-x}{2-x} > 0$$

$$\frac{x-1-(2-x)}{2-x} > 0; \frac{x-1-2+x}{2-x} > 0$$

$$\frac{2x-3}{2-x} > 0$$

$$2). \frac{2x-3}{2-x} > 0 \mid \cdot (-1); \frac{2x-3}{x-2} < 0$$

$$\begin{cases} 2x-3 > 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2x-3 < 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$$

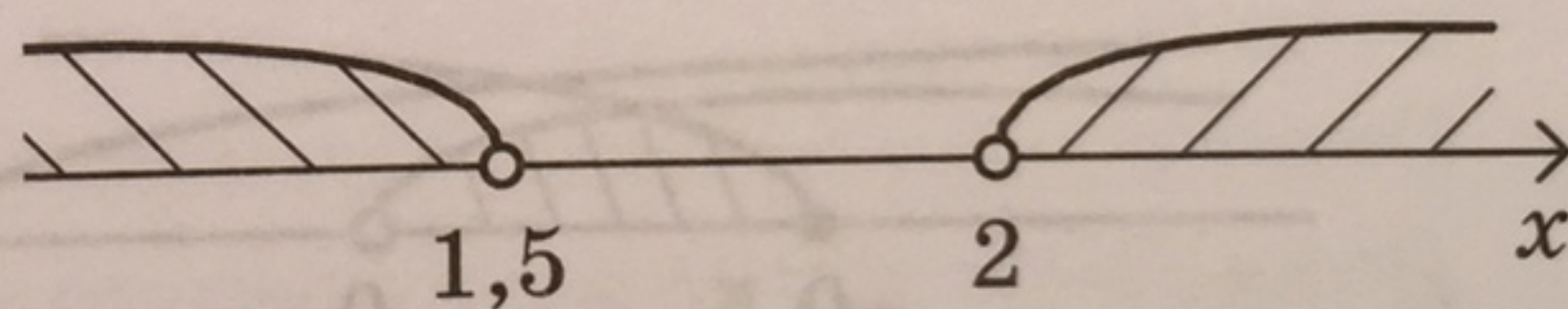
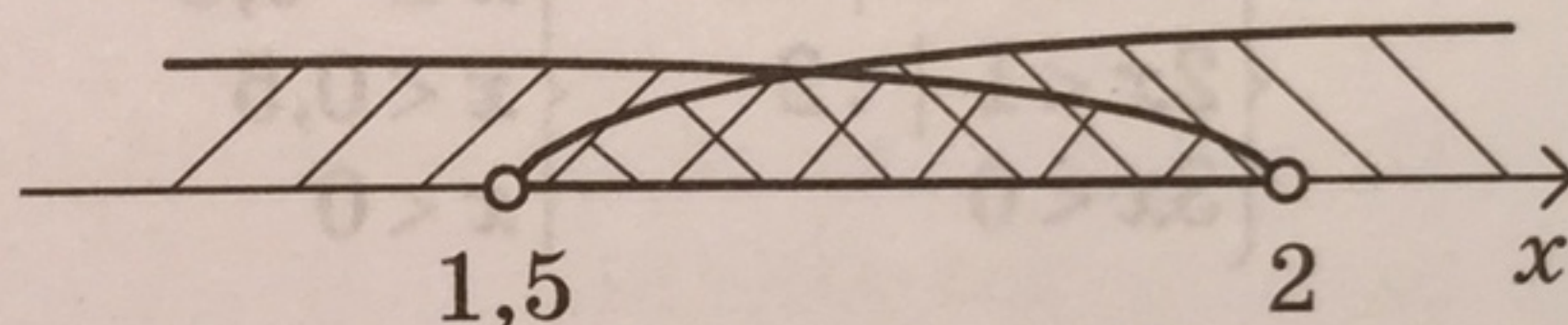
$$\begin{cases} x > 1,5 \\ x < 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x < 1,5 \\ x > 2 \end{cases}$$

$$1,5 < x < 2 \quad \text{нет решений}$$

$$1 = \frac{b}{b}; \frac{a}{b} - \frac{b}{b} = \frac{a-b}{b};$$

$$\frac{a}{b} > 0 \mid \cdot (-1); \frac{a}{-b} < 0$$

$$\frac{a}{b} < 0; \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$$



Ответ: (1,5; 2).

### Полезные советы

1. Если в двучлене  $(a-x)$  дан  $x$  со знаком минус, то умножьте выражение на  $(-1)$  и поменяйте знак неравенства, получите  $(x-a)$  — возможность допустить ошибку меньше. Если дан двучлен  $(a+x)$ , то  $a+x = x+a$ .

2. Если неравенство содержит числовые знаменатели, то сначала умножьте обе части неравенства на НОК знаменателей и решайте неравенство с целыми числами.

5. Найдите все целые числа, являющиеся решением системы:

$$\begin{cases} 1-0,5x \geq 0 \\ -\frac{x+5}{5} < -1 \end{cases}$$



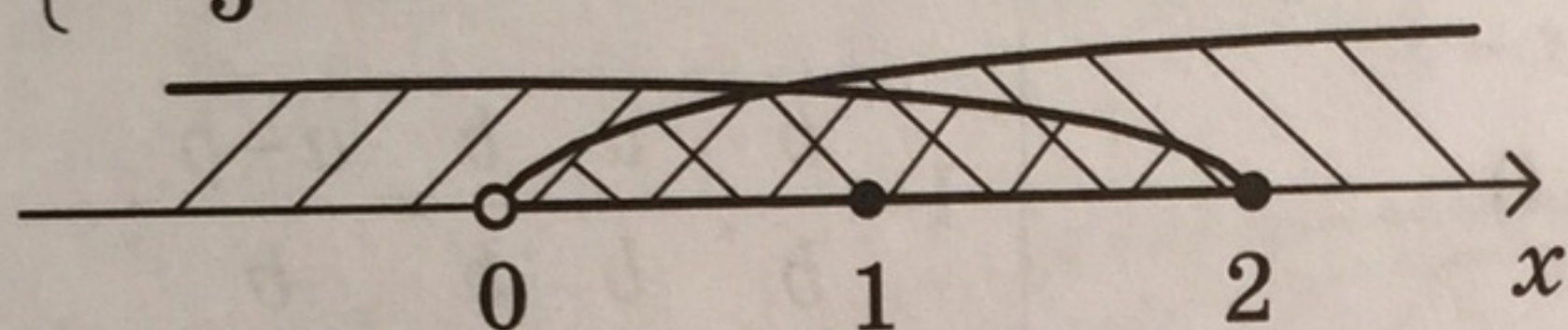
Решение.

Примените полезные советы.

$$\begin{cases} 1-0,5x \geq 0 \mid \cdot (-2) \\ -\frac{x+5}{5} < -1 \mid \cdot (-5) \end{cases}; \begin{cases} x-2 \leq 0 \\ x+5 > 5 \end{cases}; \begin{cases} x \leq 2 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$a > b \mid \cdot c < 0; -ac < -bc$$

$$1-0,5x \cdot (-2) = -2+x = x-2$$



Ответ: 1; 2.

Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x > 3x-1 \\ 5x+6 < 2x+6 \end{cases}$$

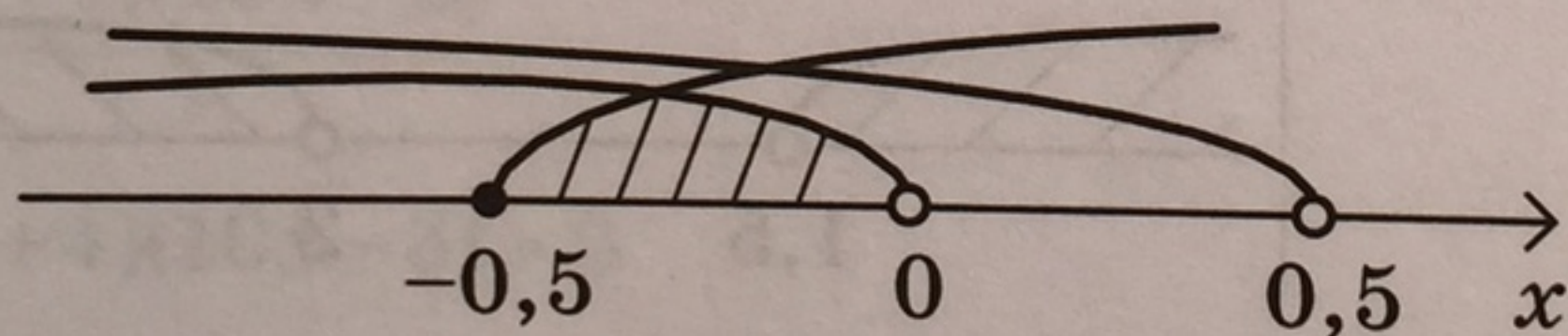
Решение.

1). Приведем неравенства к виду  $kx \geq b$ :

$$\begin{cases} 2x \geq -1 \mid :2 \\ 2x < 1 \mid :2 \\ 3x < 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq -0,5 \\ x < 0,5 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 3x-1; 1 > 3x-x; \\ 1 > 2x, \text{ то } 2x < 1 \end{cases}$$

2). Изобразим решение на оси:



Ответ:  $[-0,5; 0)$ .

Попробуй не реши!

Решите неравенство.

1.  $\frac{x+1}{x-3} \leq 0$       2.  $(x+12)(30-x) \geq 0$

3. Найдите все целые числа, являющиеся решением системы:

$$\begin{cases} 2-3x \geq 0 \\ \frac{x+4}{3} \geq 1 \end{cases}$$

Ответ: 1).  $[-1; 3)$ ; 2).  $[-12; 30]$ ; 3).  $-1; 0$ .



### Попробуй-ка реши!

1. Найдите координату середины промежутка, являющегося множеством решений системы неравенств:

$$\begin{cases} -\frac{13}{4} + \frac{3x}{4} \leq \frac{x-1}{4} - \frac{7}{8} \\ 2 \geq \frac{x}{4} + \frac{3-2x}{3} \end{cases}$$

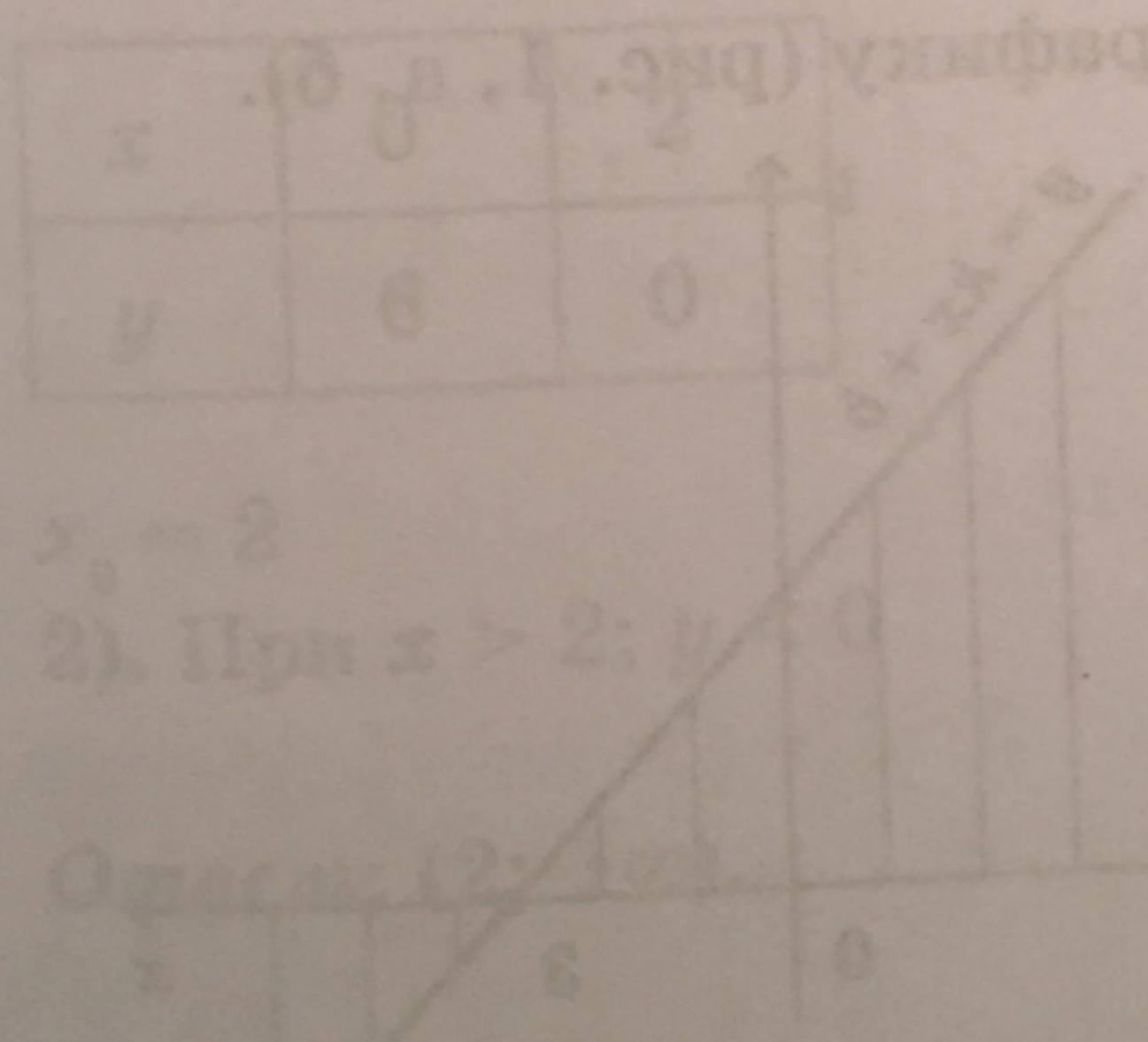
2. При каких значениях  $m$  система не будет иметь решений?

$$\begin{cases} 5-3x < 4x-2 \\ 2+3x < 2m+2x \end{cases}$$

Ответ: 1). 0,925; 2).  $m \leq 1,5$ .

Решение.

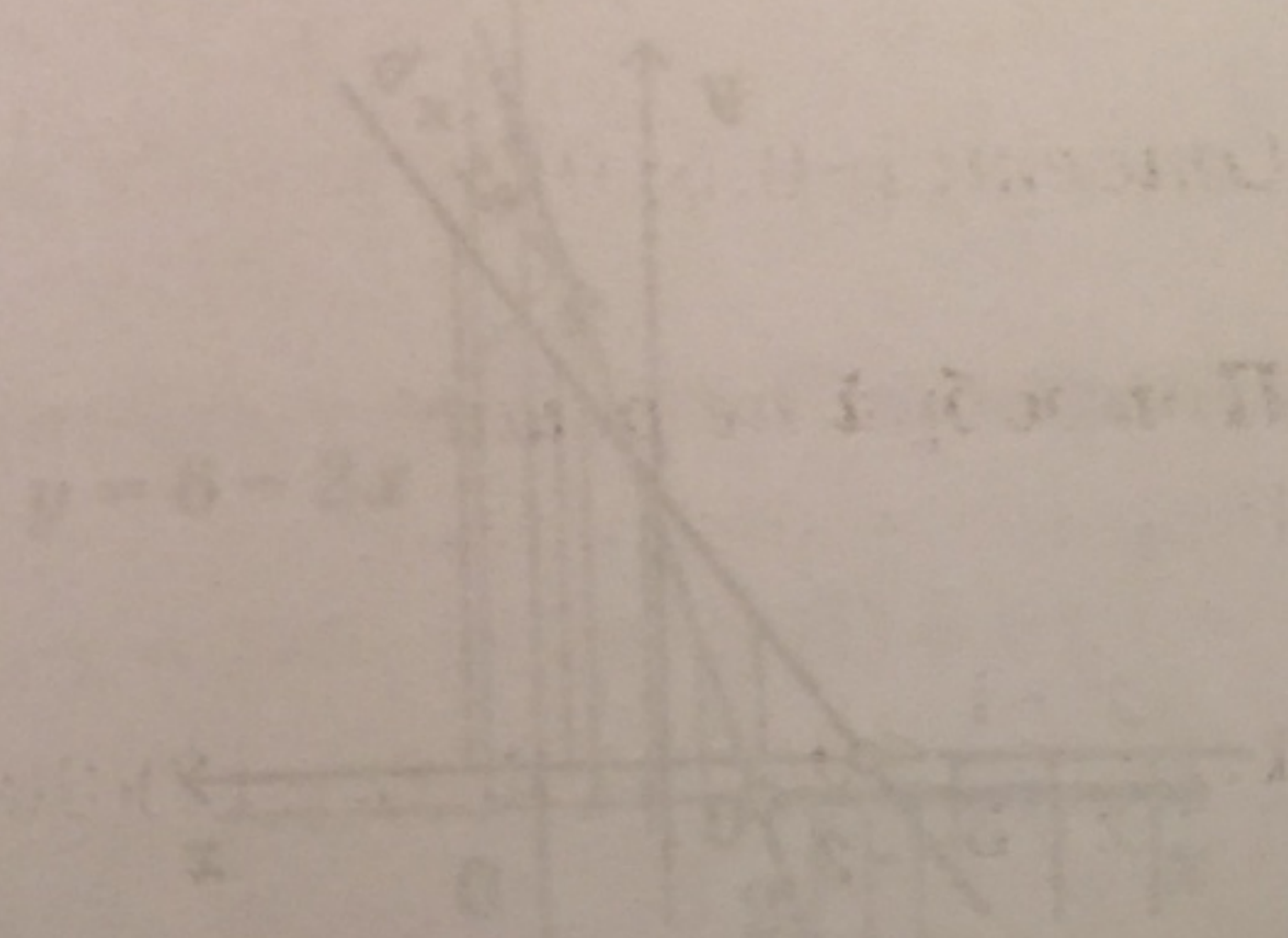
1). Постройте графики функций



$x_0 = 2$

2). При  $x > 2$ :  $y < 0$

Ответ: (2; 4)





## § 4.

## Графическое решение линейных неравенств

## Алгоритм

35

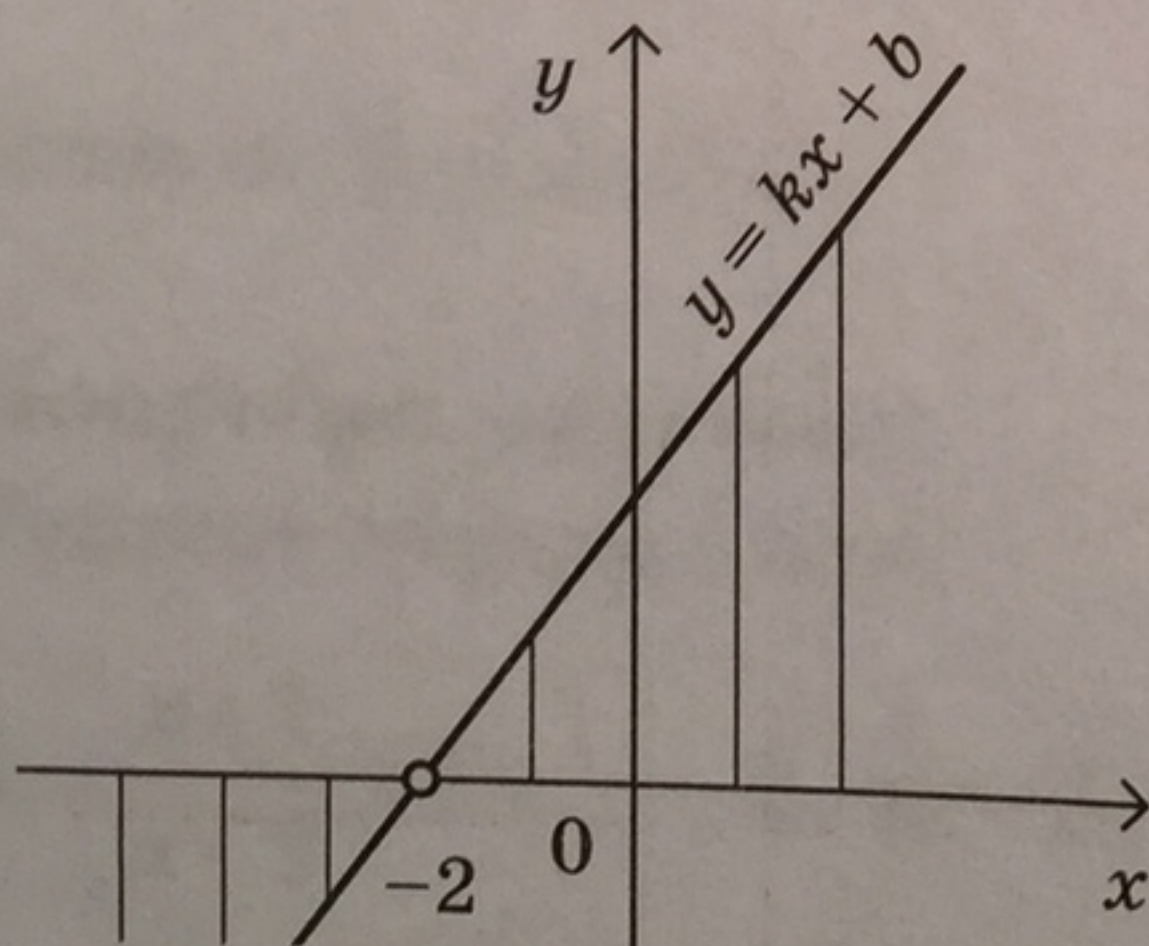
Графическое решение линейных неравенств  $kx + b \geq 0$ 

1. Постройте график линейной функции  $y = kx + b$ :

$x$	0	$-\frac{b}{k}$
$y$	$b$	0

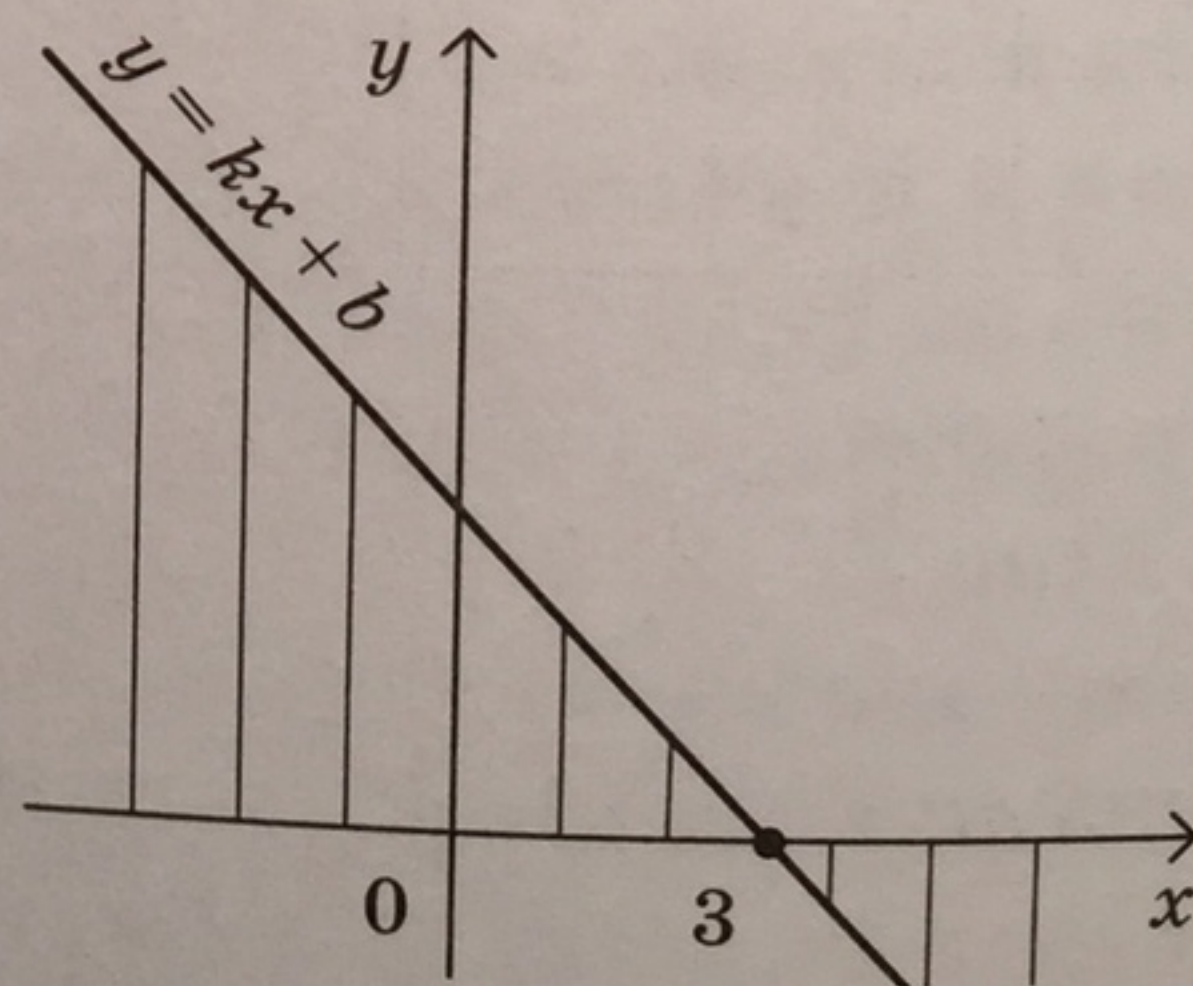
2. Найдите абсциссу  $x_0$  точки пересечения графика с осью  $Ox$ .
3. Значения  $x$ , при которых часть графика находится над осью  $Ox$ , есть решение неравенства  $kx + b > 0$ . Значения  $x$ , при которых часть графика находится под осью  $Ox$ , есть решение неравенства  $kx + b < 0$ .
4. При переходе через точку  $x_0 = a$  знак неравенства меняется на противоположный.
5. Если неравенство нестрогое ( $\geq$ ;  $\leq$ ), то значение  $x_0 = a$  включается в ответ.
6. Ответ записать промежутком.

Например: решите неравенство по графику (рис. 1, а, б).



а)

- а)  $kx + b = 0$  при  $x_0 = -2$   
 $kx + b > 0$  при  $x > -2$   
 $kx + b < 0$  при  $x < -2$



б)

- б)  $kx + b = 0$  при  $x_0 = 3$   
 $kx + b \geq 0$  при  $x \leq 3$   
 $kx + b \leq 0$  при  $x \geq 3$

Рис. 1



## Примеры

1. Решите неравенство  $2x - 5 \geq 0$  с помощью графика (рис. 2).

Решение.

- 1). Постройте график функции  $y = 2x - 5$ .

$x$	0	2,5
$y$	-5	0

$$2x - 5 = 0; \quad x_0 = 2,5 \quad \left| \quad x_0 = -\frac{b}{a}$$

- 2). При  $x \geq 2,5; y \geq 0$

Ответ:  $y \geq 0$ .

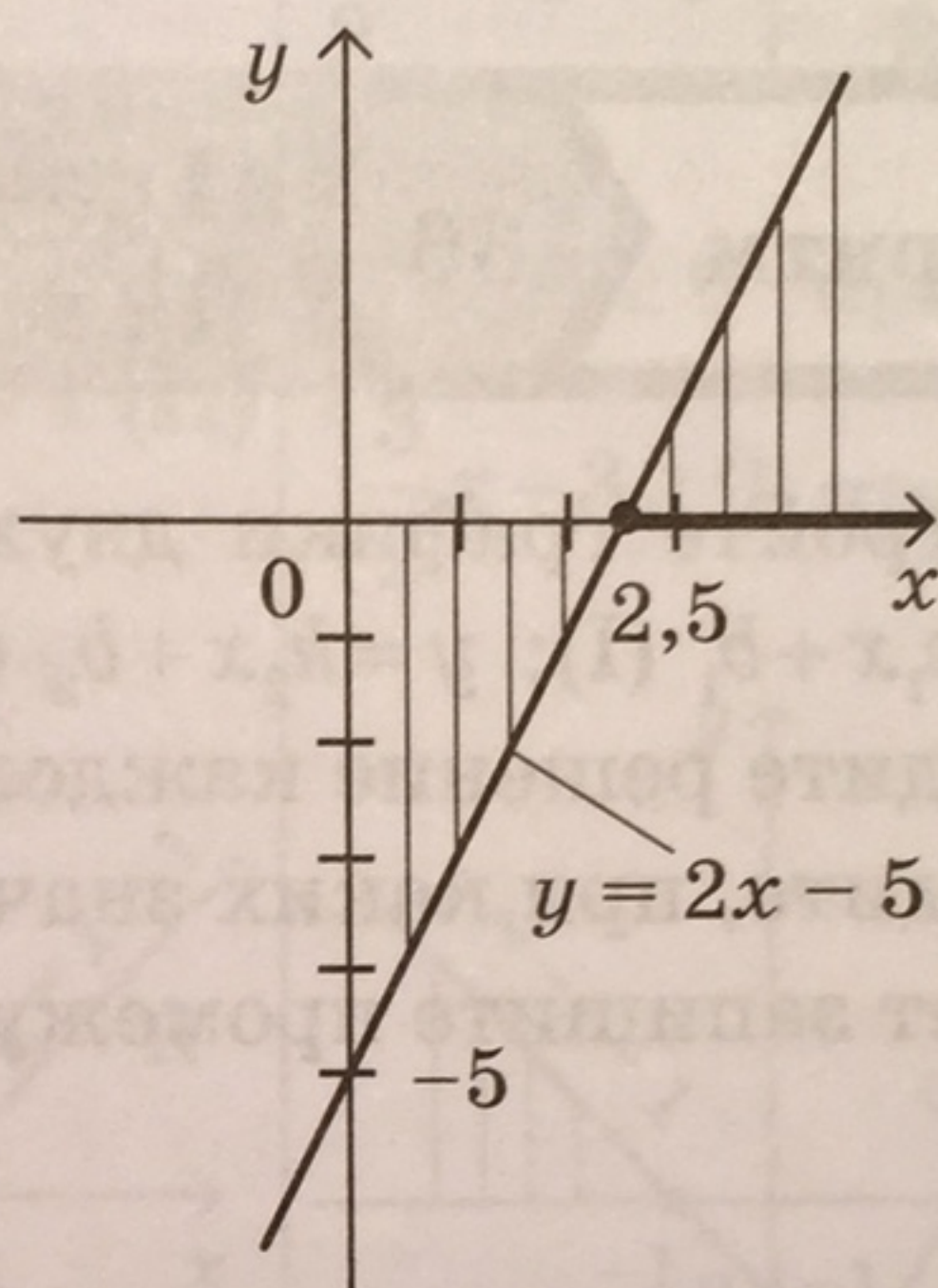


Рис. 2

2. Решите неравенство с помощью графика:  $6 - 3x < 0$  (рис. 3).

Решение.

- 1). Постройте график функции  $y = 6 - 3x$ .

$x$	0	2
$y$	6	0

$$x_0 = 2$$

- 2). При  $x > 2; y < 0$

Ответ:  $(2; +\infty)$ .

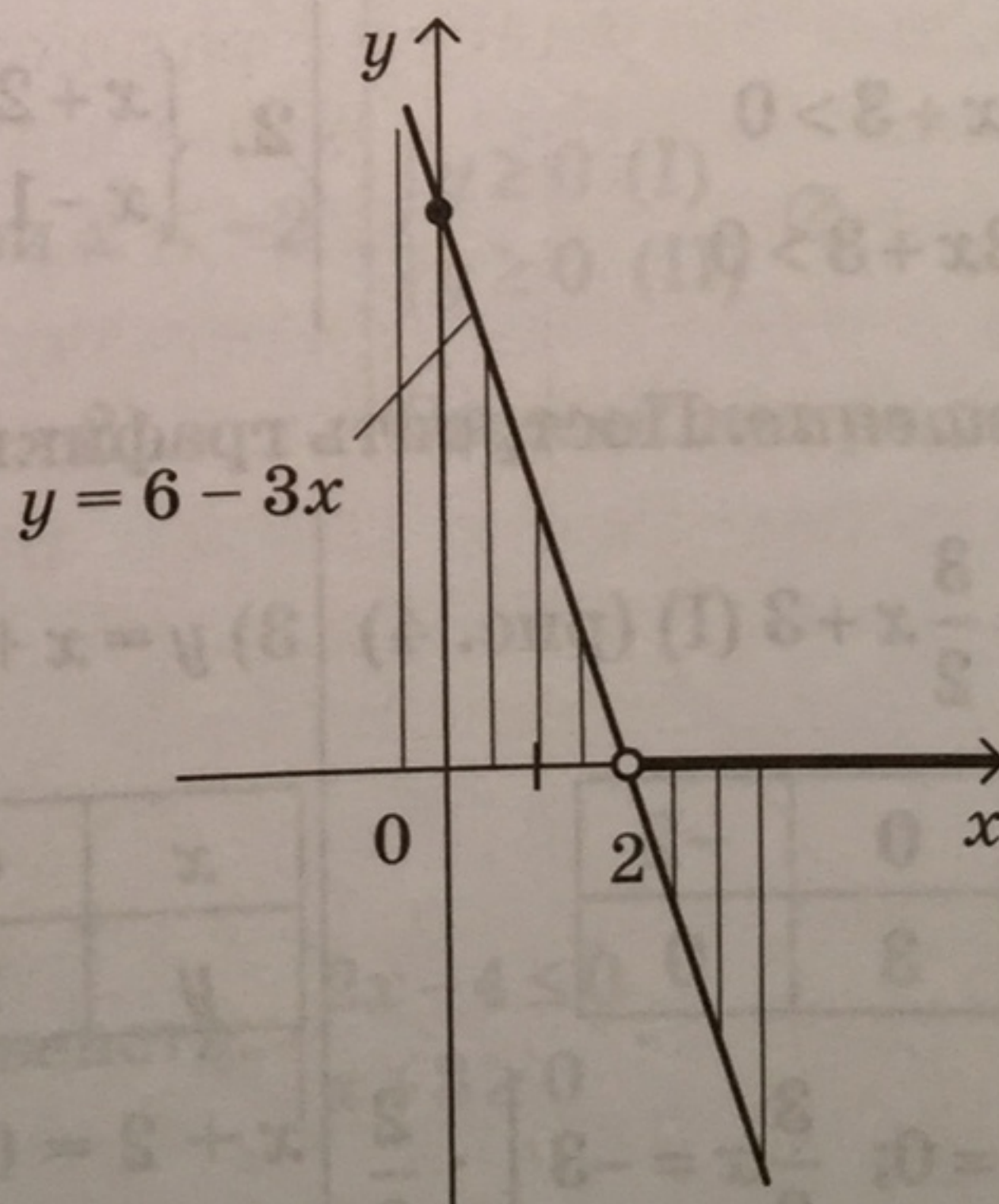


Рис. 3



## Проверь себя!

Решите графически неравенство  $4x + 8 \geq 0$ .

Ответ:  $[-2; +\infty)$ .

### Алгоритм

36

### Графическое решение систем неравенств I степени с одной переменной

1. Постройте графики двух функций в одной системе координат:  
 $y = k_1x + b_1$  (I);  $y = k_2x + b_2$  (II).
2. Найдите решение каждого неравенства (штриховкой).
3. Найдите, при каких значениях  $x$  выполняются оба неравенства.
4. Ответ запишите промежутками.

### Примеры

Решите графически систему неравенств.

$$1. \begin{cases} \frac{3}{2}x + 3 > 0 \\ -3x + 3 > 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + 2 < 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} -x - 1 \geq 0 \\ \frac{3}{2}x - 3 \geq 0 \end{cases}$$

Решение. Построить графики функций.

$$1) y = \frac{3}{2}x + 3 \text{ (I) (рис. 4)}$$

$x$	0	-2
$y$	3	0

$$\frac{3}{2}x + 3 = 0; \quad \frac{3}{2}x = -3 \quad \left| \cdot \frac{2}{3} \right. \\ x = -2$$

$$3) y = x + 2 \text{ (I) (рис. 5)}$$

$x$	0	-2
$y$	2	0

$$x + 2 = 0 \\ x = -2$$

$$5) y = -x - 1 \text{ (I) (рис. 6)}$$

$x$	0	-1
$y$	-1	0

$$-x - 1 = 0 \\ x = -1$$



2)  $y = -3x + 3$  (II) (рис. 4)

$x$	0	-1
$y$	3	0

$$-3x + 3 = 0; -3x = -3;$$

$$x = 1$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x + 3 > 0 & \text{при } x > -2 \text{ (I)} \\ -3x + 3 > 0 & \text{при } x < 1 \text{ (II)} \end{cases}$$

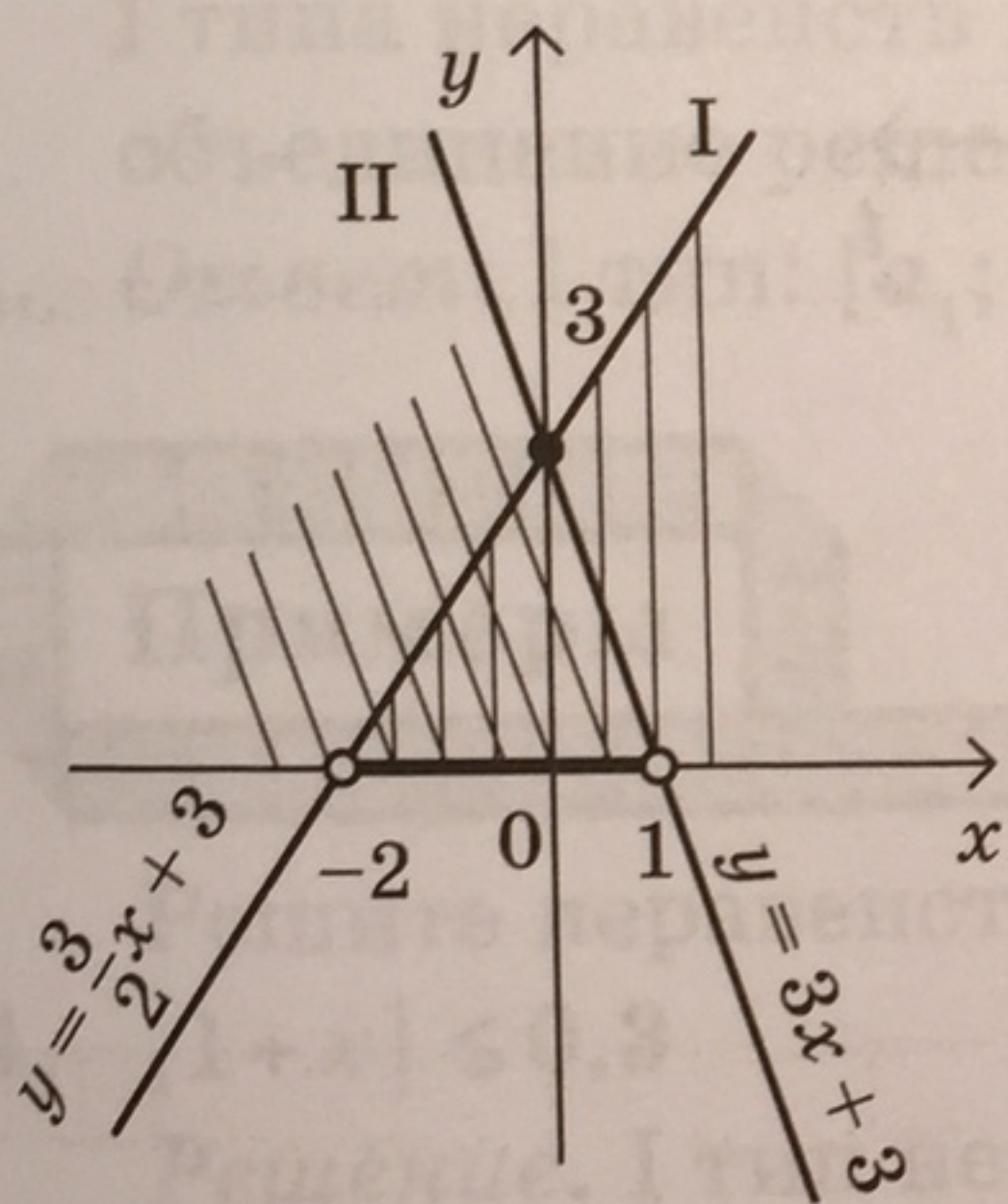


Рис. 4

$$\begin{cases} y > 0 \text{ (I)} \\ y > 0 \text{ (II)} \end{cases} \text{ при } x \in (-2; 1)$$

Ответ:  $(-2; 1)$ .

4)  $y = x - 1$  (II) (рис. 5)

$x$	0	-1
$y$	-1	0

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$\begin{cases} x + 2 < 0 & \text{при } x > -2 \text{ (I)} \\ x - 1 < 0 & \text{при } x < 1 \text{ (II)} \end{cases}$$

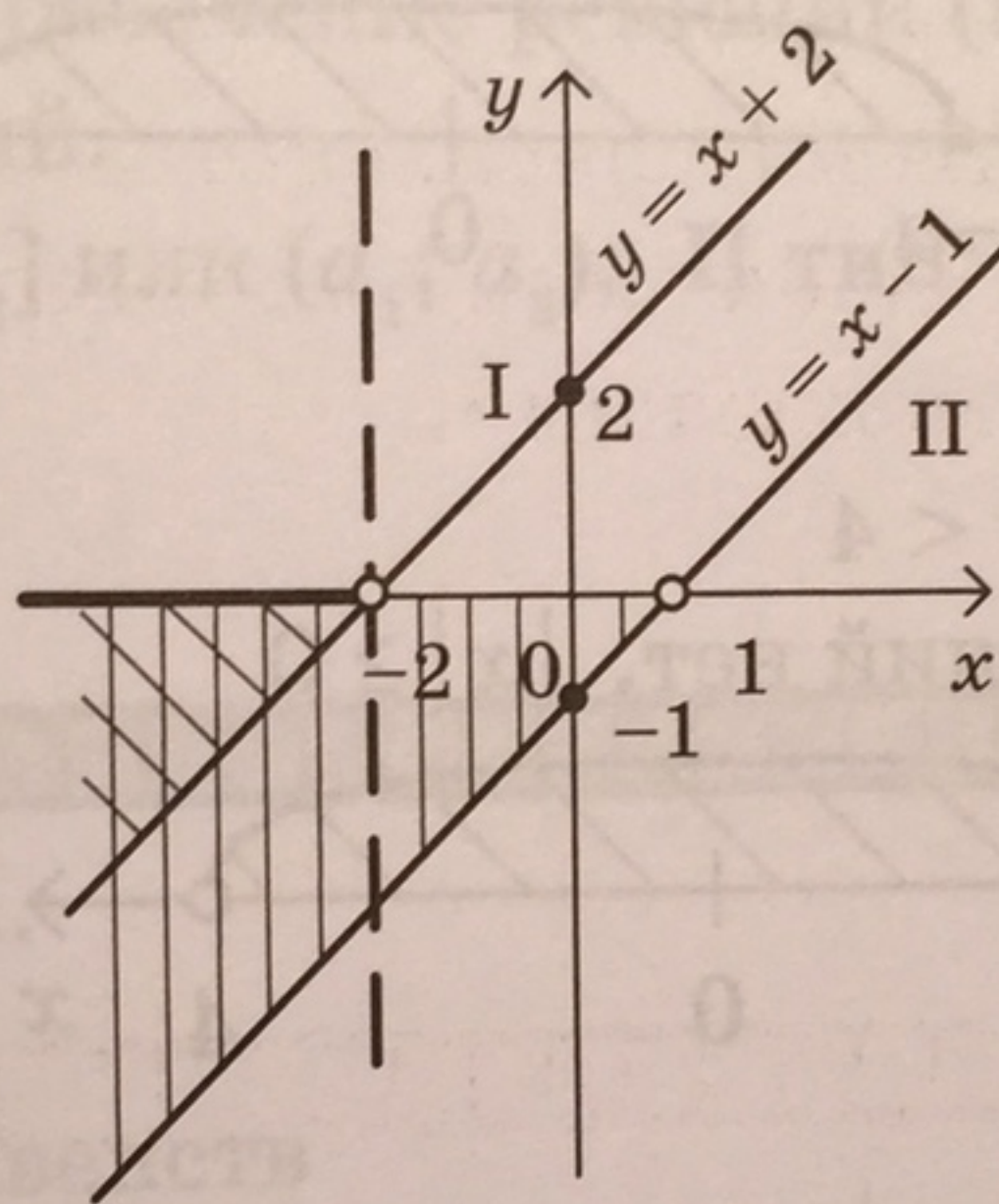


Рис. 5

$$\begin{cases} y < 0 \text{ (I)} \\ y < 0 \text{ (II)} \end{cases} \text{ при } x < -2$$

Ответ:  $(-\infty; -2)$ .

6)  $y = \frac{3}{2}x - 3$  (II) (рис. 6)

$x$	0	2
$y$	-3	0

$$\frac{3}{2}x - 3 = 0 \quad | \cdot \frac{2}{3}$$

$$x = 2$$

$$\begin{cases} -x - 1 \geq 0 & \text{при } x \leq -1 \\ \frac{3}{2}x - 3 \geq 0 & \text{при } x \geq 2 \end{cases}$$

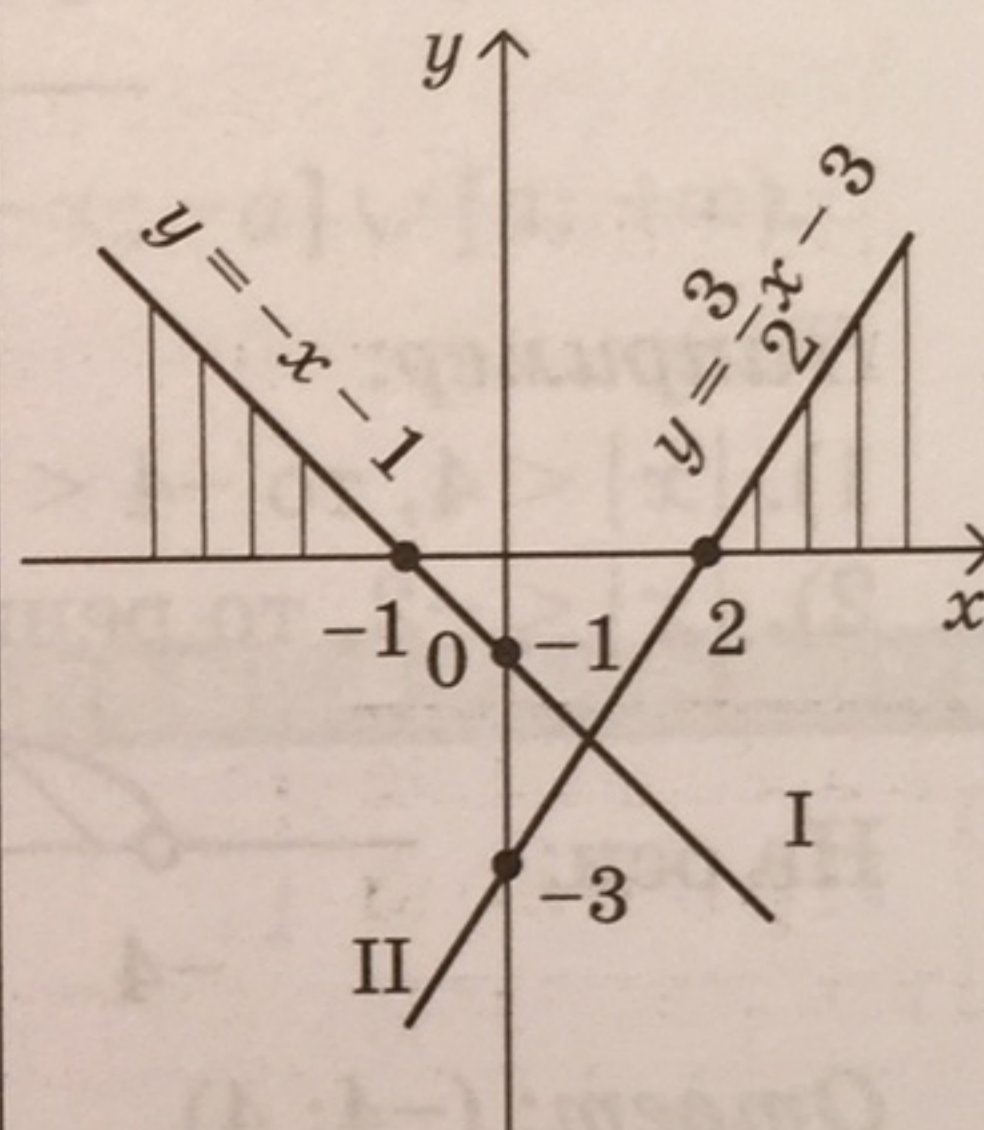


Рис. 6

$$\begin{cases} y \geq 0 \text{ (I)} \\ y \geq 0 \text{ (II)} \end{cases} \emptyset$$

Ответ: нет решений.

**Проверь себя!**

Решите графически систему неравенств:  $\begin{cases} 2x - 4 \leq 0 \\ x + 3 \geq 0 \end{cases}$ .

Ответ:  $[-3; 2]$ .



## § 5.

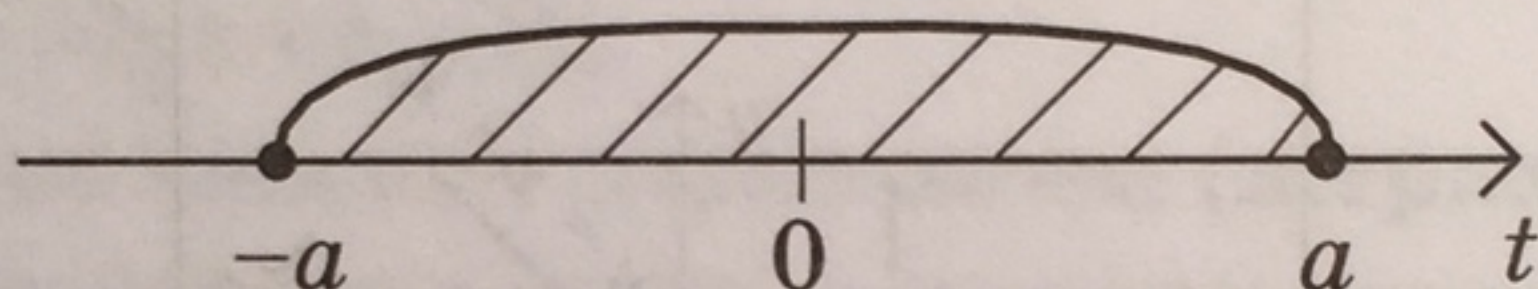
## Решение неравенств с неизвестной под знаком модуля

**I тип неравенств.**  $|t| \leq a, a > 0$

Решение записывают двойным неравенством  $-a \leq t \leq a$  или системой неравенств:  $\begin{cases} t \geq -a \\ t \leq a \end{cases}$

На оси  $Ot$  этому неравенству удовлетворяют все точки отрезка  $[-a; a]$ , которые находятся на расстоянии, меньшем или равном  $|a|$  от точки 0, причем если  $a = 0$ , то  $t = 0$ .

Если  $a < 0$ , то решений нет.

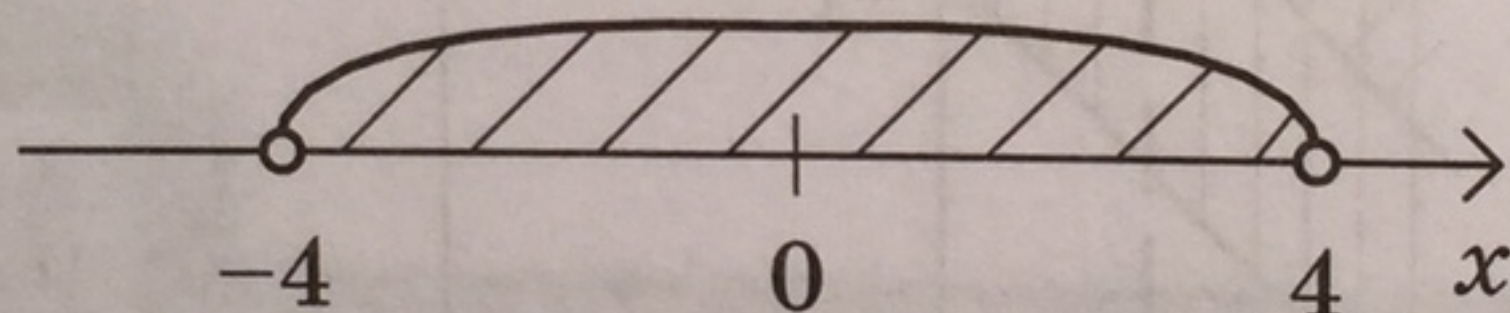


Например:

1).  $|x| < 4$ , то  $-4 < x < 4$

2).  $|x| < -2$ , то решений нет,  $|x| \geq 0$

На оси:



Ответ:  $(-4; 4)$ .

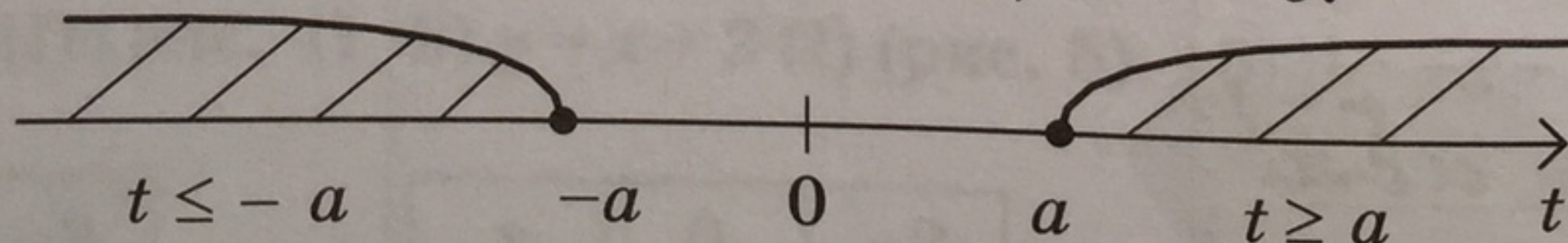
**II тип неравенств.**  $|t| \geq a$ , где  $a$  — число

Если  $a = 0$ , то  $t = 0$ .

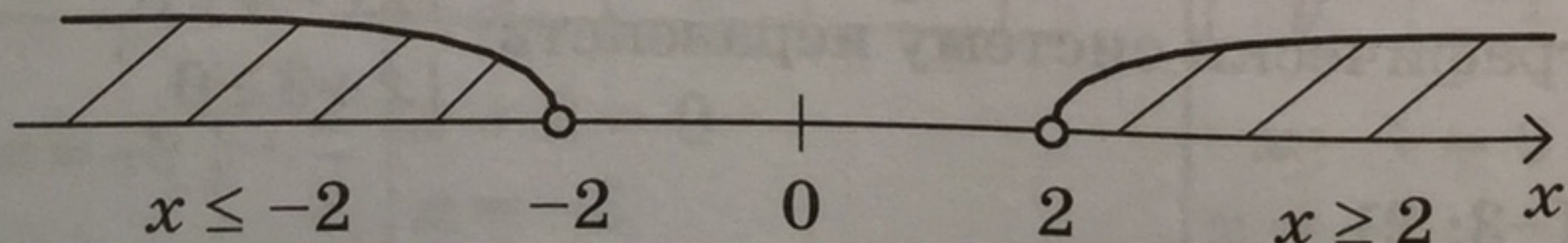
Если  $a < 0$ , то  $t$  — любое число.

Если  $a > 0$ , то решайте два неравенства:  $t \geq a$  или  $t \leq -a$ .

На оси  $Ot$  этому неравенству удовлетворяют все точки промежутков  $(-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$ , которые расположены на расстоянии, большем или равном  $a$  от точки 0. Если  $a = 0$ , то  $t = 0$ .



Например:  $|x| > 2$ , то  $x > 2$  или  $x < -2$



Ответ:  $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ .



## Алгоритм

37

Решение неравенств  $|kx + b| \geq a$ 

1. Определите тип неравенства.

I тип:  $|t| < a$ , решение запишите в виде системы  $\begin{cases} t < a \\ t > -a \end{cases}$  или двойным неравенством  $-a < t < a$ .

II тип:  $|t| > a$ , решение запишите двумя неравенствами:  $t < -a$  и  $t > a$ .

2. Решите систему двух неравенств (для I или II типа) или двойное неравенство для I типа.

3. Изобразите на оси  $Ox$  решение неравенств и выберите ответ: для I типа неравенств пересечение решений (штриховок), для II типа объединение решений.4. Ответ: I тип:  $[a_1; a_2]$  или  $(a_1; a_2)$ ; II тип:  $(-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$ .

## Примеры

Решите неравенства.

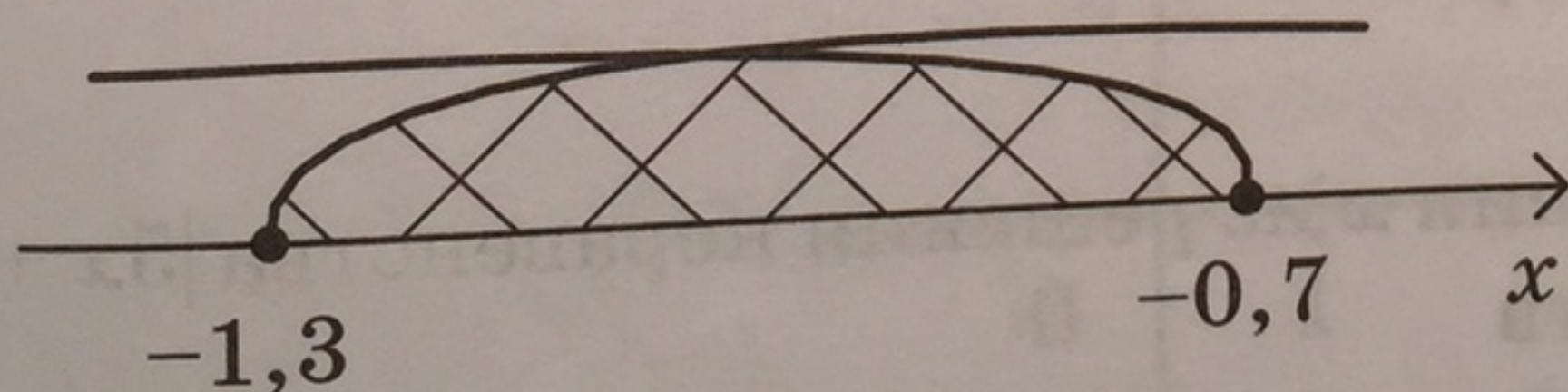
1.  $|1+x| \leq 0,3$

Решение. I тип неравенств

1).  $\underbrace{|1+x|}_t \leq \underbrace{0,3}_a$

$$\begin{aligned} 2). \quad & -0,3 \leq 1+x \leq 0,3 \quad | -1 \\ & -1 - 0,3 \leq x \leq 0,3 - 1 \\ & -1,3 \leq x \leq -0,7 \end{aligned}$$

3).

Ответ:  $[-1,3; -0,7]$ .

2.  $|2-3x| \leq 2$

Решение. I тип неравенств

1).  $\underbrace{|3x-2|}_t \leq 2$

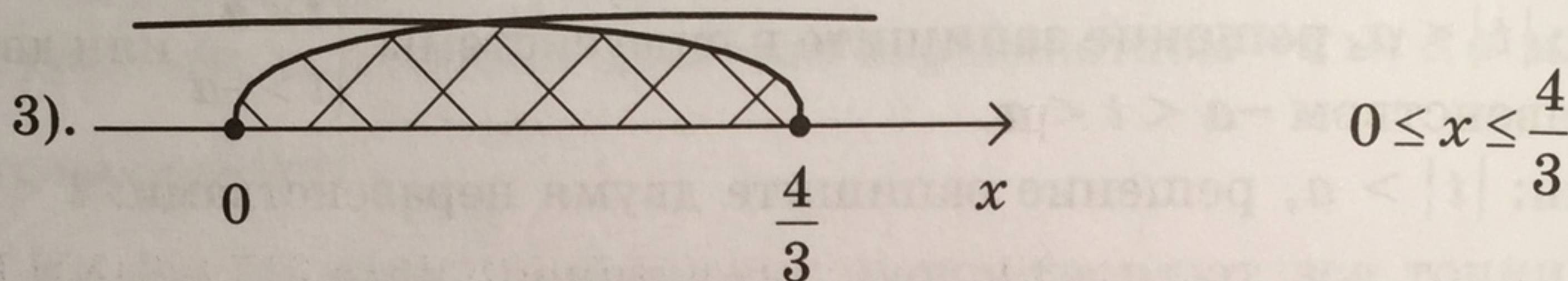
$$\begin{aligned} |a-b| &= |b-a| \\ |2-3x| &= |3x-2| \end{aligned}$$

$|t| \leq a$ , значит,  $-a \leq t \leq a$   
Можно решить неравенство системой:

$$\begin{cases} 1+x \geq -0,3 \\ 1+x \leq 0,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1,3 \\ x \leq -0,7 \end{cases}$$



$$2). \begin{cases} 3x-2 \geq -2 \\ 3x-2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq -2+2 \\ 3x \leq 2+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq 0 \\ 3x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq \frac{4}{3} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} |t| \leq a, \text{ значит,} \\ \begin{cases} t \geq -a \\ t \leq a \end{cases} \end{array} \right.$$



Ответ:  $\left[0; \frac{4}{3}\right]$ .

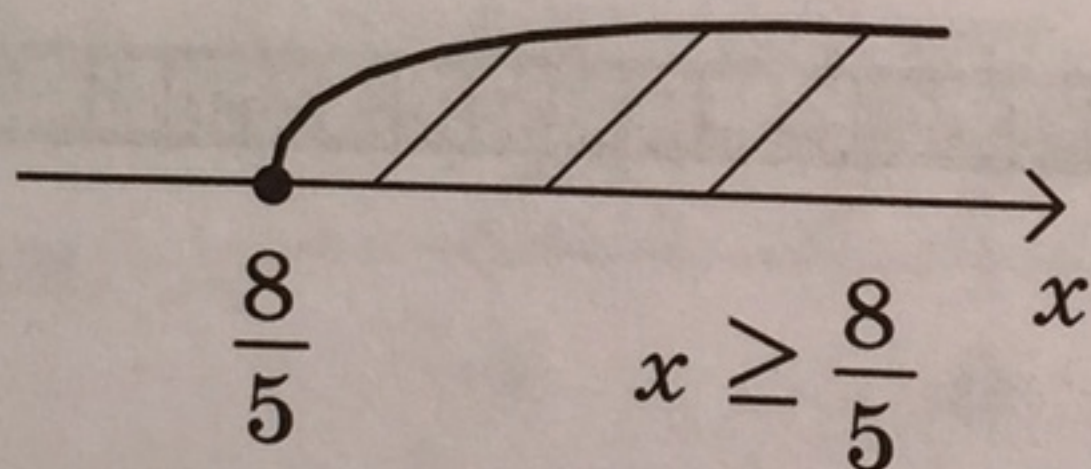
3.  $|4-5x| \geq 4$

Решение. II тип неравенств

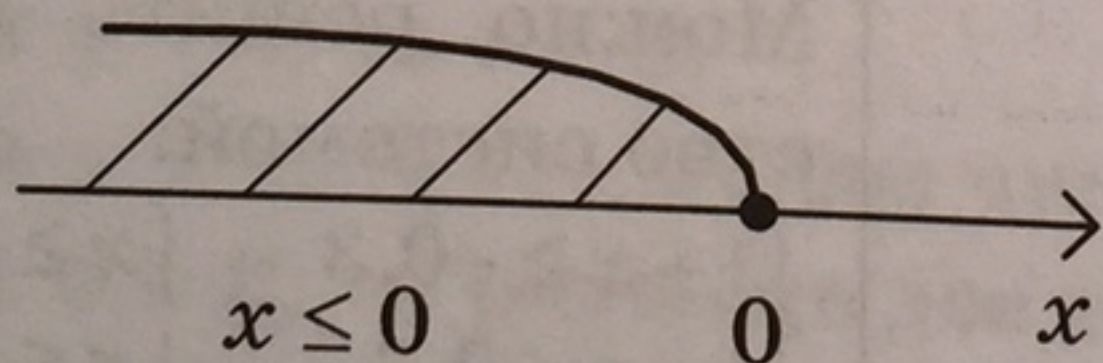
$$|5x-4| \geq 4$$

Решим два неравенства:

1.  $5x-4 \geq 4; 5x \geq 4+4 | :5; x \geq \frac{8}{5}; x \geq 1,6$



2.  $5x-4 \leq -4; 5x \leq -4+4 | :5; x \leq 0$



Ответ:  $(-\infty; 0] \cup [1,6; +\infty)$ .

4. Найдите все целые значения  $x$  из решения неравенства  $|5x+3| < 7$ .

Решение. I тип неравенств

1).  $-7 < 5x+3 < 7 | -3 \Leftrightarrow -7-3 < 5x < 7-3 \Leftrightarrow \Leftrightarrow -10 < 5x < 4 | :5$

$$-2 < x < \frac{4}{5}$$

$$|4-5x| = |5x-4|;$$

$$|a-b| = |b-a|$$

$$5x-4 = t;$$

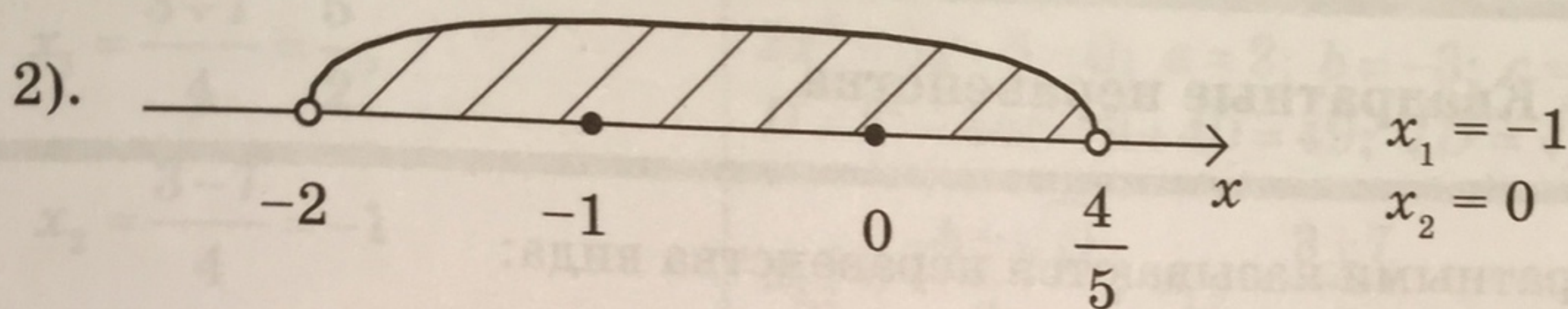
$$|t| \geq a,$$

значит,  $t < -a$

или  $t > a$

$$\frac{8}{5} = 1,6$$





Ответ:  $-1; 0$  — целые решения неравенства.

**З а м е ч а н и е.** В дальнейшем мы будем применять алгоритмы решения неравенств  $|t| \geq a$  к выражениям, отличным от  $t = kx + b$ .

**Попробуй не реши!**

1.  $|1 - x| = 7$

2.  $|2x - 3| \leq 5$

**Попробуй-ка реши!**

3. Постройте график  $y = 3 - \frac{|1 - x|}{1 - x}$  (см. тему «Функция»).

Ответ: 1).  $-6; 8$ ; 2).  $[-1; 4]$ ; 3). Рис. 7.

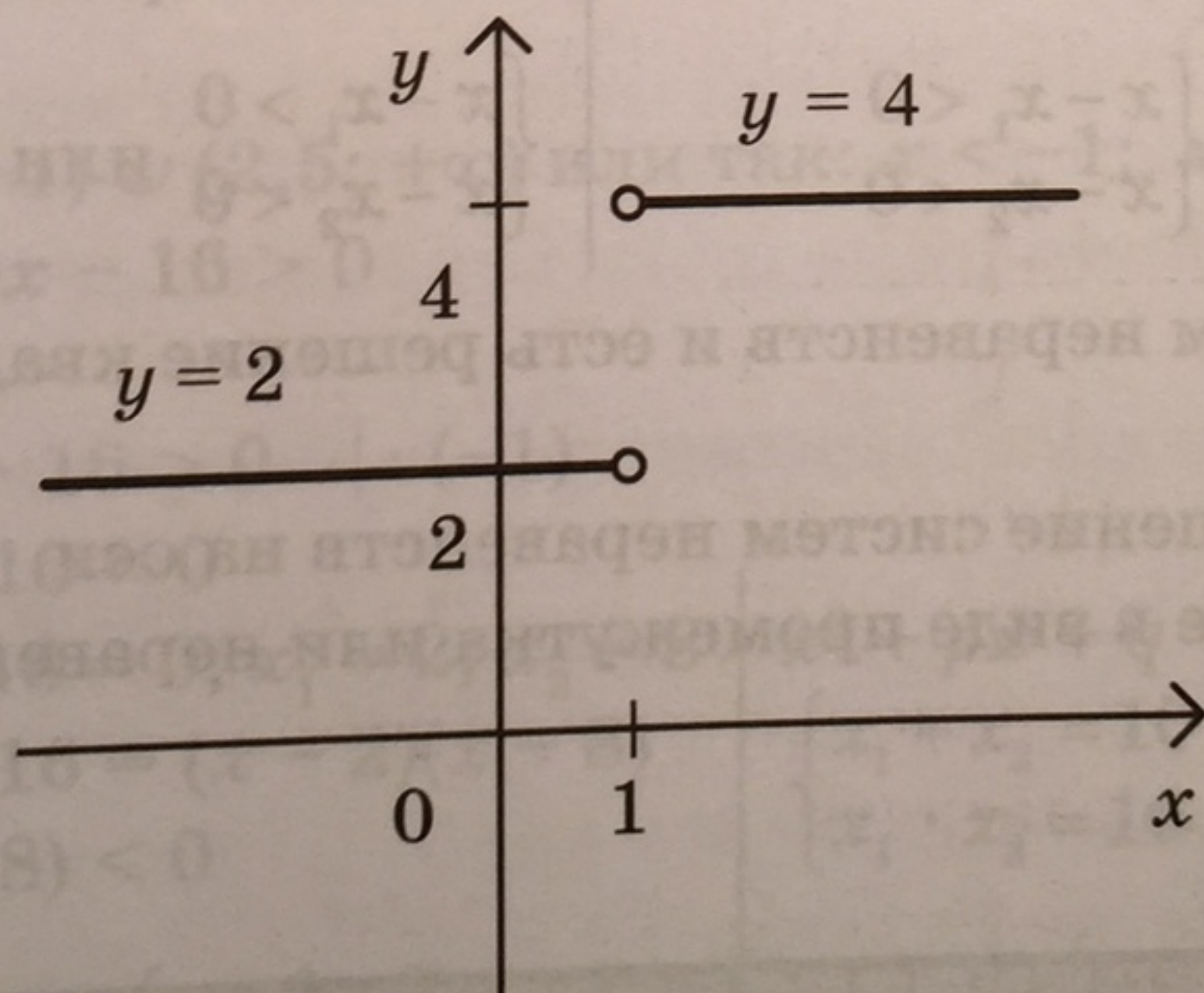


Рис. 7



## § 6. Квадратные неравенства

Квадратными называются неравенства вида:

$$1. ax^2 + bx + c \geq 0$$

$$2. ax^2 + bx \geq 0$$

$$3. ax^2 + c \geq 0$$

### Алгоритм

38

### Решение квадратных неравенств

1. Приведите неравенство к одному из видов:  $ax^2 + bx + c \geq 0$ ;  $ax^2 + bx \geq 0$ ;  $ax^2 + c \geq 0$ . Если  $a < 0$ , то умножьте на  $(-1)$  обе части неравенства, поменяв его знак на противоположный.
2. Решите уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$ ;  $ax^2 + bx = 0$  или  $ax^2 + c = 0$  за чертой; если есть корни, то перейдите к п. 3.
3. Разложите трехчлен на множители:  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ .
4. Решите неравенство  $a(x - x_1)(x - x_2) \geq 0 \mid : a$ . Составьте системы неравенств:

если  $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ , то

$$\begin{cases} x - x_1 > 0 \\ x - x_2 > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - x_1 < 0 \\ x - x_2 < 0 \end{cases}$$

если  $(x - x_1)(x - x_2) < 0$ , то

$$\begin{cases} x - x_1 > 0 \\ x - x_2 < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - x_1 < 0 \\ x - x_2 > 0 \end{cases}$$

Решение систем неравенств и есть решение квадратного неравенства.

5. Изобразите решение систем неравенств на оси.
6. Ответ запишите в виде промежутка или неравенства.

### Примеры

Решите неравенство.

1. ГИА.  $2x^2 - 3x - 5 > 0$

Решение.

1). Решите уравнение:  $2x^2 - 3x - 5 = 0$



$$x_1 = \frac{3+7}{4} = \frac{5}{2};$$

$$x_2 = \frac{3-7}{4} = -1$$

$$2x^2 - 3x - 5 = 0; a = 2; b = -3; c = -5$$

$$D = b^2 - 4ac = 9 + 40 = 49; \sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; x_{1,2} = \frac{3 \pm 7}{4}$$

2). Разложите на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$2x^2 - 3x - 5 = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x + 1)$$

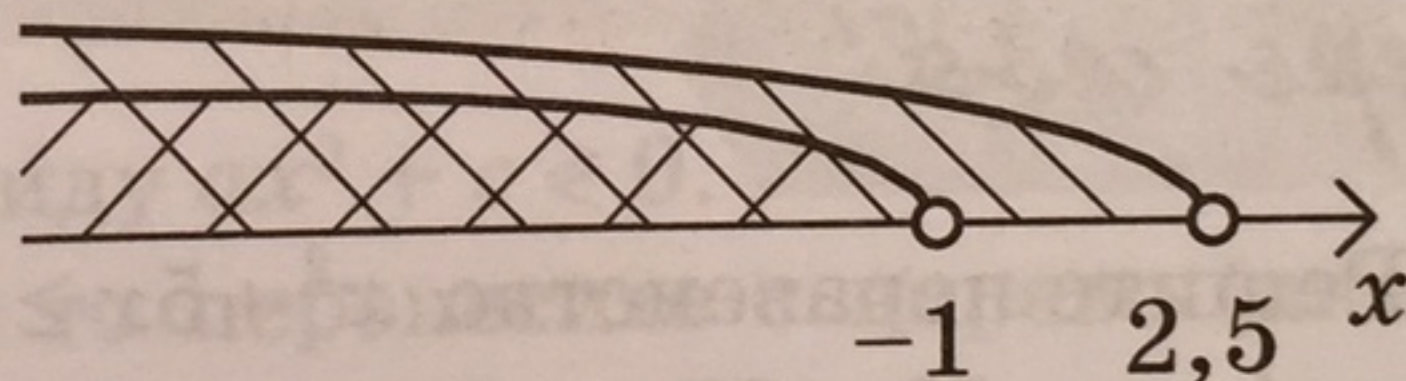
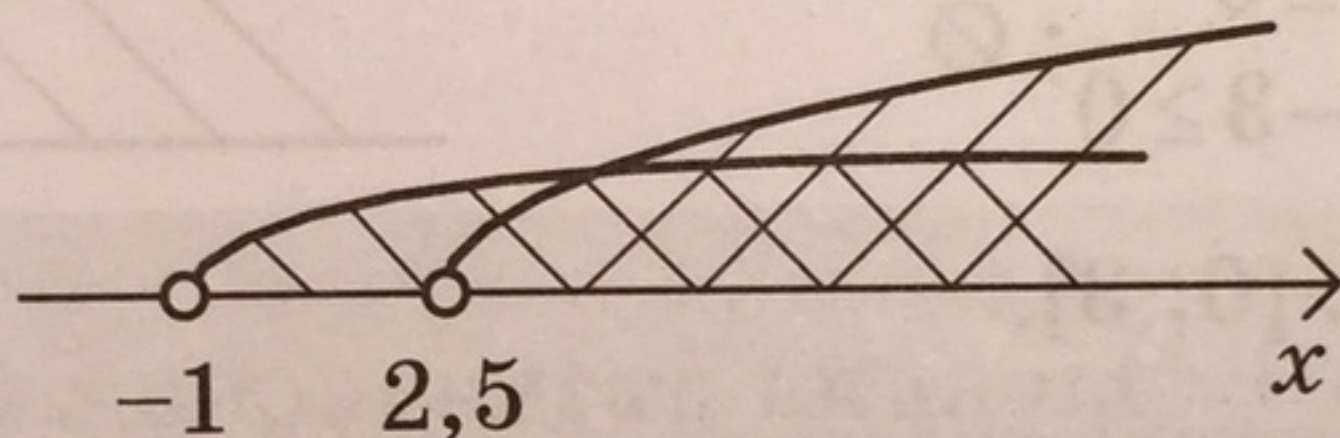
3).  $2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x + 1) > 0 \mid : 2; \left(x - \frac{5}{2}\right)(x + 1) > 0$

$$\begin{cases} x - \frac{5}{2} > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - \frac{5}{2} < 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} ab > 0; \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}; \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x > 2,5 \\ x > -1 \end{cases}; x > 2,5$$

или

$$\begin{cases} x < 2,5 \\ x < -1 \end{cases}; x < -1$$



Ответ:  $(-\infty; -1) \cup (2,5; +\infty)$  или так:  $x < -1; x > 2,5$ .

2. ГИА.  $-x^2 + 10x - 16 > 0$

Решение.

1).  $-x^2 + 10x - 16 > 0 \mid \cdot (-1)$

$$x^2 - 10x + 16 < 0$$

2).  $x^2 - 10x + 16 = 0; x_1 = 2; x_2 = 8$

3).  $x^2 - 10x + 16 = (x - 2)(x - 8)$

4).  $(x - 2)(x - 8) < 0$

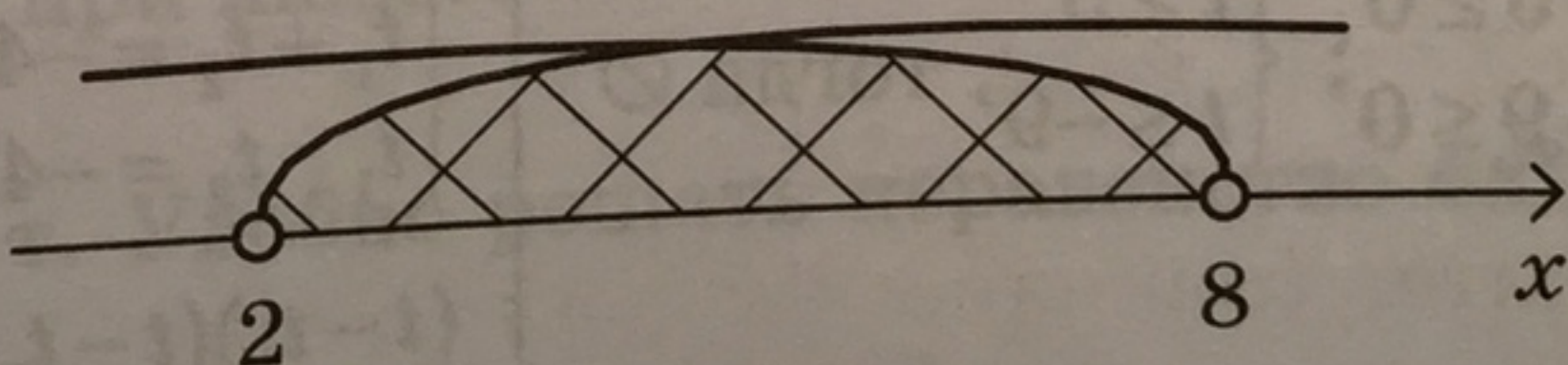
$$x^2 + px + q = 0;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 \cdot x_2 = 16 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

5).  $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 8 < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - 2 < 0 \\ x - 8 > 0 \end{cases}$

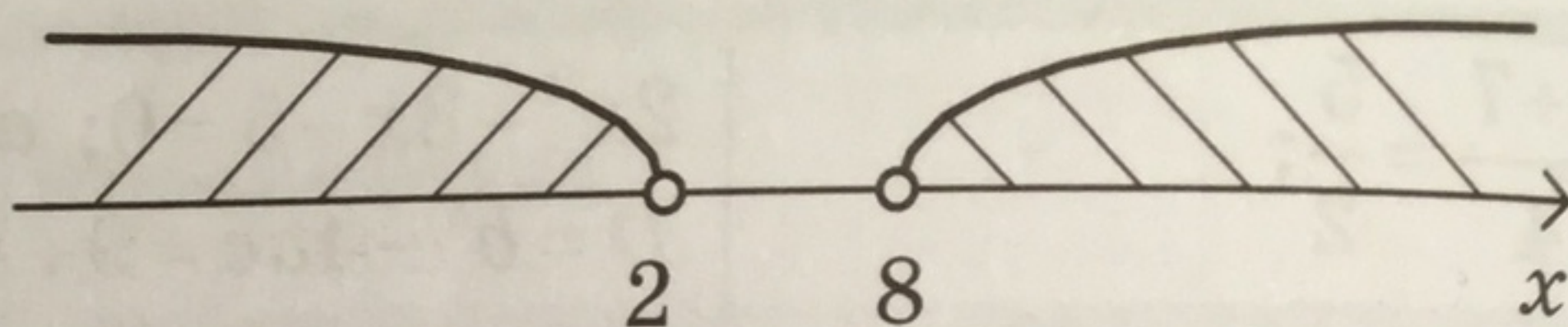
$$ab < 0; \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}; \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ x < 8 \end{cases}; 2 < x < 8$$





или  $\begin{cases} x < 2 \\ x > 8 \end{cases}; \emptyset$



Ответ:  $(2; 8)$  или так:  $2 < x < 8$ .

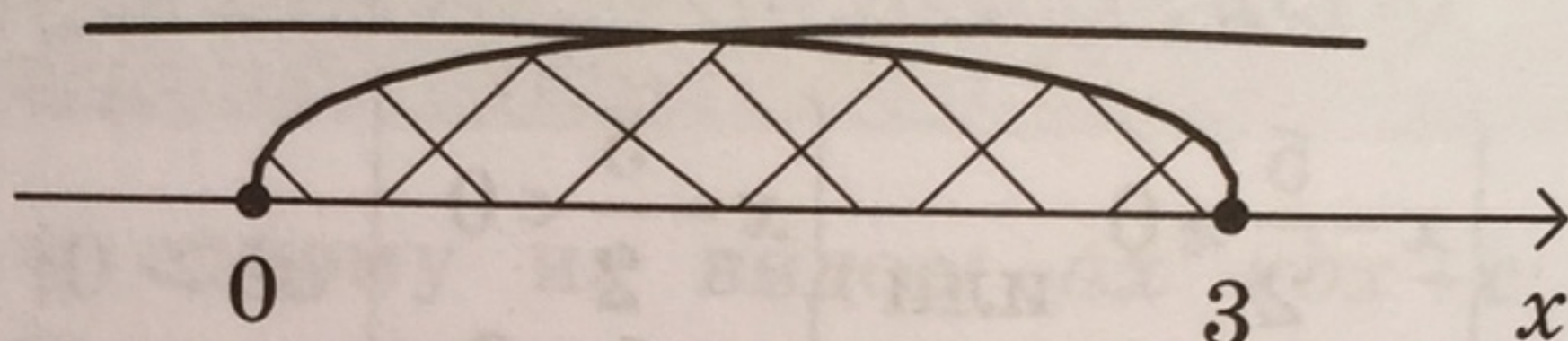
### 3. ГИА. $x^2 - 3x \leq 0$

Решение.

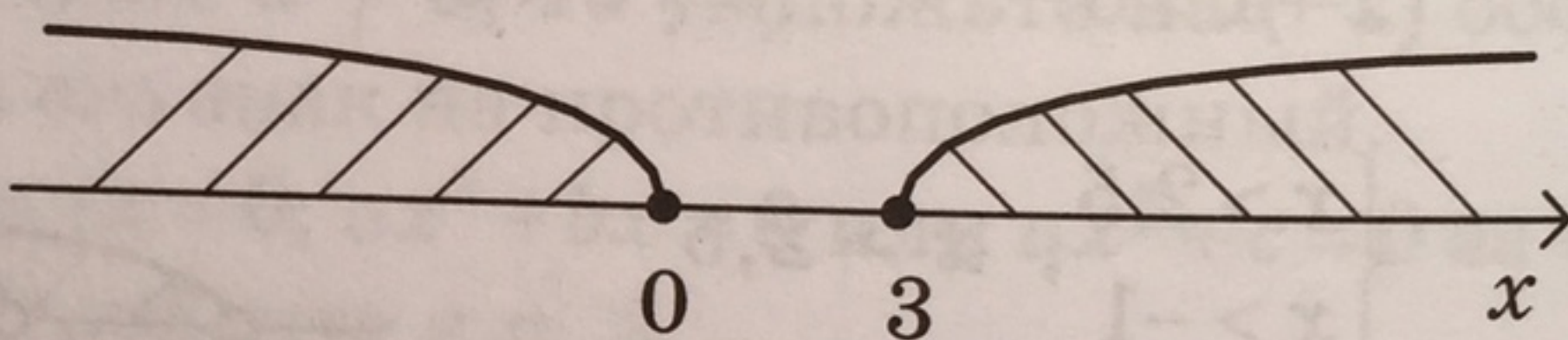
1).  $x(x-3) \leq 0$

2).  $\begin{cases} x \geq 0 \\ x-3 \leq 0 \end{cases}$  или  $\begin{cases} x \leq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \quad \left| \quad ab \leq 0; \begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}; \begin{cases} a \leq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \right.$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 3 \end{cases}; 0 \leq x \leq 3$



или  $\begin{cases} x \leq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases}; \emptyset$



Ответ:  $[0; 3]$ .

## Проверь себя!

ГИА. Решите неравенство  $x^2 + 5x \geq 0$ .

Ответ:  $(-\infty; -5] \cup [0; +\infty)$ .

4. ГИА. При каком наименьшем целом значении  $x$  выполняется неравенство  $x^4 + 4x^2 - 45 \leq 0$ ?

Решение.

1). Приведем данное неравенство к квадратному неравенству.

Примем  $x^2 = t$ ;  $x^4 = t^2$ ,  $t \geq 0$ , получим  $\begin{cases} t^2 + 4t - 45 \leq 0 \\ t \geq 0 \end{cases}$

2). Решим неравенство:  $t^2 + 4t - 45 \leq 0$

3). Разложим на множители  
 $(t-5)(t+9) \leq 0$

4).  $\begin{cases} t-5 \geq 0 \\ t+9 \leq 0 \end{cases}; \begin{cases} t \geq 5 \\ t \leq -9 \end{cases}$ , тогда  $\emptyset$

$$t^2 + 4t - 45 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -4 \\ t_1 \cdot t_2 = -45 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{matrix} t_1 = -9 \\ t_2 = 5 \end{matrix} \right.$$

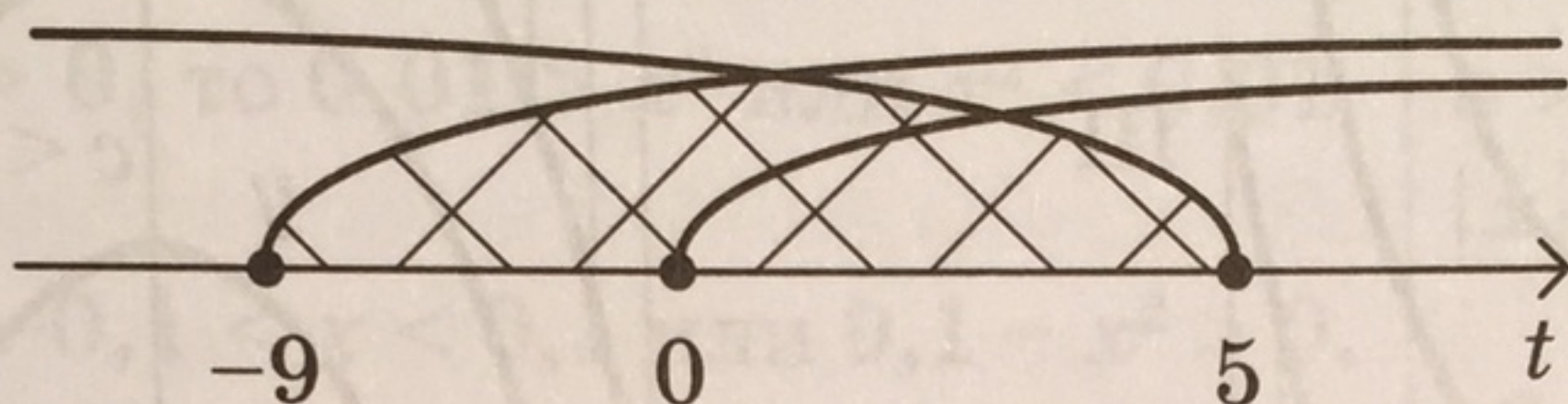
$$(t-t_1)(t-t_2) \leq 0$$



$$\text{или } \begin{cases} t-5 \leq 0 \\ t+9 \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} t \leq 5 \\ t \geq -9 \\ t \geq 0 \end{cases}$$

тогда  $0 \leq t \leq 5$

$$ab \leq 0, \text{ то } \begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a \leq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$$



5). Решим неравенство:

$$0 \leq x^2 \leq 5$$

$$x^2 \leq 5; \sqrt{x^2} \leq \sqrt{5}; |x| \leq \sqrt{5};$$

$$-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}; \approx -2,24 \leq x \leq \approx 2,24$$

$x = -2$  — наименьшее целое

Ответ:  $-2$ .

$$x^2 > 0 \text{ при любом } x$$

$$\sqrt{x^2} = |x|; x \leq a,$$

$$\text{то } -a \leq x \leq a;$$

$$\sqrt{5} \approx 2,24$$

Алгоритм

39

Решение неравенств вида  $ax^2 + c \geq 0$

1. Приведите неравенство к виду  $ax^2 + c \geq 0$ .
2. Если  $a$  и  $c$  разного знака, то перенесите  $c$  вправо (изменив его знак) и разделите на  $a$  обе части неравенства  $ax^2 \geq c \mid : a; x^2 \geq \frac{c}{a}$ .
3. Извлеките корень из каждой части неравенства:

$$\sqrt{x^2} \geq \sqrt{\frac{c}{a}}; \quad |x| \geq \sqrt{\frac{c}{a}}$$

4. Решите неравенство с модулем: если  $|x| < \sqrt{\frac{c}{a}}$ , то  $-\sqrt{\frac{c}{a}} < x < \sqrt{\frac{c}{a}}$ ;

$$\text{если } |x| > \sqrt{\frac{c}{a}}, \text{ то } x < -\sqrt{\frac{c}{a}} \text{ или } x > \sqrt{\frac{c}{a}}$$

Если  $a$  и  $c$  одного знака, то при  $a > 0$  и  $ax^2 + c > 0$  при любом  $x$ ;  
если  $a < 0$ , то  $ax^2 + c < 0$  при любом  $x$ .

**Полезный совет.** Удобно решать неравенство  $ax^2 + c \geq 0$  по графику рис. 8, 9.



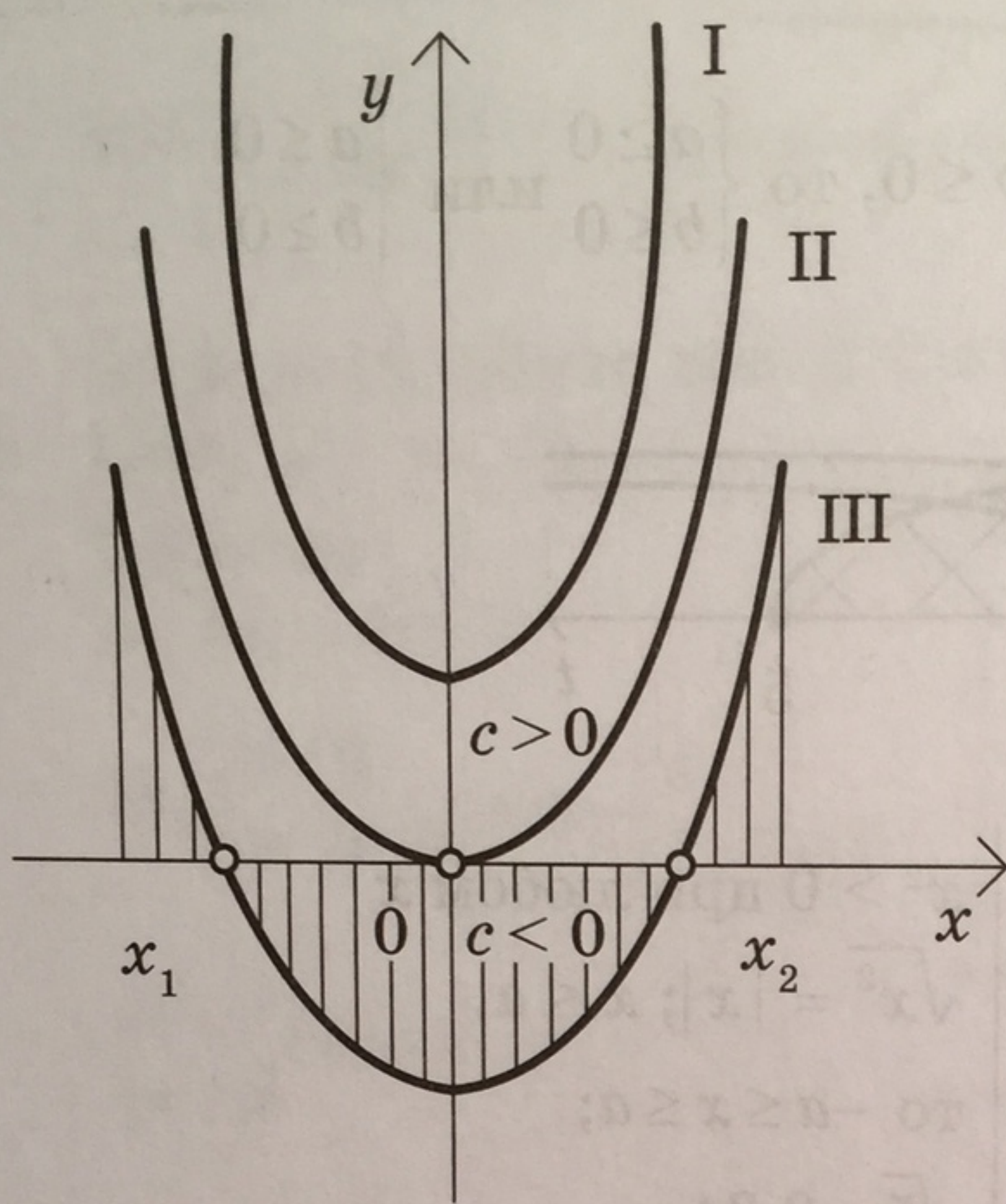


Рис. 8

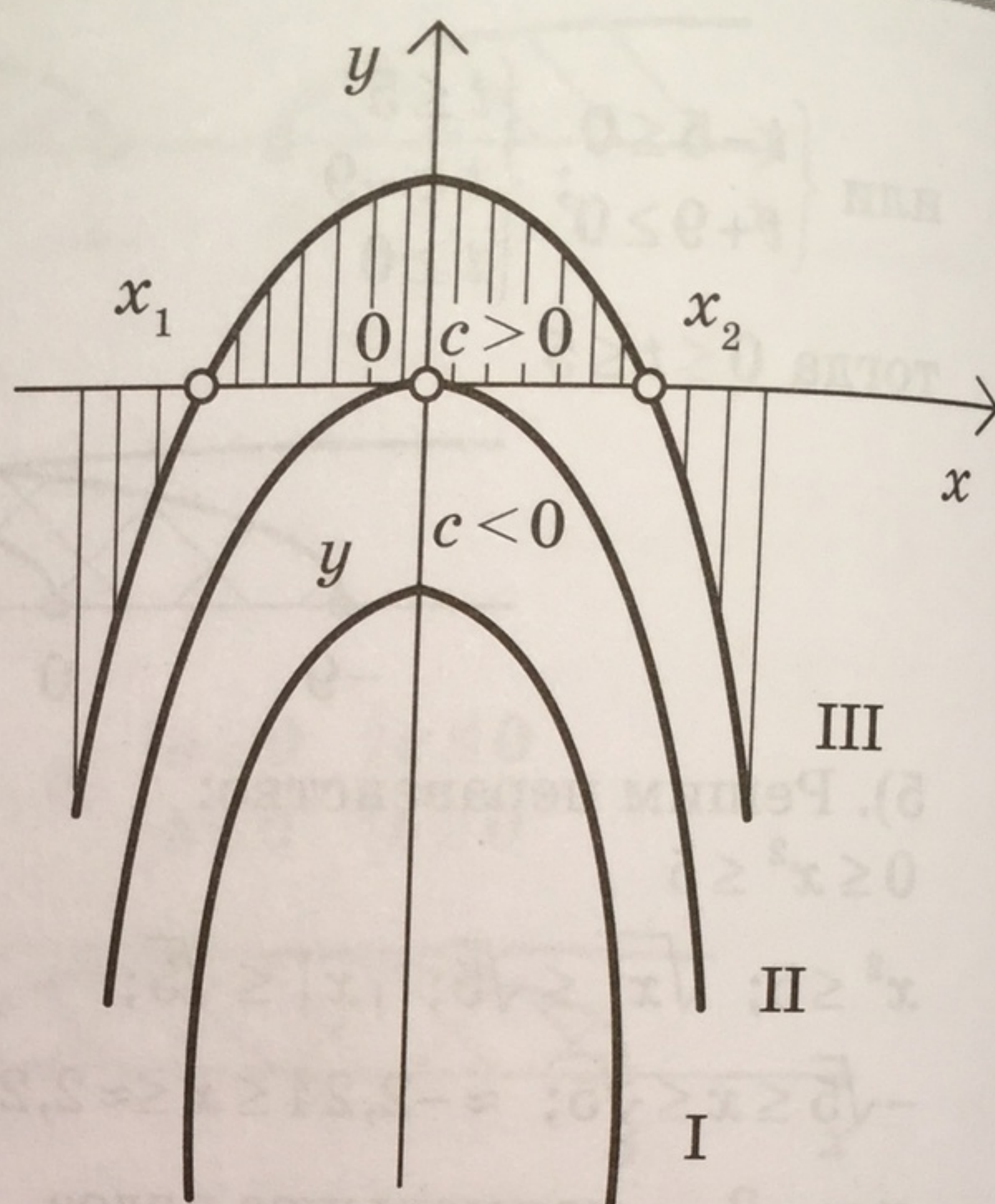


Рис. 9

- 1).  $ax^2 + c > 0$   
 $a > 0; c > 0; x$  — любое (I)
- 2).  $a > 0; c = 0; x$  — любое;  
 $x \neq 0$  (II)
- 3).  $a > 0; c < 0;$   
 $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$  (III)
- 4).  $ax^2 + c < 0;$   
 $a > 0; c < 0; x \in (x_1; x_2)$

- 1).  $ax^2 + c < 0$   
 $a < 0; c < 0; x$  — любое (I)
- 2).  $a < 0; c = 0; x$  — любое;  
 $ax^2 < 0$  (II);  $x \neq 0$
- 3).  $a < 0; c > 0;$   
 $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$  (III)
- 4).  $ax^2 + c > 0; x \in (x_1; x_2)$   
 $a < 0; c > 0$

### Примеры

Решите неравенство.

1. ГИА.  $x^2 \leq 81$

Решение.

- 1).  $x^2 \leq 81;$  2).  $\sqrt{x^2} \leq \sqrt{81}; |x| \leq 9$   
или  $x^2 - 9^2 \leq 0$ , то  $(x - 9)(x + 9) \leq 0$

- 3).  $-9 \leq x \leq 9$

Ответ:  $[-9; 9]$ .

$|x| \leq t; -t \leq x \leq t$   
Или разложите  
на множители



## 2. ГИА. $0,01 - x^2 > 0$

Решение.

$$\begin{array}{l} 1). 0,01 - x^2 > 0, \text{ то } 0,01 > x^2 \text{ или } x^2 < 0,01 \\ 2). |x| < 0,1; -0,1 < x < 0,1 \text{ или } 0,1 - x^2 > 0, \\ \text{то } (0,1 - x)(0,1 + x) > 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} a > b, \text{ то } b < a \\ |x| < m; -m < x < m \end{array} \right.$$

Ответ:  $(-0,1; 0,1)$ .

**Проверь себя!**

ГИА. Решите неравенство  $3x^2 \geq 75$ .

Ответ:  $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$ .

Решение.

1). Найдите корни многочлена  $P(x)$ .

2). Найдите корни уравнения  $P(x) = 0$ .

3). Найдите корни  $x_1, x_2, \dots, x_n$  на оси  $Ox$ : (если несколько корней, то все их).

4). Найдите корни  $x_1, x_2, \dots, x_n$  на оси  $Ox$ : (если несколько корней, то все их).

5). Найдите корни  $x_1, x_2, \dots, x_n$  на оси  $Ox$ : (если несколько корней, то все их).

6). Найдите корни  $x_1, x_2, \dots, x_n$  на оси  $Ox$ : (если несколько корней, то все их).

7). Найдите корни  $x_1, x_2, \dots, x_n$  на оси  $Ox$ : (если несколько корней, то все их).

8). Найдите корни  $x_1, x_2, \dots, x_n$  на оси  $Ox$ : (если несколько корней, то все их).

9). Найдите корни  $x_1, x_2, \dots, x_n$  на оси  $Ox$ : (если несколько корней, то все их).

10). Найдите корни  $x_1, x_2, \dots, x_n$  на оси  $Ox$ : (если несколько корней, то все их).

11). Найдите корни  $x_1, x_2, \dots, x_n$  на оси  $Ox$ : (если несколько корней, то все их).

12). Найдите корни  $x_1, x_2, \dots, x_n$  на оси  $Ox$ : (если несколько корней, то все их).

13). Найдите корни  $x_1, x_2, \dots, x_n$  на оси  $Ox$ : (если несколько корней, то все их).

14). Найдите корни  $x_1, x_2, \dots, x_n$  на оси  $Ox$ : (если несколько корней, то все их).

15). Найдите корни  $x_1, x_2, \dots, x_n$  на оси  $Ox$ : (если несколько корней, то все их).



## § 7.

## Метод интервалов (промежутков)

Рассмотрим неравенства, содержащие рациональные выражения:  $P(x) \geq 0$  и  $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ , где  $P(x)$  и  $Q(x)$  — многочлены.

Решение неравенств  $P(x) \geq 0$  удобно рассматривать на числовой оси. Корни уравнения  $P(x) = 0$  разбивают ось на несколько промежутков, на каждом из которых многочлен сохраняет свой знак.

При решении дробно-рационального неравенства  $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$  корни числителя  $P(x) = 0$  и корни знаменателя  $Q(x) = 0$  разобьют ось на промежутки, на каждом из которых дробь  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  сохраняет свой знак (объяснение см.: 10–11-й классы).

На основании этого рассмотрим алгоритм применения метода интервалов.

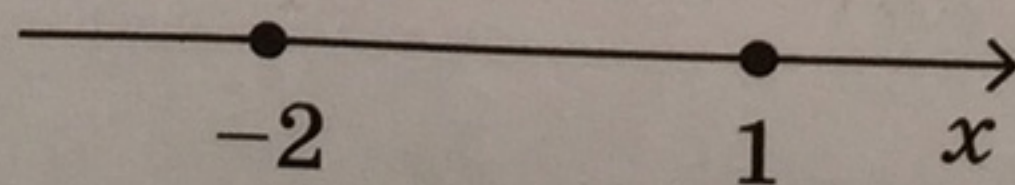
## Алгоритм

40

Решение неравенств методом интервалов  $P(x) \geq 0$ 

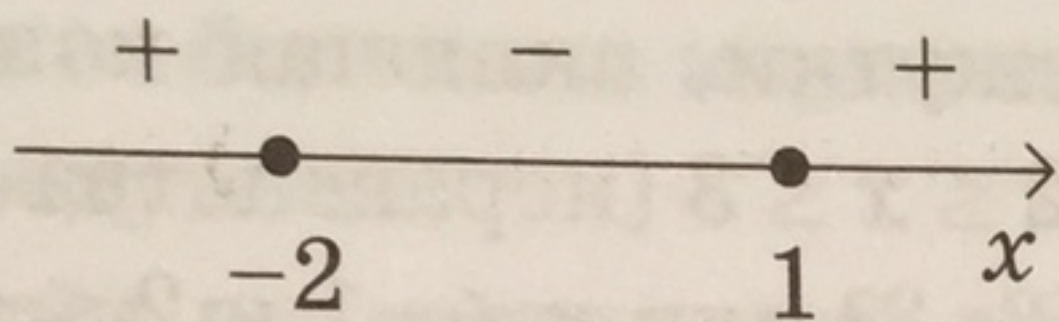
1. Разложите на множители многочлен.
2. Найдите корни уравнения  $P(x) = 0$ .
3. Нанесите корни  $x_1, x_2, \dots$  на ось  $Ox$ : (если неравенство строгое или  $P(x)$  — знаменатель дроби ( $<$  или  $>$ ), то точку изобразите светлым кружочком ( $\circ$ ); если неравенство нестрогое ( $\leq$  или  $\geq$ ), то точки  $x_1, x_2, \dots$  изобразите плотными точками ( $\bullet$ )).

Например:  $(x-1)(x+2) \geq 0$



4. Определите знак на правом промежутке (возьмите любое число из правого промежутка и подставьте его в неравенство), полученный знак многочлена нанесите на ось (можно определить знак на любом промежутке, а затем чередовать знаки).

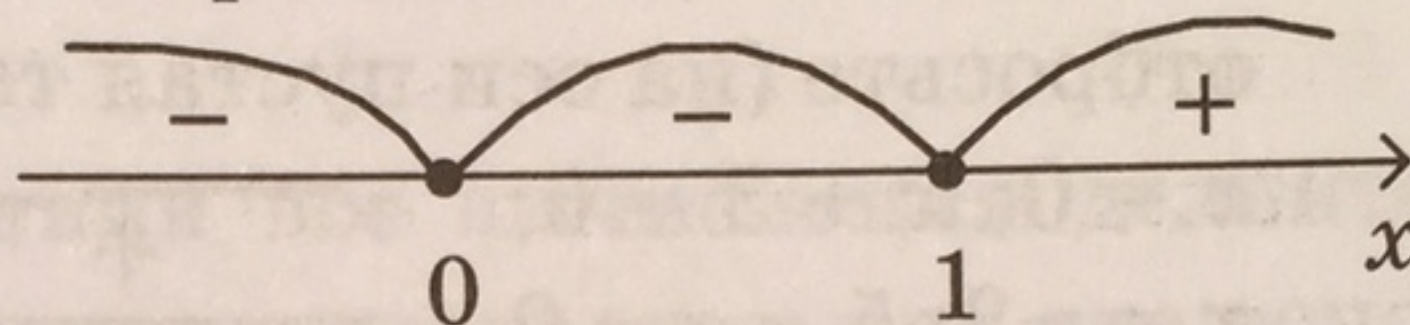




На втором промежутке справа знак поменяется, на третьем промежутке знак снова поменяется и т. д.

Если множитель стоит в четной степени ( $x^2$ ;  $(x+1)^2$ ;  $(x-2)^2$ ...), то знак не меняется при переходе через корень этого множителя.

Например, при решении неравенства  $x^2(x-1) \geq 0$



5. Выберите промежутки решения. Если неравенство имеет знак  $>0$ , то надо выбрать промежутки со знаком «+», если знак последнего неравенства  $<0$ , то — промежутки со знаком «-».

Ответ запишите промежутками.

**З а м е ч а н и е.** Когда усвоите применение алгоритма, возможно пункты 3, 4, 5 выполнять только на оси.

### Примеры

Решите неравенства.

1.  $(x-2)(x+1)(3-x) \geq 0$

Решение.

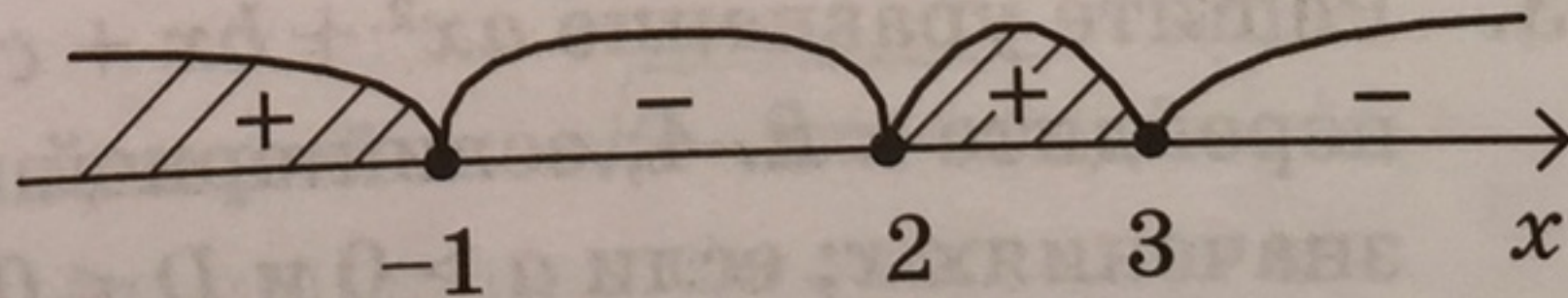
- 1). Найдите корни множителей:

$$x-2=0; x_1=2;$$

$$x+1=0; x_2=-1;$$

$$3-x=0; x_3=3$$

- 2). Изобразите корни на оси:



- 3). Определите знак на правом промежутке, пусть  $x=4$ :

$$(4-2)(4+1)(3-4) < 0, \text{ значит, при } x > 3 \text{ знак «-»}.$$

- 4). Прочередуйте знаки на промежутках.

- 5). Выделите штриховкой промежутки решения со знаком «+», так как знак неравенства  $\geq 0$ .



6). Запишите промежутки, включая концы промежутков, в решение:  $x \leq -1$  и  $2 \leq x \leq 3$  (неравенства нестрогие).

Ответ:  $(-\infty; -1] \cup [2; 3]$  или  $x \leq -1$  и  $2 \leq x \leq 3$ .

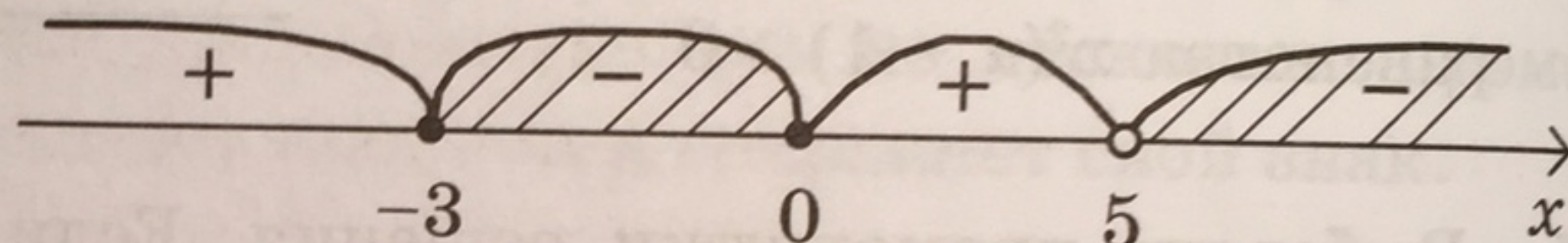
2.  $\frac{x(x+3)}{5-x} \leq 0$

1). Найдите корни числителя и знаменателя, корни знаменателя отбросьте (на оси пустая точка).

$x = 0; x + 3 = 0;$

$x = -3; 5 - x \neq 0;$

$x \neq 5$



2). Нанесите корни на ось ( $x = 5$  — пустая точка, знаменатель не равен нулю).

3). Знак «-» на правом промежутке.

4). Прочередуйте знаки на промежутках.

5). Заштрихуйте промежутки с «-».

6). Выберите промежутки со знаком минус, так как знак неравенства  $\leq 0$ , то  $-3 \leq x \leq 0$  и  $x > 5$ .

Ответ:  $[-3; 0] \cup (5; +\infty)$ .

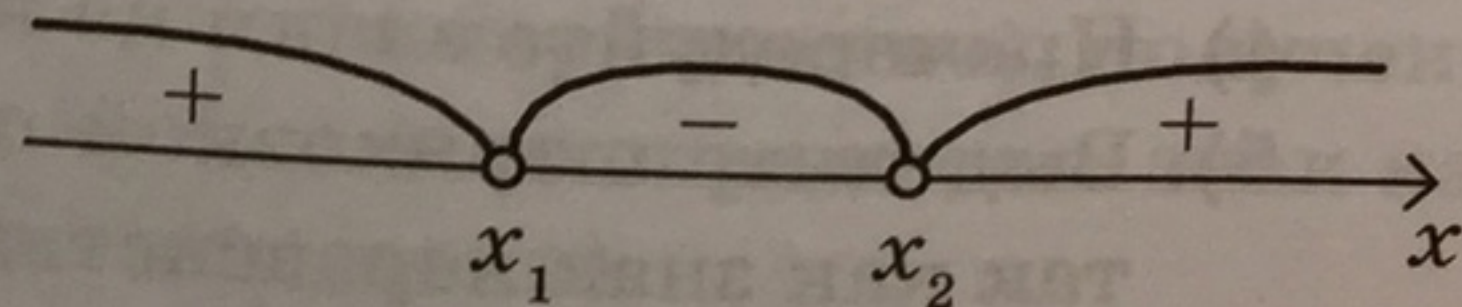
Алгоритм

41

Решение квадратных неравенств методом интервалов

1. Приведите неравенство к виду  $ax^2 + bx + c \geq 0$  ( $a \neq 0$ ).
2. Если  $a < 0$ , то умножьте обе части неравенства на  $(-1)$ , при этом изменив знак неравенства на противоположный.
3. Решите уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  за чертой: если корни есть, то перейдите к п. 4; если корней нет, то  $ax^2 + bx + c > 0$  при любых значениях  $x$ ; если  $a > 0$  и  $D < 0$ , если  $ax^2 + bx + c < 0$ , то решений нет.
4. Разложите трехчлен на множители  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$  или  $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ , получите неравенство:  $a(x - x_1)(x - x_2) \geq 0$ .

5. Нанесите корни  $x_1$  и  $x_2$  на ось  $Ox$ :





6. Если  $a > 0$ , то справа от большего корня знак «+», а далее на промежутках знаки чередуются.
7. Выберите промежутки решения: если знак неравенства больше нуля ( $>0$ ), то нужно заштриховать промежутки со знаком «+»; если знак неравенства меньше нуля ( $<0$ ), то выбирайте промежутки со знаком «-».
8. Ответ запишите в виде промежутков.

### Полезные советы

1. При нахождении корней уравнения все вычисления делайте за чертой, чтобы не мешать решению неравенства, так как это вспомогательные действия для решения неравенства.
2. Если  $a > 0$ , то знак «+» на промежутках вне корней и знак «-» внутри корней.

### Примеры

Решите неравенство.

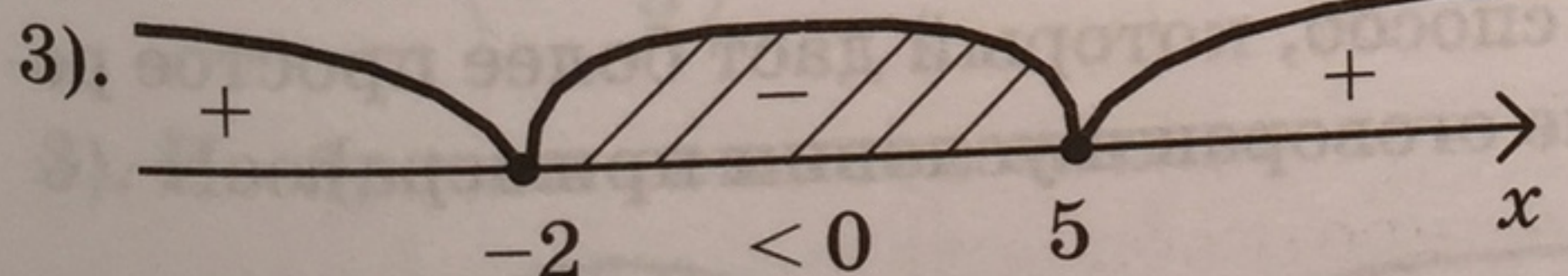
1.  $10 + 3x \geq x^2$

Решение.

1).  $0 \geq x^2 - 3x - 10$

$x^2 - 3x - 10 \leq 0$

2).  $(x - 5)(x + 2) \leq 0$



Ответ:  $[-2; 5]$ .

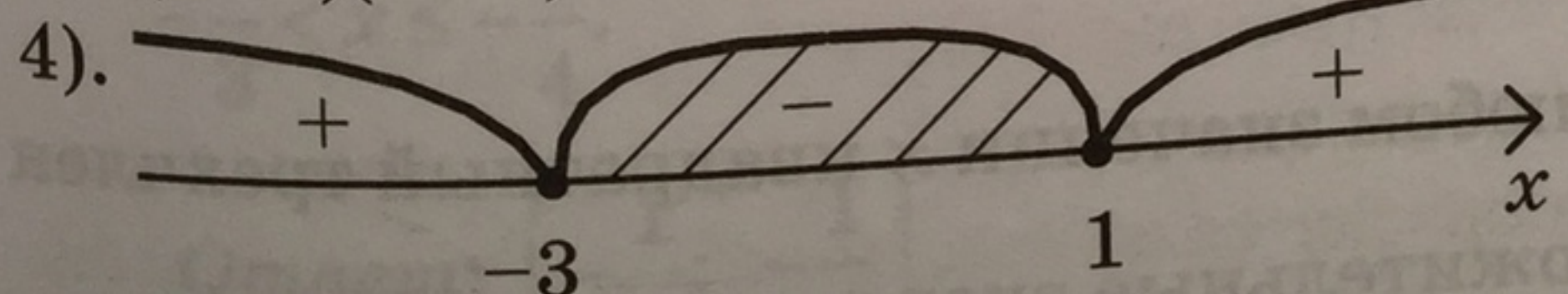
2. Найдите область допустимых значений  $x$ :  $\sqrt{3 - 2x - x^2}$

Решение.

1).  $3 - 2x - x^2 \geq 0$

2).  $-x^2 - 2x + 3 \geq 0 \mid \cdot (-1); x^2 + 2x - 3 \leq 0$

3).  $(x - 1)(x + 3) \leq 0$



Ответ:  $[-3; 1]$ .

$a > b$ , то  $b < a$

$x^2 - 3x - 10 = 0$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 & x_1 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = -10 & x_2 = -2 \end{cases}$

$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$

$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$

Справа «+»

$\sqrt{a}$  имеет смысл, если  $a \geq 0$

$-a \geq 0 \mid \cdot (-1)$ , получим  $a \leq 0$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 3} = -1 \pm 2$

$x_1 = 1; x_2 = -3$

$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$



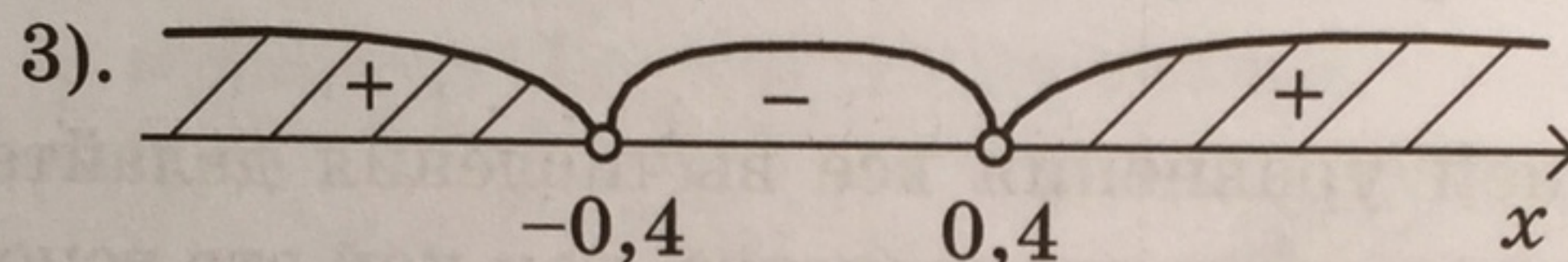
**Полезный совет.** По этому алгоритму решаются неравенства  $ax^2 + bx \geq 0$  и  $ax^2 + c \geq 0$ .

3. ГИА.  $x^2 - 0,16 > 0$

Решение.

1).  $x^2 - (0,4)^2 > 0$

2).  $(x - 0,4)(x + 0,4) > 0$



$$x^2 - 0,16 = 0;$$

$$x^2 = 0,16; x = \pm 0,4$$

4). Решением этого неравенства будут два промежутка  $(-\infty; -0,4) \cup (0,4; +\infty)$ .

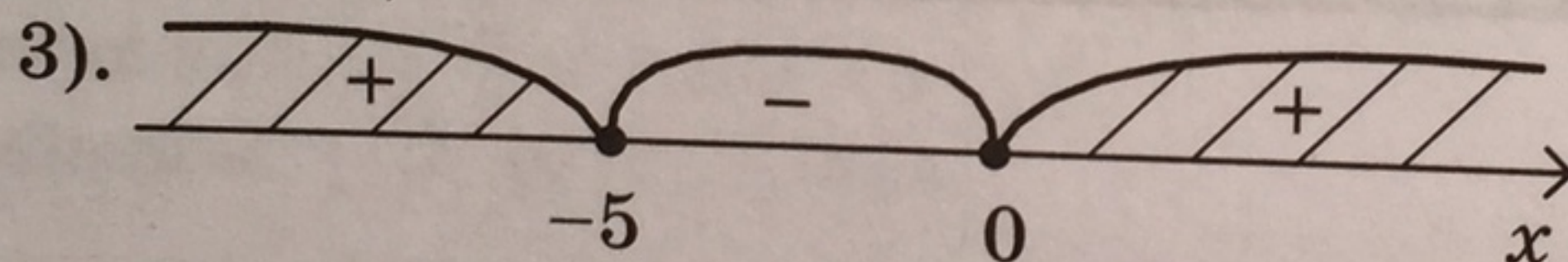
Ответ:  $(-\infty; -0,4) \cup (0,4; +\infty)$ .

4. ГИА.  $x^2 + 5x \geq 0$

Решение.

1).  $x^2 + 5x \geq 0$

2).  $x(x + 5) \geq 0$



$$x^2 + 5x = 0;$$

$$x(x + 5) = 0;$$

$$x_1 = 0; x_2 = -5$$

4).  $(-\infty; -5] \cup [0; +\infty)$

Ответ:  $(-\infty; -5] \cup [0; +\infty)$ .

**З а м е ч а н и е.** Один и тот же пример можно решать разными способами, поэтому выберите тот способ, который даст более простое решение (если способ решения не оговорен в условии примера).

**Проверь себя!**

ГИА. Решите неравенства методом интервалов.

1.  $4 - x^2 < 0$

2.  $-x^2 + 3x - 2 \leq 0$

3.  $x^2 - 8x > 0$

Ответ: 1).  $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ ; 2).  $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$ ;  
3).  $(-\infty; 0) \cup (8; +\infty)$ .

5. ГИА. Докажите, что при любом значении  $x$  квадратный трехчлен  $\frac{1}{2}x^2 - x + 1$  принимает положительные значения.



Решение.

$$\frac{1}{2}x^2 - x + 1 > 0,$$

так как  $D = b^2 - 4ac = 1 - 2 < 0$ ,  
то следует, что  $y > 0$   
при любом  $x$

если  $a > 0$ ,  $D < 0$ ,  
то  $y > 0$  при любом  $x$

$$a = \frac{1}{2}; b = -1; c = 1;$$

$$D = b^2 - 4ac;$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1 - 2 = -1$$

6. ГИА. Найдите решения неравенства  $x^2 - 1\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} < 0$ , принадлежащие промежутку  $\left[-1; -\frac{1}{4}\right]$ .

Решение.

1). Упростим:

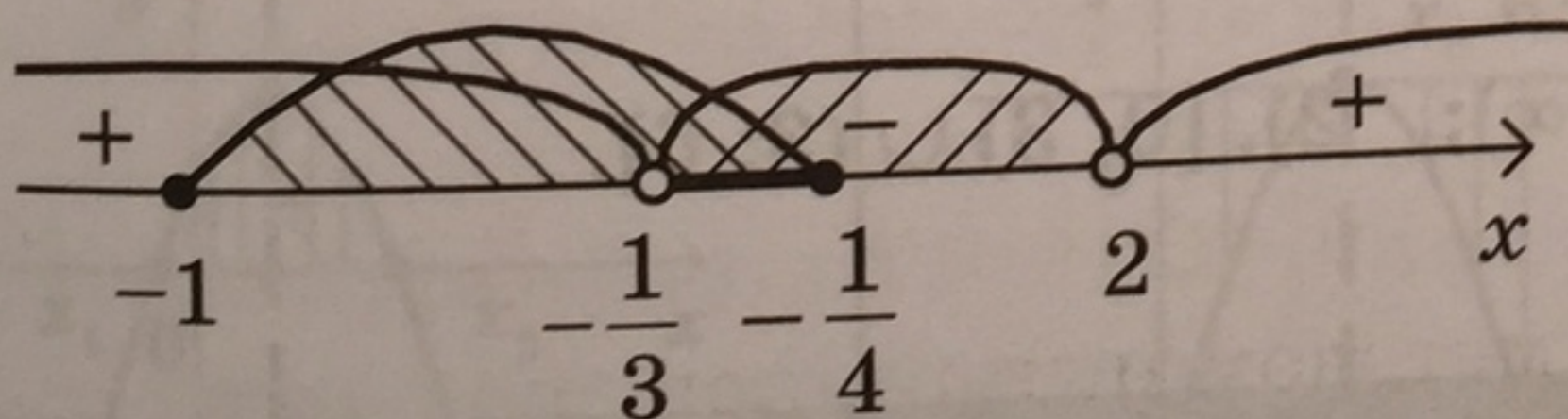
$$x^2 - 1\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} < 0 \quad | \cdot 3$$

2). Разложим на множители:

$$3x^2 - 5x - 2 < 0$$

$$3(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right) < 0$$

3). Изобразим решение на оси:



$$3x^2 - 5x - 2 = 0; a = 3; b = -5; c = -2$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6};$$

$$D = b^2 - 4ac = 25 + 24 = 49;$$

$$x_1 = \frac{5+7}{6} = 2; x_2 = \frac{5-7}{6} = -\frac{1}{3};$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

$$-\frac{1}{4} > -\frac{1}{3}, \text{ так как } \left| -\frac{1}{4} \right| < \left| -\frac{1}{3} \right|$$

4). Согласуем решение с промежутком  $\left[-1; -\frac{1}{4}\right]$  на оси, получим

$$-\frac{1}{3} < x \leq -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}\right].$$



7. ГИА. Решите неравенство  $\frac{x^2 - 14x - 15}{10 - 4x} > 0$ .

Решение.

1). Разложите на множители числитель и знаменатель:

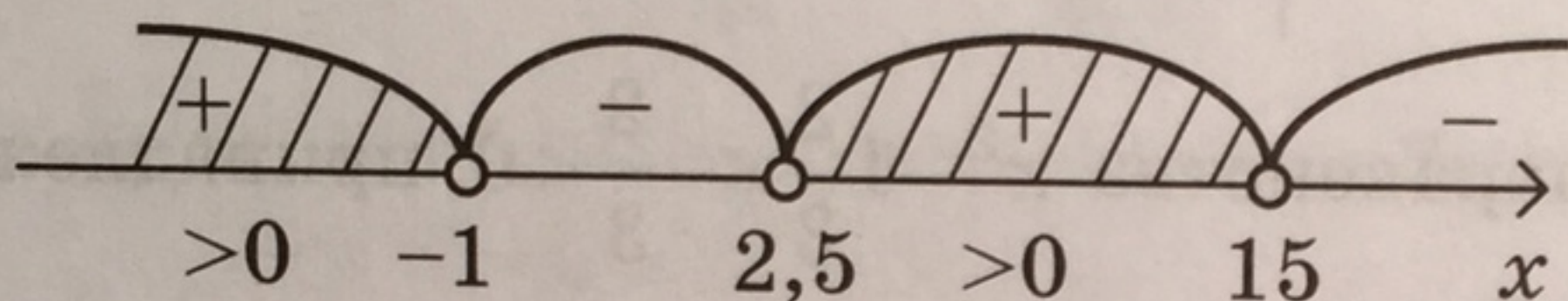
$$\frac{(x+1)(x-15)}{2(5-2x)} > 0;$$

$$x^2 - 14x - 15 = 0;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 14 & x_1 = -1 \\ x_1 \cdot x_2 = -15 & x_2 = 15 \end{cases}$$

2). Нанесите на ось корни:  $x_1 = -1$ ;  
 $x_2 = 15$ ;  $x_3 \neq 2,5$

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$



3). Определите знак на промежутке: пусть  $x = 0$ ,

$$\text{тогда } \frac{(0+1)(0-15)}{10-0} < 0 \text{ (или по знаку на правом промежутке).}$$

4). Прочередуйте знаки. Выберите промежуток со знаком «+» ( $> 0$ ):  
 $x < -1$ ;  $2,5 < x < 15$

Ответ:  $(-\infty; -1) \cup (2,5; 15)$ .

**Попробуй не реши!** Решите неравенства.

1.  $x^2 - 3x + 2 < 0$     2.  $x^2 - 9 < 0$     3.  $3x^2 - 5x \geq 0$

Ответ: 1).  $(1; 2)$ ; 2).  $(-3; 3)$ ; 3).  $(-\infty; 0) \cup \left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$ .

**Попробуй-ка реши!**

Решите неравенства.

1.  $x^3 - 64x > 0$     2.  $\frac{x^2 - 6x}{x^2 - 6x + 9} \leq 0$

Ответ: 1).  $(-8; 0) \cup (8; +\infty)$ ; 2).  $[0; 3) \cup (3; 6]$ .

Алгоритм

42

Графическое решение  
квадратных неравенств

1. Найдите корни уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ .
2. Определите знак  $a$  ( $a > 0$  или  $a < 0$ ) и по знаку  $a$  — направление ветвей параболы (если  $a > 0$ , то ветви параболы направлены вверх  $\cup$ ; если  $a < 0$ , то ветви направлены вниз  $\cap$ ).



3. Постройте схему графика функции  $y = ax^2 + bx + c$ . Нанесите на ось  $Ox$  корни уравнения, если они есть, и проведите ось симметрии через середину отрезка  $[x_1; x_2]$  (или через  $x_0$  — единственный корень уравнения) параллельно оси  $Oy$ . Изобразите на оси симметрии вершину параболы ниже оси  $Ox$  (произвольно), если  $D > 0$  и  $a > 0$  (рис. 10), или выше оси  $Ox$  (произвольно), если  $D > 0$  и  $a < 0$  (рис. 13). Если  $x_0$  — единственный корень, то вершина параболы в точке  $(x_0; 0)$  (рис. 11, 14). Если корней нет и  $a > 0$ , то вершину параболы изобразите произвольно над осью  $Ox$  (рис. 12), и если  $a < 0$  и  $D < 0$ , то вершина — под осью  $Ox$  (рис. 15).
4. Изобразите решение неравенства, используя схему графика (рис. 10–15).

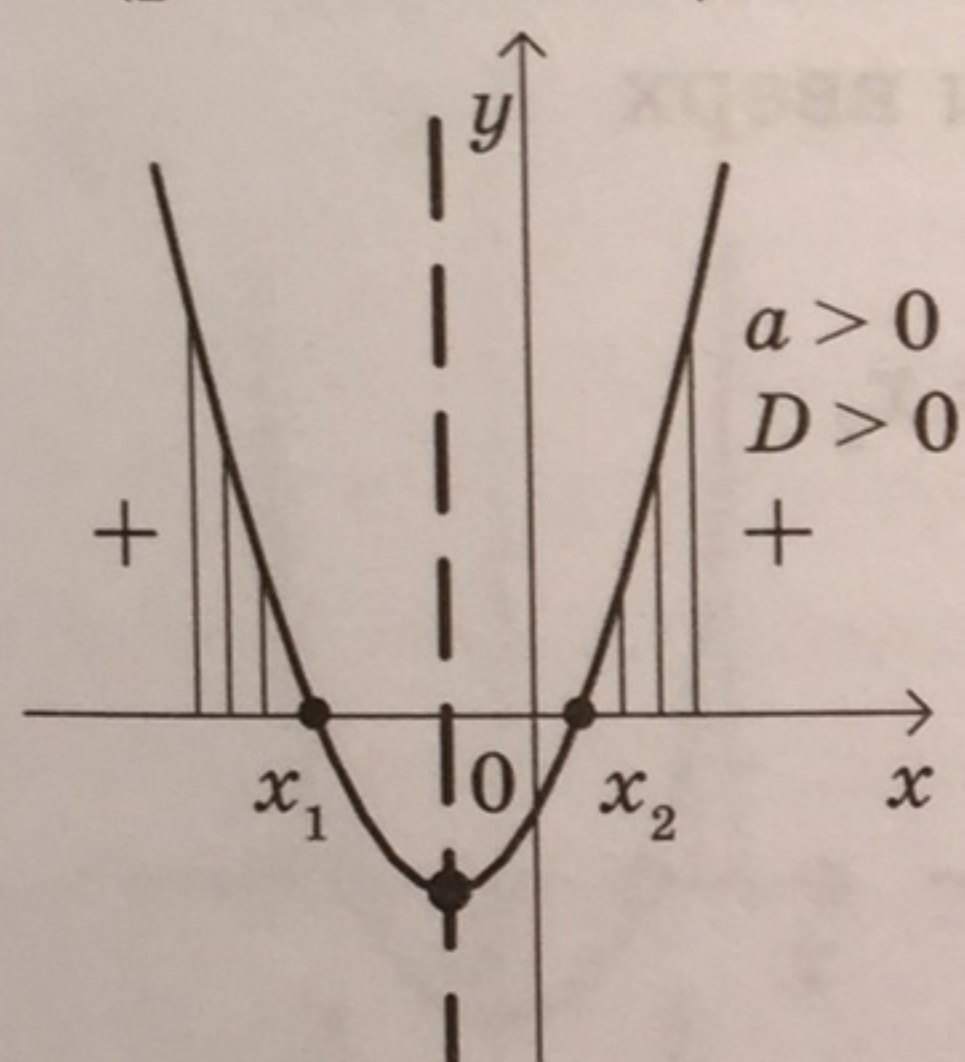


Рис. 10

$y > 0$  при  $x < x_1$  и  $x > x_2$   
 $y < 0$  при  $x_1 < x < x_2$

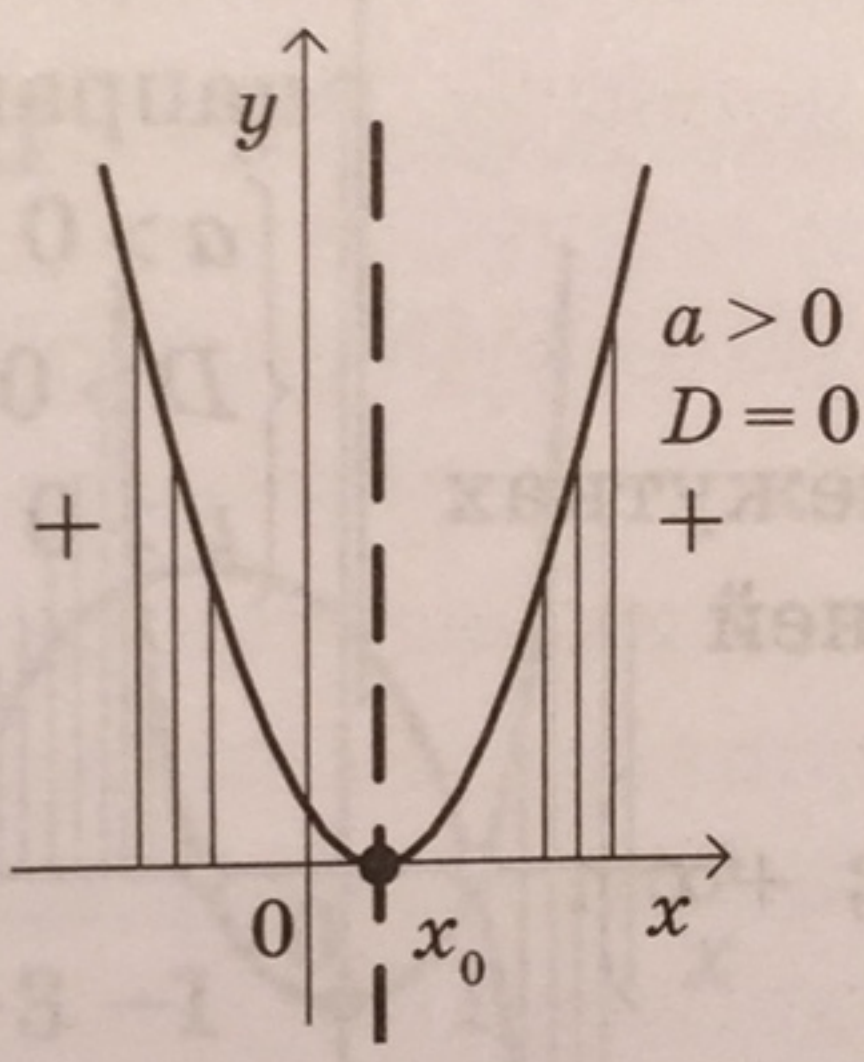


Рис. 11

$y \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}$   
 $y < 0$  нет решений

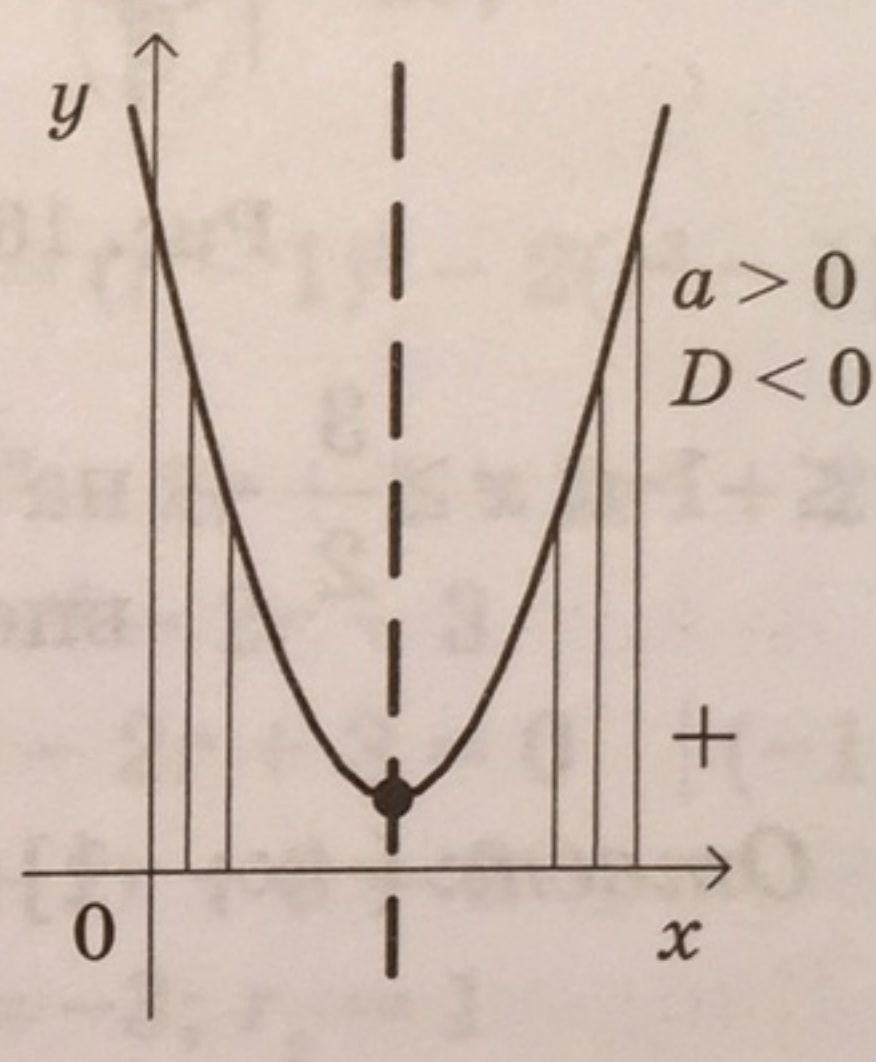


Рис. 12

$y > 0 \quad x \in \mathbb{R}$   
 $y < 0$  нет решений

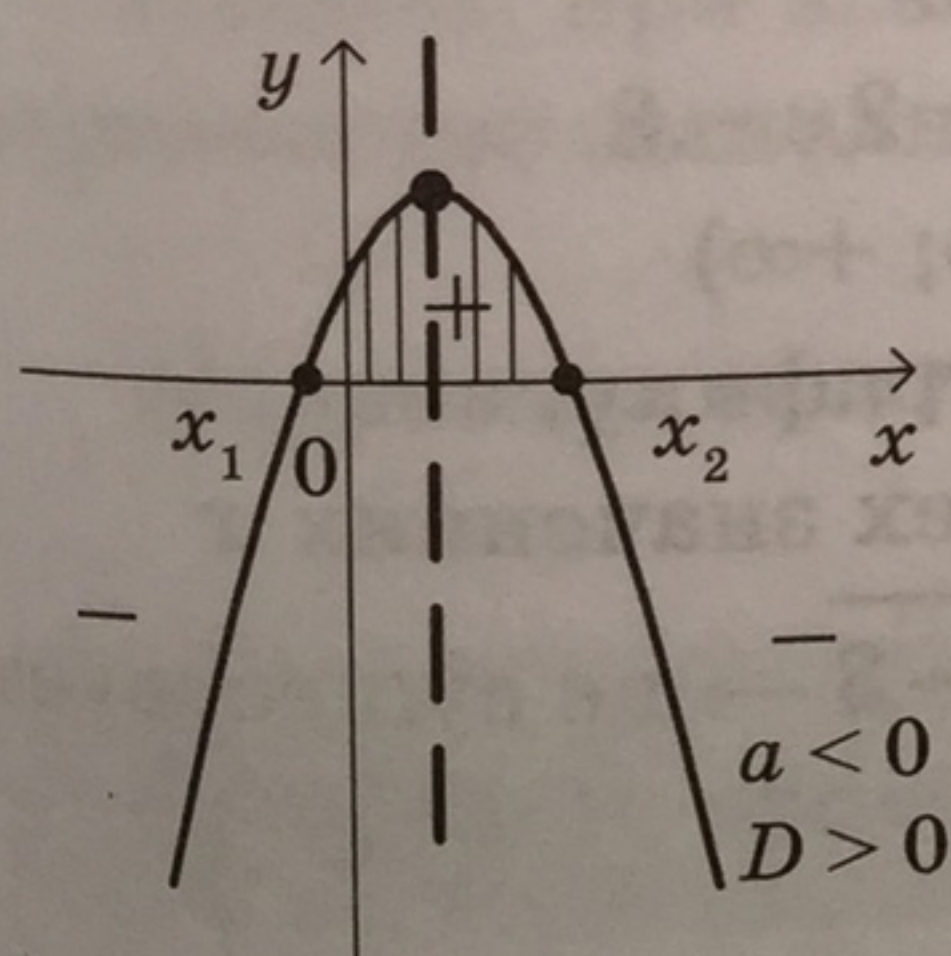


Рис. 13

$y > 0$  при  $x_1 < x < x_2$   
 $y < 0$  при  $x < x_1$  и  $x > x_2$

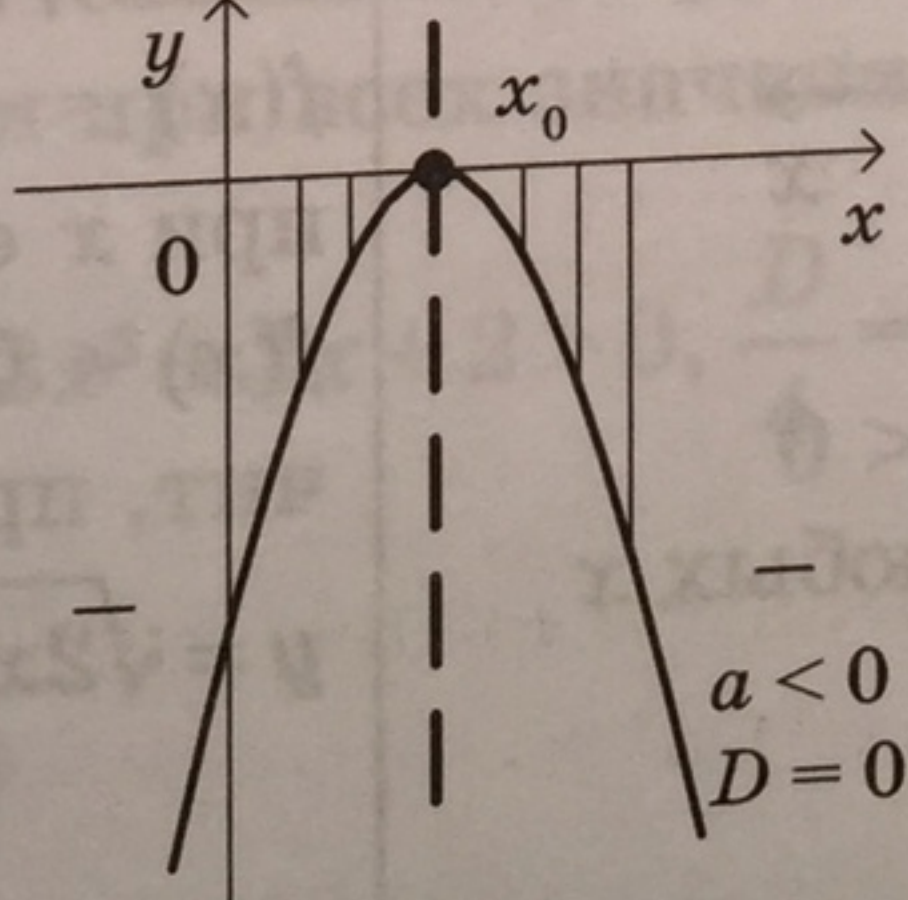


Рис. 14

$y \leq 0 \quad x \in \mathbb{R}$   
 $y > 0$  нет решений

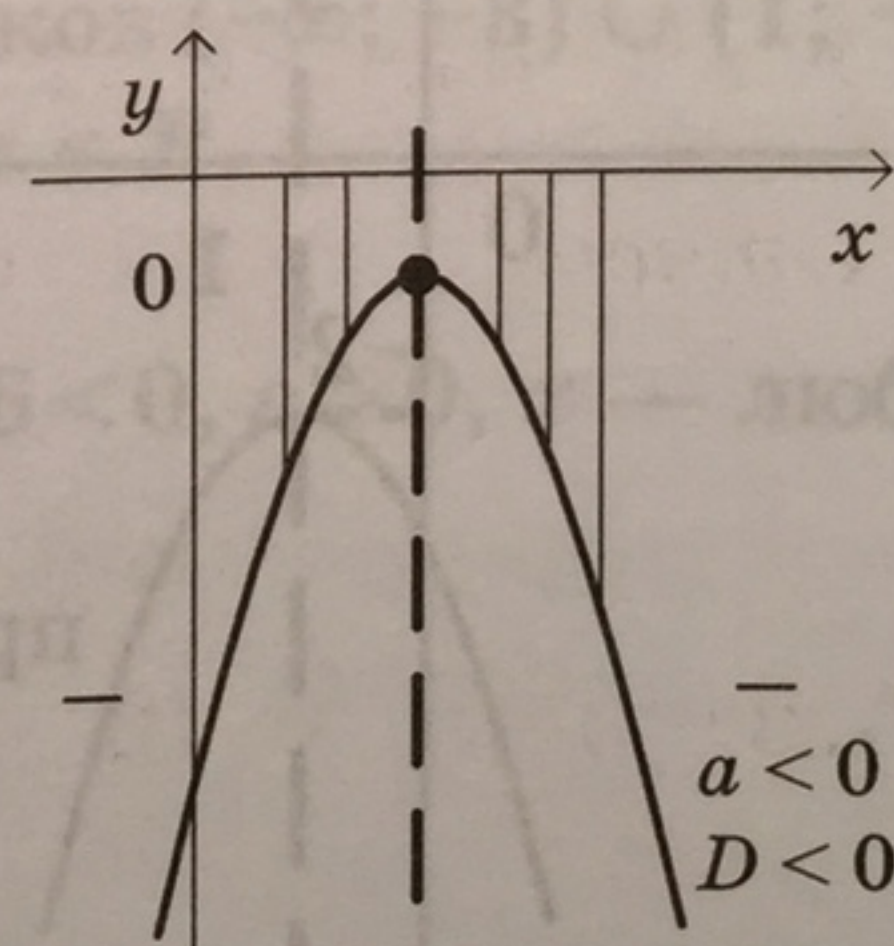


Рис. 15

$y < 0 \quad x \in \mathbb{R}$   
 $y > 0$  нет решений



## Примеры

Решите неравенства, используя схему графика.

1.  $2x^2 - x - 3 \geq 0$  (рис. 16)

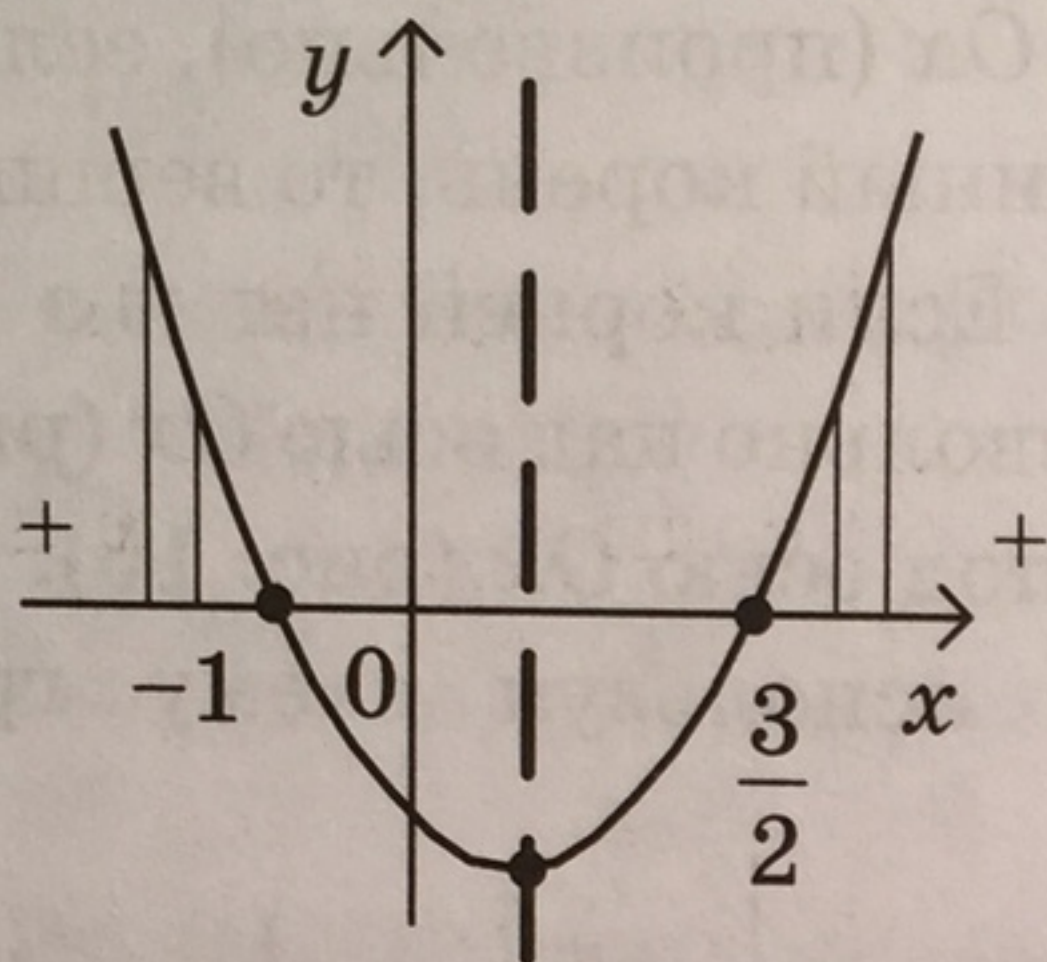


Рис. 16

 $x \leq -1$  и  $x \geq \frac{3}{2}$  — на промежутках  
вне корней

Ответ:  $(-\infty; -1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$ .

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4}$$

$$x_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}; \quad x_2 = -1; \quad a = 2, a > 0,$$

ветви параболы  
направлены вверх

$$\begin{cases} a > 0 \\ D > 0 & x_1 \neq x_2 \\ y > 0 \end{cases}$$

2. Найдите область определения функции  $y = \sqrt{2x - x^2 - 3}$ , используя график (рис. 17).

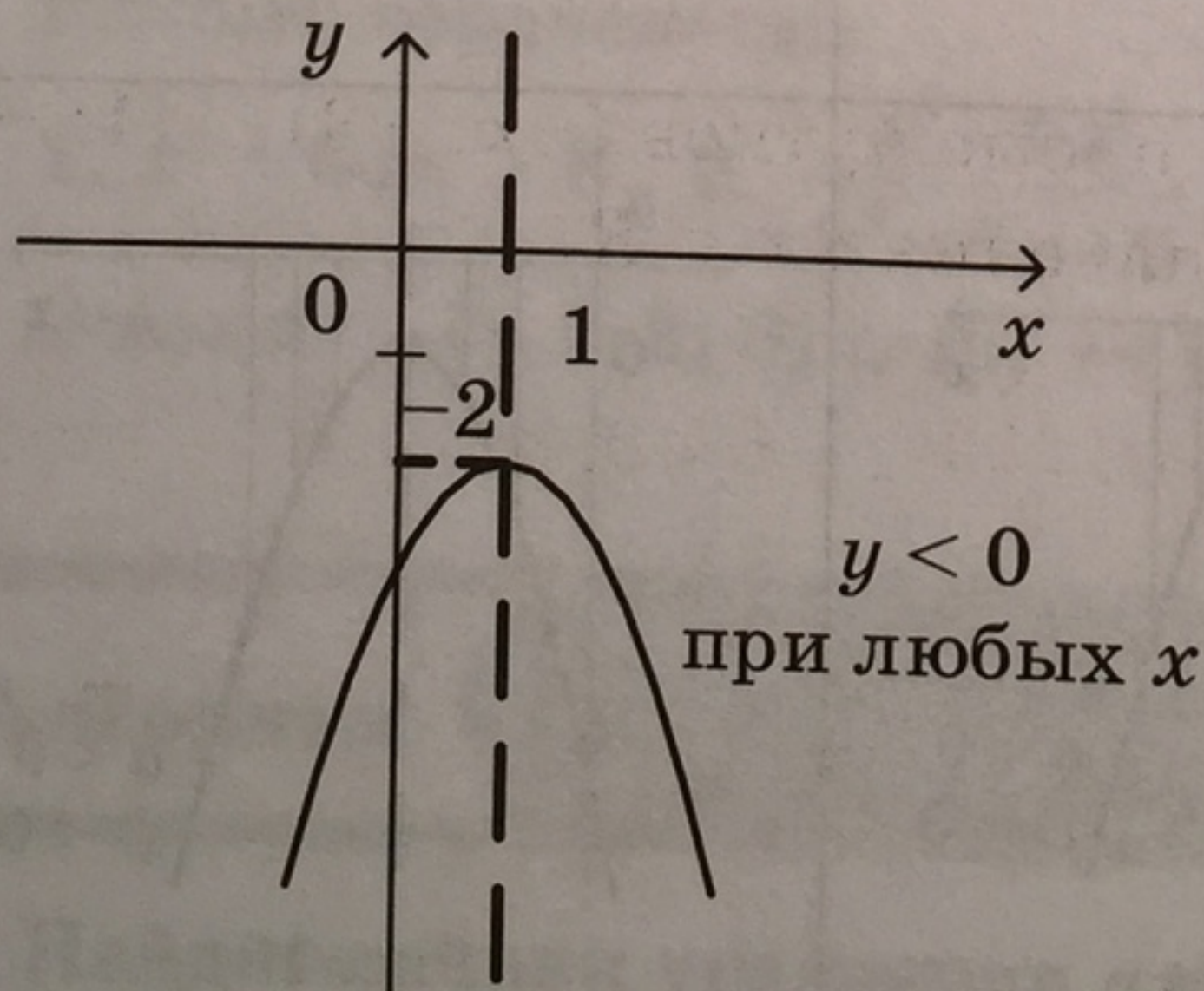


Рис. 17

$y = \sqrt{f(x)}$  имеет смысл,  
если  $f(x) \geq 0$

$$f(x) = -x^2 + 2x - 3$$

при  $x \in (-\infty; +\infty)$

$f(x) < 0$  по графику, значит, при всех значениях  $x$

$y = \sqrt{2x - x^2 - 3}$  — не существует

Ответ:  $D(y) = \emptyset$ .



3. Найдите все значения  $r$ , для которых при всех действительных значениях  $x$  выполняется неравенство  $(r^2 - 1)x^2 + 2(r - 1)x + 2 > 0$ .  
Решение.

$$\underbrace{(r^2 - 1)}_a x^2 + \underbrace{2(r - 1)}_b x + \underbrace{2}_c > 0$$

1). Составим систему:

$$\begin{cases} r^2 - 1 > 0 & \text{(I)} \\ -r^2 - 2r + 3 < 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

2). Решим графически каждое неравенство:

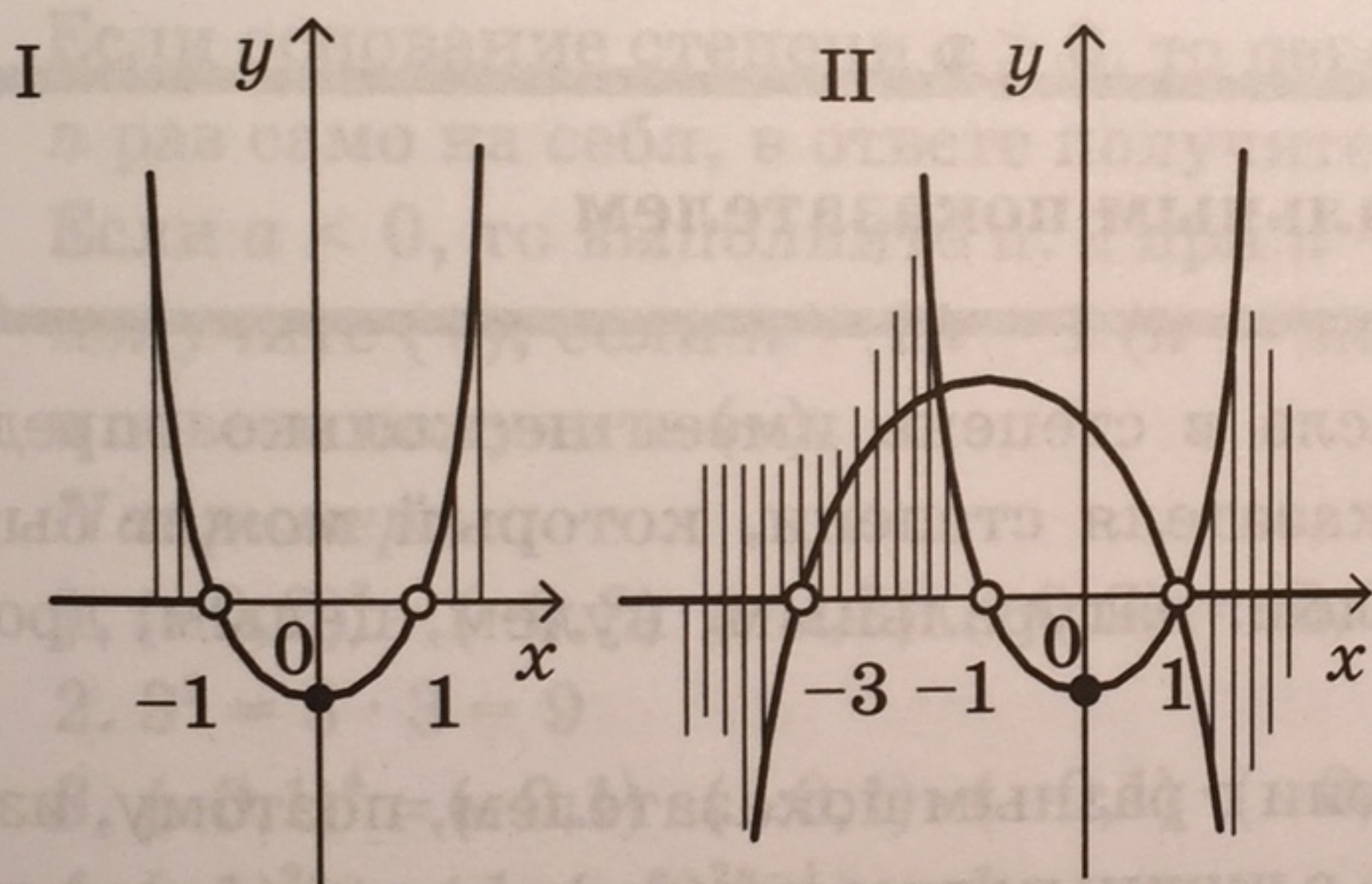


Рис. 18

Общее решение:  $r < -3$  и  $r > 1$

Ответ: при всех значениях  $r$  из промежутков  $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$  неравенство выполняется при всех значениях  $x \in \mathbb{R}$ .

Например: при  $r = 2$   $3x^2 + 2x + 2 > 0$ ,  $\frac{D}{4} = 1 - 6 < 0$ ,  $a > 0$ ,  $x$  — любое

**Проверь себя!**

Решите неравенство (по графику).

1.  $(x - 3)^2 \leq 49$ ; 2.  $-2x^2 + 3x > 0$

Ответ: 1)  $[-4; 10]$ ; 2)  $(0; 1,5)$ .

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

$$\text{если } \begin{cases} a > 0 \\ D < 0 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac;$$

$$\frac{D}{4} = (r - 1)^2 - 2(r^2 - 1) =$$

$$= r^2 - 2r + 1 - 2r^2 + 2 =$$

$$= -r^2 - 2r + 3$$

$$-r^2 - 2r + 3 = 0 \quad | (-1)$$

$$r^2 + 2r - 3 = 0$$

$$r_1 = -3; r_2 = 1$$



## Глава IV. Степени

### § 1.

### Степень с натуральным показателем

Действие возведения числа в степень имеет несколько определений в зависимости от показателя степени, который может быть любым действительным числом: натуральным, нулем, целым, дробным, иррациональным.

В данной теме даны степени с разным показателем, поэтому, изучая тему, надо найти степень с нужным вам показателем для данного класса. Для учеников 9-го класса такое изложение удобно при повторении.

Символически любое определение степени числа записывают в общем виде:

$$\begin{array}{ccc} & \text{показатель степени} & \\ & / & \\ \text{действие возведения} & a^m = b & \text{степень (результат)} \\ \text{в степень} & & \\ & / & \\ & \text{основание степени} & \end{array}$$

**Определение.** Если показатель степени ( $n > 1$ ) — натуральное число, то степень числа  $a$  есть произведение  $n$  множителей, каждый из которых равен  $a$ . Если  $n = 1$ , то  $a^1 = a$ .



Определение можно записать так:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}} = b \text{ — степень } a_1 = a$$

Например:  $10^1 = 10$ ;  $(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$ ;  $\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$ ;  
 $(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$ ;  $(0,2)^3 = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008$

Читают степень так:  $a$  в степени  $n$  или  $n$ -я степень числа  $a$ .

## Алгоритм

43

Вычисление значения степени  $a^n$ ,  $n \in N$ 

1. Определите показатель степени  $n$  — это количество множителей.
2. Если основание степени  $a > 0$ , то перемножьте основание степени  $n$  раз само на себя, в ответе получите положительное число.
3. Если  $a < 0$ , то выполните п. 2 при  $n = 2k$  ( $n$  — четное) — в ответе получите (+); если  $n = 2k - 1$  ( $n$  — нечетное), где  $k = 1, 2, 3, \dots$ , то в ответе получите (-).

Например:

1. $(-0,2)^3 = (-0,2) \cdot (-0,2) \cdot (-0,2) = -0,008$	$n = 3; a = -0,2$
2. $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$	$n = 2; a = 3$
3. $(-0,1)^4 = (-0,1) \cdot (-0,1) \cdot (-0,1) \cdot (-0,1) = +0,0001$	$n = 4; a = -0,1$
4. $(-1)^{2n} = +1; (-1)^{2n-1} = -1$	

**Внимание!** Если знак минус (-) относится к основанию степени, то основание степени вместе со знаком (-) ставится в скобки! Если скобок нет, то знак (-) относится к результату возведения в степень положительного числа. Это замечание имеет значение для степени с четным показателем.

Например:

1.  $(-5)^2 = 25$       2.  $-5^2 = -25$        $(-5)^2 \neq -5^2$ , но  $(-2)^3 = -2^3$

## Примеры

Вычислите  $(1-3)$ .

1.  $-1^2 + (-1)^2 - 1^3 - (-1)^3 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$        $(-1)^{2n} = +1; (-1)^{2n-1} = -1;$   
 $-1^{2n} = -1$



$$2. \quad -\frac{1}{2} \cdot (-2)^4 + 2^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{2} \cdot 2^4 + 2^3 \cdot \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2^4 + 2^3 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{16}{2} - \frac{8}{8} = -8 - 1 = -9$$

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$$

$$(-) + (-) = (-)$$

$$3. \quad -\left(1\frac{1}{4}\right)^2 = -\left(\frac{5}{4}\right)^2 = -\frac{25}{16}$$

$$A \frac{m}{n} = \frac{A \cdot m}{n}$$

4. Запишите в виде степени произведения.

$$1). 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 \quad 2). (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-3)^4$$

$$3). -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = -\left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$4). (x+y) \cdot (x+y) \cdot (x+y) = (x+y)^3$$

$$5). (-ab) \cdot (-ab) \cdot (-ab) \cdot (-ab) = (-ab)^4$$

$$n = 3; a = x + y; a^3$$

$$n = 4; x = (-ab); x^4$$

### Проверь себя!

$$1. \text{ Вычислите: } 1). (0,1)^3 \quad 2). \left(\frac{1}{2}\right)^5 \quad 3). (-2)^6 \quad 4). (-3)^5$$

$$\text{Ответ: } 1). 0,001; 2). \frac{1}{32}; 3). 64; 4). -243.$$

2. Запишите в виде степени произведения.

$$1). 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot a \cdot a \quad 2). -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot c \cdot c \cdot c \quad 3). (a-b)(a-b)$$

$$\text{Ответ: } 1). 5^3 \cdot a^2; 2). -\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot c^3; 3). (a-b)^2.$$

### Стандартный вид числа

**Определение.** Каждое число  $b > 10$  можно записать в виде  $b = a \cdot 10^n$ , где  $1 \leq a < 10$ ,  $n$  — натуральное число. Такая запись называется стандартным видом числа.

Запись чисел в стандартном виде применяется, когда числа большие, и с ними легче работать, когда они записаны в виде числа



меньше 10, но больше 1, умноженного на  $10^n$ . Такая запись применяется в физике, химии, экономике и при вычислениях на микрокалькуляторе.

Например:

$$1. 5600 = 5,6 \cdot 1000 = 5,6 \cdot 10^3$$

$$2. 6500000 = 6,5 \cdot 1000000 = 6,5 \cdot 10^6$$

## Алгоритм

44

## Запись числа в стандартном виде с натуральным показателем

Дано:  $b > 10$ , записать  $b = a \cdot 10^n$ , где  $1 \leq a < 10$ ,  $n \in N$ .

1. В числе  $b > 10$  перенесите запятую влево на столько цифр, чтобы в целой части полученного числа  $a$  была одна цифра.

Например, в числе  $b = 278,3$  перенесли запятую на 2 знака влево, после цифры 2, значит, число  $a = 2,783$ .

2. Сосчитайте количество цифр, на сколько перенесли запятую, это и будет показатель  $n$  при основании 10.

Например, в п. 1:  $n = 2$ , значит,  $10^2$ .

3. Запишите число  $b$  по формуле  $b = a \cdot 10^n$ .

Например:

$$1. b = 278,3 = 2,783 \cdot 10^2 \quad \left| \begin{array}{l} b = a \cdot 10^n; 1 \leq a < 10, n = 2 \\ n = 4; a = 1,03 \end{array} \right.$$

$$2. b = \underbrace{10300}_{4 \text{ цифры}} = 1,03 \cdot 10^4$$

$$3. b = \underbrace{182000}_{5 \text{ цифр}} = 1,82 \cdot 10^5 \quad \left| \begin{array}{l} n = 5; a = 1,82 \end{array} \right.$$

## Примеры

1. Запишите в стандартном виде число молекул газа в  $1 \text{ см}^3$  при  $0^\circ \text{C}$  и давлении 760 мм рт. ст. 27 000 000 000 000 000 000.

Решение.

$$\underbrace{27\,000\,000\,000\,000\,000\,000}_{19 \text{ цифр}} = \underbrace{2,7}_a \cdot 10^{19} \quad \left| \begin{array}{l} (,) \leftarrow \text{на } 19 \text{ цифр} \\ n = 19 \end{array} \right.$$



2. Поверхность земного шара составляет более 510 млн км<sup>2</sup>, объем Земли свыше 1000 млрд км<sup>3</sup>. Запишите эти числа в стандартном виде.

Решение.

$$\begin{array}{l|l} 1). 510 \text{ млн км}^2 = 510\,000\,000 = 5,1 \cdot 10^8 \text{ км}^2 & (,) \leftarrow \text{на 8 цифр} \\ & n = 8 \\ 2). 1000 \text{ млрд} = 1\,000\,000\,000\,000 = 1 \cdot 10^{12} \text{ км}^3 & (,) \leftarrow \text{на 12 цифр} \\ & n = 12 \end{array}$$

- 3). Запишите в стандартном виде числа.

$$\begin{array}{l|l} 1). 70\,005 = 7,0005 \cdot 10^4 & n = 4; a = 7,0005 \\ 2). 150\,250\,000 = 1,5025 \cdot 10^8 & n = 8; a = 1,5025 \end{array}$$

3. ГИА. Площадь территории России составляет  $1,7 \cdot 10^7$  км<sup>2</sup>, а США —  $9,6 \cdot 10^6$  км<sup>2</sup>. Во сколько раз территория России больше территории США?

- 1). Примерно в 18 раз      2). Примерно в 180 раз  
3). Примерно в 1,8 раза      4). Примерно в 5,6 раза

Решение.

$$\begin{array}{l|l} 1,7 \cdot 10^7 : 9,6 \cdot 10^6 = 17 \cdot 10^6 : 9,6 \cdot 10^6 = & 1,7 \cdot 10^7 = 1,7 \cdot 10 \cdot 10^6 = \\ = 17 : 9,6 = 170 : 96 \approx 1,8 \text{ раза} & = 17 \cdot 10^6 \end{array}$$

Ответ: 

1	2	3	4
---	---	---	---

### Проверь себя!

Запишите в стандартном виде числа.

1. 250      2. 25,1      3. 25 000      4. 46 млн

5. Население Франции составляет  $5,9 \cdot 10^7$  человек, а ее территория равна  $5,4 \cdot 10^5$  км<sup>2</sup>. Какой из ответов характеризует среднее число жителей на 1 км<sup>2</sup>?

- 1). 9,2 чел.    2). 92 чел.    3). 11 чел.    4). 110 чел.

Ответ: 1).  $2,5 \cdot 10^2$ ; 2).  $2,51 \cdot 10^1$ ; 3).  $2,5 \cdot 10^4$ ; 4).  $4,6 \cdot 10^7$ ; 5). 4.

Попробуй-ка реши!

Какой цифрой оканчивается значение выражения  $15^5 + 26^5 + 39^5$ ?

Ответ: 0.



## Свойства степени с натуральным показателем

Свойства степеней будем записывать в виде формул.

**Свойство 1**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \Leftrightarrow a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

Например:

$$1). 5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4} = 5^7 \quad \left| \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad 2). 2^{2+3} = 2^2 \cdot 2^3 \quad \left| \quad a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

**Свойство 2**

$$a^m : a^n = a^{m-n}, m > n, a \neq 0 \Leftrightarrow a^{m-n} = a^m : a^n, m > n$$

Например:

$$1). 3^7 : 3^3 = 3^{7-3} = 3^4 \quad \left| \quad a^m : a^n = a^{m-n}, m > n \right. \\ 2). a^{5-2} = a^5 : a^2 = a^3 \quad \left| \quad a^{m-n} = a^m : a^n \right.$$

**Свойство 3**

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \Leftrightarrow a^{m \cdot n} = (a^m)^n$$

Например:

$$1). (7^2)^5 = 7^{2 \cdot 5} = 7^{10} \quad \left| \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad 2). a^{3 \cdot 4} = (a^3)^4 = (a^4)^3 \quad \left| \quad a^{m \cdot n} = (a^m)^n \right.$$

**Свойство 4**

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \Leftrightarrow a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Например:

$$1). (12 \cdot 3)^2 = 12^2 \cdot 3^2 = 144 \cdot 9 = 1296 \quad \left| \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \right. \\ 2). 2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10\,000 \quad \left| \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \right.$$

**Свойство 5**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0 \Leftrightarrow \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, b \neq 0$$

Например:

$$1). \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64} \quad \left| \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad 2). \frac{10^3}{5^3} = \left(\frac{10}{5}\right)^3 = 2^3 = 8 \quad \left| \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \right.$$

**Внимание!** Эти свойства верны и для степеней с любым действительным показателем.

**Вывод.** Свойства степеней будем записывать в виде формул, которые верны как при чтении их слева направо, так и справа налево.

При вычислении значений степеней с основаниями 2, 3, 5 удобно пользоваться таблицей степеней, значения которой до  $n = 5$  полезно знать наизусть.



$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	$5^1 = 5$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$5^2 = 25$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$5^3 = 125$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$5^4 = 625$
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$	$5^5 = 3125$
$2^6 = 64$	$3^6 = 729$	$5^6 = 15625$
$2^7 = 128$	$3^7 = 2187$	$5^7 = 78125$
$2^8 = 256$	$3^8 = 6561$	$5^8 = 390625$
$2^9 = 512$	$3^9 = 19683$	$5^9 = 1953125$
$2^{10} = 1024$	$3^{10} = 59049$	$5^{10} = 9765625$

**З а м е ч а н и е.** Пользуясь таблицей, можно сразу записывать значения степени, если основания 2, 3, 5, а если основание другое, то посмотрите, нельзя ли его записать в виде степени с простым основанием.

### Алгоритм

45

### Вычисление значения выражений, содержащих степени

1. Найдите последнее действие в примере для степеней с одинаковым основанием и запишите формулу решения за чертой:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n; \quad a^{m-n} = a^m : a^n; \quad a^{m \cdot n} = (a^m)^n$$

2. Примените формулу п. 1 и найдите значение степени.

Например:

$$1). \quad 3^5 : 3^2 = 3^{5-2} = 3^3 = 27$$

$$2). \quad 5^2 \cdot 5 = 5^{2+1} = 5^3 = 125$$

$$3). \quad (2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

3. Если степени имеют разные основания, но одинаковый показатель, то примените формулы:  $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ ;  $a^n : b^n = (a : b)^n$ .

$$\text{Например: } 2^5 \cdot 5^5 = (2 \cdot 5)^5 = 10^5$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

4. Если основание степени составное число, то разложите его на простые множители и примените формулу п. 1.

Например:

$$12^2 \cdot 2^3 \cdot 3^4 = (2^2 \cdot 3)^2 \cdot 2^3 \cdot 3^4 =$$

$$= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 3^4 = 2^{4+3} \cdot 3^{2+4} =$$

$$= 2^7 \cdot 3^6 = 128 \cdot 729 = 93\,312$$

$$\text{Или так: } 2^7 \cdot 3^6 = 2 \cdot 2^6 \cdot 3^6 = 2 \cdot (2^6 \cdot 3^6) = 2 \cdot 6^6$$

$$12 = 2^2 \cdot 3;$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

5. Ответ запишите числом.



## Примеры

Вычислите значение степени (1–8).

$$1. \left(\frac{3y}{4}\right)^6 : \left(\frac{3y}{4}\right)^2 = \left(\frac{3y}{4}\right)^{6-2} = \left(\frac{3y}{4}\right)^4 = \frac{81y^4}{256}$$

$$2. \frac{3^5 \cdot 3^{10}}{3^6 \cdot 3^7} = \frac{3^{5+10}}{3^{6+7}} = 3^{15-13} = 3^2 = 9$$

$$3. (a^6)^4 : (a^3)^5 = a^{24} : a^{15} = a^{24-15} = a^9$$

$$4. (x \cdot y^3)^2 = x^2 \cdot (y^3)^2 = x^2 \cdot y^6$$

$$5. (0,25)^7 \cdot 4^7 = (0,25 \cdot 4)^7 = 1^7 = 1$$

$$6. 2^{2n} \cdot 2^n = 2^{2n+n} = 2^{3n}$$

$$7. \frac{6^{12} \cdot 4^{12}}{3^{12} \cdot 8^{12}} = \left(\frac{6 \cdot 4}{3 \cdot 8}\right)^{12} = 1^{12} = 1$$

$$8. \frac{2 \cdot 5^{22} - 9 \cdot 5^{21}}{25^{10}} = \frac{5^{21}(2 \cdot 5 - 9)}{(5^2)^{10}} = \frac{5^{21} \cdot 1}{5^{20}} = 5$$

9. ГИА. Представьте выражение  $\frac{(a^2)^3}{a^8}$  в виде степени  $a$  и найдите его значение при  $a = \frac{3}{4}$ .

Решение.

$$1). \frac{(a^2)^3}{a^8} = \frac{a^6}{a^8} = \frac{1}{a^{8-6}} = \frac{1}{a^2}$$

$$2). \frac{1}{a^2} = 1 : a^2 = 1 : \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 : \frac{9}{16} = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}$$

Ответ:  $1\frac{7}{9}$ .

10. ГИА. Упростите выражение  $\frac{10 \cdot 2^n}{2^{n+1} + 2^{n-1}}$ .

$$a^m : a^n = a^{m-n}; a = \frac{3y}{4};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}; a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n; (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; 1^7 = 1$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n; \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$(a-b):c = a:c - b:c;$$

$$5^{22} : 5^{21} = 5^1; 25 = 5^2$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}; a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$1 : \frac{a}{b} = \frac{b}{a}$$



*Решение.*

- 1). Вынесите за скобку в знаменателе  $2^{n-1}$  (то есть разделите каждое слагаемое на  $2^{n-1}$  по формуле  $a^m : a^n = a^{m-n}$ ).

$$\frac{10 \cdot 2^n}{2^{n+1} + 2^{n-1}} = \frac{10 \cdot 2^n}{2^{n-1}(2^2 + 1)} = \frac{10 \cdot 2^n}{2^{n-1} \cdot 5} = \frac{2^{n+1}}{2^{n-1}} = \left| \begin{array}{l} (a+b):c = a:c + b:c \\ 2^{n+1}:2^{n-1} = 2^{n+1-n+1} = 2^2 \end{array} \right.$$

$$= 2^{n+1-(n-1)} = 2^2 = 4$$

*Ответ:* 4.

**Попробуй не реши!**

Вычислите.

$$\begin{array}{lll} 1. (0,1)^4 \cdot 10^5 & 2. \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\left(\frac{3}{5}\right)^2\right)^3 & 3. \frac{27^3}{9^2 \cdot 81^2} \\ 4. ((-11)^3)^2 & 5. \left(-1\frac{1}{2}x^2y^3z\right) \cdot \left(-1\frac{1}{3}xy^2 \cdot z^3\right) & \end{array}$$

*Ответ:* 1). 10; 2).  $\left(\frac{2}{5}\right)^6$ ; 3).  $\frac{1}{27}$ ; 4).  $11^6$ ; 5).  $2x^3y^5z^4$ .

**Попробуй-ка реши!**

1. Вычислите.

а)  $\frac{5 \cdot (3 \cdot 7^{15} - 9 \cdot 7^{14})}{7^{16} + 3 \cdot 7^{15}}$  б)  $(10^{12} + 5^{11} \cdot 2^9 - 5^{13} \cdot 2^8) : (4 \cdot 5^5 \cdot 10^6)$

2. Упростите и вычислите  $\frac{16^{n+2} \cdot 4^{n-1}}{8^{2n}}$ .

*Ответ:* 1). а)  $\frac{6}{7}$ ; б) 57; 2).  $2^6$ .

**Полезный совет.** При умножении и делении степеней с одинаковым основанием удобно записать общее основание и сразу записать в показателе сумму или разность показателей по правилу умножения и деления степеней ( $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ;  $a^m : a^n = a^{m-n}$ ) и вычислить.

*Например:*

$$\frac{2^7 \cdot 2^3 \cdot 2}{2^5 \cdot 2^2} = 2^{7+3+1-5-2} = 2^4 = 16$$

$$\left| \begin{array}{l} a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \\ a^m : a^n = a^{m-n} \end{array} \right.$$



## § 2.

## Степень с целым показателем

$$a^m = b$$

показатель степени  
/  
— степень (результат)  
/  
основание степени

Запишем в таблицу определения степени с разным показателем в виде формул.

$$a^m = b$$

I	$m = 1, 2, 3, 4 \dots$	II	$m = 0$	III	$m = -1, -2, -3 \dots$	
	произведение		единица		дробь	
	$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ раз}}$ $a^1 = a$		$a^0 = 1;$ $a \neq 0$ $0^0$ и $0^{-m}$ не имеют смысла		$a^{-1} = \frac{1}{a}$ $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ $a \neq 0$ $\left(\frac{1}{a}\right)^{-m} = a^m$	$\left(\frac{1}{a}\right)^{-1} = a$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \left(\frac{b}{a}\right)$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

Например:

I.  $100^1 = 100$

$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

$(-1)^6 = +1$

II.  $(-5)^0 = 1$

$\pi^0 = 1$

$0^{-2}$  — не имеет  
смысла

III.  $(-3)^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)$

Алгоритм

46

Нахождение степени по определению

- По внешнему виду примера выберите из таблицы нужную формулу и запишите ее справа за чертой.



Например, вычислите: 1).  $18^2$ ; 2).  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ ; 3).  $3^0 = 1$ .

- 1). Показатель равен 2 — I формула
  - 2). Показатель равен -2 — III формула
  - 3). Показатель равен 0 — II формула
2. Вычислите значение выражения по найденной формуле.

Например:

1).  $18^2 = 18 \cdot 18 = 324$

2).  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$

3).  $3^0 = 1$

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ раз}}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-m} = a^m$$

$$a^0 = 1$$

### З а м е ч а н и я

1.  $(-a)^m = a^m$ , если  $m = 2n$  — четное число.
2.  $(-a)^m = -a^m$ , если  $m = 2n - 1$  — нечетное число.

Например:

$$(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$$

$$(-2)^3 = -2^3 = -8$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}; (-a)^{2n} = +a^{2n}$$

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ раз}}; m = 2n - 1$$

**Полезный совет.** Удобно пользоваться таблицей значений степеней с основанием  $a = 2; 3; 5$  и  $m = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ .

$a$	$m$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2	$2^m$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
3	$3^m$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	81
5	$5^m$	$\frac{1}{625}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$	1	5	25	125	625



## Примеры

1. Найдите значение выражения: 1).  $-10^{-4}$ ; 2).  $(-0,8)^{-2}$ ; 3).  $-(-2)^{-3}$ .

Решение.

$$1). -10^{-4} = -\frac{1}{10^4} = -0,0001$$

$$2). (-0,8)^{-2} = \frac{1}{(-0,8)^2} = \frac{1}{0,64} = \frac{100}{64} = \frac{25}{16}$$

$$3). -(-2)^{-3} = \frac{-1}{(-2)^3} = -\frac{1}{-8} = \frac{1}{8}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}; -a^m = -(a)^m$$

$$(-a)^{2n} = a^{2n}; 0,64 = \frac{64}{100}; 1:0,64 = \frac{100}{64};$$

$$\text{или так: } 0,8 = \frac{4}{5};$$

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

$$(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1}$$

2. Найдите значение выражения.

$$1). 2^{-3} - (-2)^{-4} \quad 2). 6^{-1} - 3^{-2} \quad 3). 1,5^0 - 1,5^{-1}$$

Решение.

$$1). 2^{-3} - (-2)^{-4} = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{2}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

$$2). 6^{-1} - 3^{-2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{3^2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{3}{18} - \frac{2}{18} = \frac{1}{18}$$

$$3). 1,5^0 - 1,5^{-1} = 1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m};$$

$$(-a)^{2n} = a^{2n}$$

$$\text{НОК}(6; 9) = 18$$

$$a^0 = 1; \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

3. Представьте выражение в виде дроби: 1).  $5ab^{-3}$ ; 2).  $15(ab)^{-5}$ ; 3).  $10x^{-1} \cdot (x-y)^{-3}$ ; 4).  $xy^{-1} + xy^{-2}$ ; 5).  $(a-b)^{-2} \cdot (a^{-2} - b^{-2})$ .

Решение.

$$1). 5ab^{-3} = \frac{5a}{b^3} \quad 2). 15(ab)^{-5} = \frac{15}{(ab)^5}$$

$$3). 10x^{-1} \cdot (x-y)^{-3} = \frac{10}{x(x-y)^3}$$

$$4). xy^{-1} + xy^{-2} = \frac{x}{y} + \frac{x}{y^2} = \frac{xy + x}{y^2} = \frac{x(y+1)}{y^2}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$



$$\begin{aligned}
 5). (a-b)^{-2} \cdot (a^{-2} - b^{-2}) &= \frac{1}{(a-b)^2} \cdot \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = & (a-b)^{-n} &= \frac{1}{(a-b)^n}; \\
 &= \frac{1}{(a-b)^2} \cdot \left( \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} \right) = \frac{(b-a)(b+a)}{(b-a)^2 \cdot a^2 b^2} = & x^2 - y^2 &= (x-y)(x+y); \\
 &= \frac{b+a}{(b-a) \cdot a^2 b^2} & (a-b)^2 &= (b-a)^2
 \end{aligned}$$

**Полезный совет.** Показатель степени относится только к тому основанию, у которого он записан, или ко всей скобке, если основанием является выражение в скобках.

4. ГИА. Расположите в порядке возрастания:  $\left(\frac{7}{8}\right)^{-3}$ ;  $\left(\frac{7}{8}\right)$ ;  $\left(\frac{8}{7}\right)^{-3}$ .

*Решение.*

Запишите степени с положительным показателем степени и сравните:

$$\begin{array}{lcl}
 \text{а) } \left(\frac{7}{8}\right)^{-3} = \left(\frac{8}{7}\right)^3 & \left| \begin{array}{l} \frac{8}{7} > 1; \left(\frac{8}{7}\right)^3 > 1 \end{array} \right. & \left| \begin{array}{l} \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m \end{array} \right. \\
 \text{б) } \left(\frac{8}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{7}{8}\right)^3 & \left| \begin{array}{l} \frac{7}{8} < 1; \left(\frac{7}{8}\right)^3 < 1 \end{array} \right. & \\
 \text{в) } \frac{7}{8} > \left(\frac{7}{8}\right)^3 & \left| \begin{array}{l} \frac{7}{8} - \left(\frac{7}{8}\right)^3 = \frac{7}{8} - \frac{7^3}{8^3} = \frac{7 \cdot 8^2 - 7^3}{8^3} = \\ = \frac{7(8^2 - 7^2)}{8^3} > 0 \end{array} \right. & \left| \begin{array}{l} \text{Если } a - b > 0, \\ \text{то } a > b \end{array} \right.
 \end{array}$$

Получим:  $\left(\frac{7}{8}\right)^3 < \frac{7}{8} < \left(\frac{8}{7}\right)^3$ . Ответ:  $\left(\frac{8}{7}\right)^{-3}$ ;  $\frac{7}{8}$ ;  $\left(\frac{7}{8}\right)^{-3}$ .

**Проверь себя!**

Упростите выражение  $(x^{-2} - y^{-2})^{-1} \cdot (x^{-1} - y^{-1})$ .

Ответ:  $\frac{xy}{x+y}$ .



## Свойства степени с целым показателем

Свойства степени с целым показателем такие же, как и свойства степени с натуральным показателем, если  $a \neq 0$ ;  $b \neq 0$  и  $n, m$  — любые целые числа.

$$1. \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

 $\Leftrightarrow$ 

$$6. \quad a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

$$2. \quad a^m : a^n = a^{m-n}$$

 $\Leftrightarrow$ 

$$7. \quad a^{m-n} = a^m : a^n$$

$$3. \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

 $\Leftrightarrow$ 

$$8. \quad a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$$

$$4. \quad (ab)^m = a^m \cdot b^m$$

 $\Leftrightarrow$ 

$$9. \quad a^m \cdot b^m = (ab)^m$$

$$5. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

 $\Leftrightarrow$ 

$$10. \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

**З а м е ч а н и е.** Формулы 6–10 те же, что и формулы 1–5, но ими удобно пользоваться, когда они записаны справа налево.

### Алгоритм

**47**

### Действия над степенями с целыми показателями

Определите порядок действий в примере:

1. Выполните действия в скобках и приведите основания степеней к произведению степеней простых чисел.

Например:  $(48)^3 = (2^4 \cdot 3)^3$

2. Возведите в степень произведение, используя формулу  $(abc)^m = a^m \cdot b^m \cdot c^m$ .

3. Возведите степень в степень  $(a^m)^n = a^{mn}$ .

4. Выполните умножение или деление степеней с одинаковыми основаниями ( $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ;  $a^m : a^n = a^{m-n}$ ); если основания разные, то разложите их на простые множители и примените п. 2, 3.

5. Сложите полученные результаты.

**П о л е з н ы й с о в е т.** Этот алгоритм общий для решения разных примеров, и если решаемый вами пример не имеет некоторых пунктов алгоритма, то опустите эти пункты и выполняйте алгоритм с нужного вам пункта.



## Примеры

1. Упростите выражение  $(0,25x^{-4}y^{-3})^2 \cdot \left(\frac{x^{-3}}{4y^2}\right)^{-3}$ .

*Решение.*

- 1). Упростите выражение в скобках:

$$\left(\underbrace{0,25}_a \underbrace{x^{-4}}_b \underbrace{y^{-3}}_c\right)^2 \cdot \left(\frac{x^{-3}}{4y^2}\right)^{-3} =$$

$$= (2^{-2}x^{-4}y^{-3})^2 (x^{-3}2^{-2}y^{-2})^{-3} =$$

$$0,25 = \frac{1}{4} = 2^{-2};$$

$$\frac{1}{y^2} = y^{-2};$$

- 2). Возведите в степень произведения в скобках:

$$= (2^{-2})^2 \cdot (x^{-4})^2 \cdot (y^{-3})^2 \cdot (x^{-3})^{-3} \cdot (2^{-2})^{-3} \cdot (y^{-2})^{-3} =$$

$$(abc)^m = a^m \cdot b^m \cdot c^m$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

- 3). Возведите степени в степень:

$$= 2^{-4} \cdot x^{-8} \cdot y^{-6} \cdot x^9 \cdot 2^6 \cdot y^6 =$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

- 4). Перемножьте степени с одинаковыми основаниями:

$$= 2^{-4+6} \cdot x^{-8+9} \cdot y^{-6+6} = 2^2 \cdot x \cdot y^0 = 4x$$

$$y^0 = 1$$

**Полезный совет.** Не делайте вычисления «сразу», а прописывайте последовательно все действия — не будет ошибки.

2. Упростите выражение  $0,6c^2d^4 \cdot \frac{1}{3}c^{-2}d^{-4}$ .

*Решение.* Применим алгоритм, начиная с 4-го пункта.

$$0,6c^2d^4 \cdot \frac{1}{3}c^{-2}d^{-4} = \left(0,6 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot (c^2c^{-2}) \cdot (d^4d^{-4}) =$$

$$= \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 3} \cdot c^{2-2} \cdot d^{4-4} = \frac{1}{5}c^0d^0 = \frac{1}{5}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$0,6 = \frac{3}{5}; a^0 = 1;$$

$$2+(-2) = 2-2 = 0$$

3. Вычислите  $\frac{4^{-2} \cdot 8^{-6}}{2^{-22}}$ .

*Решение.*

Приведите основания степени к числу 2:

$$\frac{4^{-2} \cdot 8^{-6}}{2^{-22}} = \frac{(2^2)^{-2} \cdot (2^3)^{-6}}{2^{-22}} = \frac{2^{-4} \cdot 2^{-18}}{2^{-22}} = \frac{2^{-22}}{2^{-22}} = 1$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; a : a = 1$$



**Полезный совет.** Если даны действия деления и умножения степеней с одинаковыми основаниями, то запишите общее основание с показателем, равным сумме (если умножаем степени) или разности (если делим степени).

4. Вычислите  $\frac{3^{-10} \cdot (3^2)^8}{3^2}$ .

Решение.

$$\frac{3^{-10} \cdot (3^2)^8}{3^2} = \frac{3^{-10} \cdot 3^{16}}{3^2} = 3^{-10+16-2} = 3^4 = 81 \quad \left| \begin{array}{l} (a^m)^n = a^{mn}; a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \\ a^m : a^n = a^{m-n} \end{array} \right.$$

Ответ: 81.

5. ГИА. Представьте выражение в виде степени  $\frac{x^{-6} + x^{-4} + x^{-2}}{x^2 + x^4 + x^6}$ .

Решение.

$$\frac{x^{-6} + x^{-4} + x^{-2}}{x^2 + x^4 + x^6} = \frac{x^{-6}(1 + x^2 + x^4)}{x^2(1 + x^2 + x^4)} = \frac{x^{-6}}{x^2} =$$

$$= x^{-6-2} = x^{-8}$$

Ответ:  $x^{-8}$ .

Вынесите за скобку степень с меньшим показателем

$$a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$x^{-2} : x^{-6} = x^{-2+6} = x^4;$$

$$x^{-4} : x^{-6} = x^{-4-(-6)} = x^2$$

**З а м е ч а н и е.** Действие вынесения за скобки множителя — это действие деления каждого слагаемого на этот множитель.

6. Упростите выражение  $\frac{2^{2n-1} \cdot 3^{n+1}}{6 \cdot 12^n}$ .

Решение.

1). Приведите основания 6 и 12 к основаниям 2 и 3:

$$\frac{2^{2n-1} \cdot 3^{n+1}}{6 \cdot 12^n} = \frac{2^{2n-1} \cdot 3^{n+1}}{2 \cdot 3 \cdot (2^2 \cdot 3)^n} =$$

$$6 = 2 \cdot 3;$$

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

2). Возведите выражение в скобках в степень  $n$ :

$$= \frac{2^{2n-1} \cdot 3^{n+1}}{2^1 \cdot 3^1 \cdot 2^{2n} \cdot 3^n} =$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n; (a^m)^n = a^{mn}$$

3). Выполните деление степеней с одинаковыми основаниями:

$$= 2^{2n-1-1-2n} \cdot 3^{n+1-1-n} = 2^{-2} \cdot 3^0 = \frac{1}{4}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}; 2^{-2} = \frac{1}{4}; 3^0 = 1$$

Ответ:  $\frac{1}{4}$ .



7. Упростите выражение и вычислите, если  $a = 1$ ;  $b = 3^4$ .

$$\left(\frac{a^{-3}b^4}{9}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{a^{-2}b^3}\right)^{-3}$$

Решение.

1). Возведите в степень выражение в скобках:

$$\left(\frac{a^{-3}b^4}{9}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{a^{-2}b^3}\right)^{-3} = \frac{(a^{-3})^{-2} \cdot (b^4)^{-2}}{(3^2)^{-2}} \cdot \frac{3^{-3}}{(a^{-2})^{-3} \cdot (b^3)^{-3}} = \left| \begin{array}{l} \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \\ (ab)^n = a^n \cdot b^n \end{array} \right.$$

2). Возведите степени в степень:

$$= \frac{a^6 \cdot b^{-8}}{3^{-4}} \cdot \frac{3^{-3}}{a^6 \cdot b^{-9}} = \left| (a^m)^n = a^{mn} \right.$$

3). Умножьте дроби:

$$= \frac{a^6 \cdot b^{-8} \cdot 3^{-3}}{3^{-4} \cdot a^6 \cdot b^{-9}} = \left| \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \right.$$

4). Разделите степени с одинаковыми основаниями:

$$3^{-3-(-4)} \cdot a^{6-6} \cdot b^{-8-(-9)} = 3a^0b = 3b \quad \left| a^m : a^n = a^{m-n} \right.$$

5).  $3b = 3 \cdot 3^4 = 3^5$

Ответ:  $3^5$ .

8. Запишите в виде степени произведение  $10^n \cdot x^{-2n} \cdot y^{3n}$ .

Решение.

$$10^n \cdot x^{-2n} \cdot y^{3n} = (10 \cdot x^{-2} \cdot y^3)^n \quad \left| a^m \cdot b^m \cdot c^m = (abc)^m \right.$$

**Проверь себя!**

Упростите выражение.

$$1. (-2 \cdot m^5 \cdot n^{-3})^2 \quad 2. \frac{p}{3c^{-2}} \cdot \frac{15c}{p^{-2}} \quad 3. \left(\frac{x^2y^{-3}}{6z}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{x^2y^{-2}}{9z}\right)^2$$

Ответ: 1).  $4m^{10}n^{-6}$ ; 2).  $5p^3c^3$ ; 3).  $\frac{4}{9}y^2$ .

Попробуй-ка реши! Упростите выражение.

$$1. \text{ ГИА. } \frac{10 \cdot 2^n}{2^{n+1} + 2^{n-1}} \quad 2. \text{ ГИА. } \frac{4 \cdot 18^n}{3^{2n-1} \cdot 2^{n+1}}$$

Ответ: 1). 4; 2). 6.



## § 3.

## Стандартный вид числа

$$\begin{array}{c}
 \text{показатель степени} \\
 / \\
 a^m = b \text{ — степень (результат)} \\
 / \\
 \text{основание степени}
 \end{array}$$

Стандартным видом положительного числа  $b$  называется его запись в виде  $b = a \cdot 10^n$ , где  $1 \leq a < 10$ ,  $n$  — целое число.

Число  $n$  называется порядком числа  $a$ , число  $a$  — мантиссой.

Порядок числа показывает, насколько велико или мало число.

Например, порядок числа  $a$  равен 4. Это означает, что  $10\,000 \leq b < 100\,000$ . Если порядок равен  $-3$ , то число  $0,001 \leq b < 0,01$ .

## Алгоритм

48

## Запись числа в стандартном виде с целым показателем

1. Если число  $b > 10$ , то перенесите запятую влево, чтобы в целой части числа осталась одна цифра (см. алгоритм 44).

Например: в числе 12 500 надо перенести запятую на 4 цифры влево, получим  $a = 1,25$ ;  $n = 4$ .

2. Если число  $0 < b < 1$ , то перенесите запятую вправо, чтобы в целой части осталась одна цифра, отличная от 0.

Например: в числе 0,00152 запятую перенесите вправо на 3 цифры, получите число  $a = 1,52$ ;  $n = -3$ .

3. Определите порядок числа  $n$  — это показатель степени числа 10.

4. Запишите число  $b = a \cdot 10^n$ .

Например:  $12\,500 = 1,25 \cdot 10^4$ ;  $0,00152 = 1,52 \cdot 10^{-3}$

## Примеры

1. Запишите в стандартном виде числа (алгоритм примените устно).

$$1). \underbrace{218000}_5 = 2,15 \cdot 10^5$$

$$n = 5(,) \leftarrow \text{на } 5$$



$$2). \underbrace{0,00051}_4 = 5,1 \cdot 10^{-4}$$

$$n = -4 (,) \rightarrow \text{на } 4$$

$$3). \underbrace{0,027}_2 \cdot 10^5 = 2,7 \cdot 10^{-2} \cdot 10^5 = \\ = 2,7 \cdot 10^{-2+5} = 2,7 \cdot 10^3$$

$$n = -2 (,) \rightarrow \text{на } 2$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$4). 118 \cdot 10^4 = 1,18 \cdot 10^2 \cdot 10^4 = 1,18 \cdot 10^6$$

$$n = 2 (,) \leftarrow \text{на } 2$$

2. Выразите:

1).  $2,85 \cdot 10^8$  см в километрах

2).  $1,9 \cdot 10^{-2}$  т в килограммах

Решение.

1).  $2,85 \cdot 10^8$  см =  $2,85 \cdot 10^6$  м =  $2,85 \cdot 10^3$  км,

$$1 \text{ м} = 100 \text{ см} = 10^2 \text{ см};$$

так как:

$$1 \text{ км} = 1000 \text{ м} = 10^3 \text{ м};$$

$$2,85 \cdot 10^8 : 10^2 = 2,85 \cdot 10^{8-2} = 2,85 \cdot 10^6 \text{ (м)}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2,85 \cdot 10^6 : 10^3 = 2,85 \cdot 10^{6-3} = 2,85 \cdot 10^3 \text{ (км)}$$

2).  $1,9 \cdot 10^{-2}$  т =  $1,9 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3 = 1,9 \cdot 10$  (кг)

$$1 \text{ т} = 1000 \text{ кг} = 10^3 \text{ кг}$$

**Полезный совет.** При умножении и делении чисел, записанных в стандартном виде  $a \cdot 10^n$ ;  $c \cdot 10^m$ , надо умножить или разделить  $a$  и  $c$  и по правилу умножения степеней выполнить действия над  $10^n$  и  $10^m$  ( $10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$  или  $10^m : 10^n = 10^{m-n}$ ).

### Примеры

Выполните действия (1–2).

1.  $(4,4 \cdot 10^{-3}) \cdot (5,2 \cdot 10^4) = 4,4 \cdot 5,2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^4 = \\ = 22,88 \cdot 10^1 = 2,288 \cdot 10^1 \cdot 10^1 = 2,288 \cdot 10^2$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$22,88 = 2,288 \cdot 10^1$$

2.  $(3,6 \cdot 10^{-3}) : (4,8 \cdot 10^{-2}) = (3,6 : 4,8) \cdot (10^{-3} : 10^{-2}) = \\ = 0,75 \cdot 10^{-1} = 7,5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-1} = 7,5 \cdot 10^{-2}$

$$10^{-3-(-2)} = 10^{-1};$$

$$n = -1 (,) \rightarrow$$

на 1 знак

**Задача.** Масса Земли  $1,9 \cdot 10^{24}$  кг, а масса Марса  $6,4 \cdot 10^{23}$  кг. Что больше — масса Земли или Марса — и во сколько раз? Результат округлите до десятых.

Решение.

$$1,9 \cdot 10^{24} : 6,4 \cdot 10^{23} = (1,9 : 6,4) \cdot (10^{24} : 10^{23}) \approx$$

$$10^{24} : 10^{23} = 10^1;$$

$$\approx 0,297 \cdot 10 \approx 2,97 \cdot 10^{-1} \cdot 10 \approx 3 \cdot 10^0 = 3 \text{ (раза)}$$

$$10^0 = 1$$

Ответ: масса Земли больше массы Марса  $\approx$  в 3 раза.



**Попробуй не реши!**

1. Представьте число в стандартном виде.

1). 128000

2). 0,00006

3).  $0,013 \cdot 10^5$

4). 0,55

5).  $85 \cdot 10^{-3}$

Ответ: 1).  $1,28 \cdot 10^5$ ; 2).  $6 \cdot 10^{-5}$ ; 3).  $1,3 \cdot 10^3$ ; 4).  $5,5 \cdot 10^{-1}$ ;  
5).  $8,5 \cdot 10^{-2}$ .

2. Выполните действия.

1).  $(3,14 \cdot 10^3) \cdot (2,1 \cdot 10^5)$

2).  $(1,96 \cdot 10^{-2}) : (2,45 \cdot 10^{-3})$

Ответ: 1).  $6,59 \cdot 10^8$ ; 2). 8.



#### § 4.

### Степень с рациональным показателем

Напомним, что к рациональным числам ( $Q$ ) относятся: натуральные ( $1, 2, 3 \dots N$ ), целые ( $0, \pm 1; \pm 2 \dots Z$ ) и дробные числа вида  $\frac{m}{n}$ , где  $m \in Z, n \in N$ .

В зависимости от показателя степени  $r$  степень  $b$  может быть произведением равных множителей  $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ , или  $1 = a^0$ , или дробью  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ , хотя общий вид степени один и тот же:

$$\begin{array}{c} \text{показатель степени} \\ / \\ a^r = b \text{ — степень (результат)} \\ / \\ \text{основание степени} \end{array}$$

Дадим определение степени с дробным показателем  $a^{\frac{m}{n}}$  и  $a^{-\frac{m}{n}}$ .

**Определение 1.** Если  $\frac{m}{n}$  обыкновенная дробь,  $n \neq 1, m, n \in N$  и  $a \geq 0$ , то под  $a^{\frac{m}{n}}$  понимают  $\sqrt[n]{a^m}$ .

Символически  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a \geq 0; n \neq 1; m, n \in N$

и наоборот  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}; 0^{\frac{m}{n}} = 0$

Например:  $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}; 2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}; 0^{\frac{2}{5}} = 0; \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}; \sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}}; \sqrt[3]{0^5} = 0$

**Определение 2.** Если  $\frac{m}{n}$  обыкновенная дробь,  $n \neq 1, m, n \in N$  и  $a > 0$ , то под  $a^{-\frac{m}{n}}$  понимают дробь  $\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$ .

Символически  $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$  или  $\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, a > 0; n \neq 1$



и наоборот

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \text{ или } a^{-\frac{m}{n}}$$

Например: 1.  $2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$  2.  $0,2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{0,2}}$  3.  $\frac{1}{\sqrt[3]{20^2}} = 20^{-\frac{2}{3}}$

**Внимание!** Степени вида  $(-a)^{\frac{m}{n}}$ ,  $(-a)^{-\frac{m}{n}}$  и  $0^{-\frac{m}{n}}$  не имеют смысла, если  $-a < 0$ .

### Примеры

1. Вычислите: 1.  $4^{\frac{1}{2}}$  2.  $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{2}{3}}$  3.  $(-2)^{\frac{1}{3}}$  4.  $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

Решение.

$$1). 4^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$2). \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{2}{3}} = 9^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9^2} = \sqrt[3]{3^4} = 3\sqrt[3]{3}$$

$$3). (-2)^{\frac{1}{3}} \text{ — не имеет смысла}$$

$$4). \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} = 2^{-\frac{2}{3}}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = a^n; a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$-2 < 0$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = a^{-\frac{m}{n}}, m = 2; n = 3.$$

2. ГИА. Чему равно значение выражения  $\frac{a^{-4} \cdot a^{-3}}{a^{-5}}$  при  $a = \frac{1}{3}$ ?

А. -9

Б.  $-\frac{1}{9}$ В.  $\frac{1}{9}$ 

Г. 9

Решение.

$$1). \frac{a^{-4} \cdot a^{-3}}{a^{-5}} = a^{-4+(-3)-(-5)} = a^{-2}$$

$$2). a = \frac{1}{3}, \text{ то } \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$-7 + 5 = -2$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = a^n$$

Ответ: Г.



# Проверь себя!

Вычислите значение выражения  $\frac{6^{-4} \cdot 6^{-9}}{6^{-12}}$ .

- А. 6      Б.  $\frac{1}{6}$       В.  $-\frac{1}{6}$       Г. -6

Ответ: Б.

Для удобства применения определения степени запишем все определения в таблицу.

показатель степени

$$a^r = b \text{ — степень}$$

основание степени

$r = n$	$r = 0$	$r = -n;$ $n \in \mathbb{N};$ $a \neq 0$	$r = \frac{m}{n};$ $m \in \mathbb{Z}; n \geq 2$	$r = -\frac{m}{n};$ $m \in \mathbb{Z}; n \geq 2$
$n = 1$ $a^1 = a$ $n = 2, 3, 4 \dots$ $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}$	$a^0 = 1$ $a \neq 0$ $0^r = 0$ $r > 0$ $0^0$ — не имеет смысла	$a^{-1} = \frac{1}{a}$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $a \geq 0$ $0^{\frac{m}{n}} = 0$	$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ $a > 0$
$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$	$(-2)^0 = 1$ $0^3 = 0$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$	$2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$ $(-a)^{\frac{m}{n}}$ — не имеет смысла	$0^{\frac{m}{n}}$ — не имеет смысла

**Полезный совет.** Формулы определения степеней справедливы

и при применении их справа налево:  $1 = a^0$ ;  $\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}} = a^n$ ;  $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ ;

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}; \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = a^{-\frac{m}{n}}.$$



Например:  $\frac{1}{2^3} = 2^{-3}$ ;  $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ ;  $\sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}$ ;  $-10^0 = -1$

Все свойства степени с натуральным показателем верны для степени с любым рациональным показателем при  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

$$1. \quad a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

 $\Leftrightarrow$ 

$$6. \quad a^{p+q} = a^p \cdot a^q$$

$$2. \quad a^p : a^q = a^{p-q}$$

 $\Leftrightarrow$ 

$$7. \quad a^{p-q} = a^p : a^q$$

$$3. \quad (a^p)^q = a^{pq}$$

 $\Leftrightarrow$ 

$$8. \quad a^{pq} = (a^p)^q = (a^q)^p$$

$$4. \quad (ab)^p = a^p \cdot b^p$$

 $\Leftrightarrow$ 

$$9. \quad a^p \cdot b^p = (ab)^p$$

$$5. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

 $\Leftrightarrow$ 

$$10. \quad \frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$$

где  $p = \frac{r}{s}$ ;  $q = \frac{m}{n}$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$

**З а м е ч а н и е.** Формулы (1–5) верны и при прочтении их справа налево, полезно их прописывать для удобства использования.

### Алгоритм

49

### Вычисление степеней с рациональным показателем

1. Упростите выражение: если возможно, например, вынесите общий множитель с наименьшим показателем за скобки, т. е. разделите на него каждое слагаемое по формуле деления степеней  $a^m : a^n = a^{m-n}$  и запишите его перед скобкой, разложите на множители по формулам сокращенного умножения или соберите формулу.

Например, упростите выражение  $a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}$ .

$$a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}} = ab \left( a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} \right) \quad \left| \quad a^{\frac{4}{3}} : a = a^{\frac{4}{3}-1} = a^{\frac{1}{3}} \right.$$

2. Найдите формулу определения степени с нужным показателем, запишите ее за чертой справа и примените.

Например, вычислите: 1.  $2^{-3}$ ; 2.  $16^{\frac{3}{4}}$ .

Решение.

$$1). \quad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\left| \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \right.$$



$$2). 16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3 \quad \left| \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}; 16 = 2^4; (a^m)^n = a^{mn} \right.$$

3. Примените при вычислении свойства степеней  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ;  $a^m : a^n = a^{m-n}$ ;  $(a^m)^n = a^{mn}$ ;  $(ab)^m = a^m \cdot b^m$ .

Например, упростите выражение  $x^{\frac{6}{7}} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2$ .

Решение.

$$x^{\frac{6}{7}} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = x^{\frac{6}{7}} \cdot x^{-\frac{1}{2} \cdot 2} = x^{\frac{6}{7} + (-1)} = x^{-\frac{1}{7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{x}} \quad \left| \quad \begin{array}{l} (a^m)^n = a^{mn}; a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \\ a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \end{array} \right.$$

4. Запишите ответ.

**З а м е ч а н и е.** Обычно пример выполняется в «цепочку», а не по действиям, поэтому алгоритм применяется устно, последовательно упрощая выражение. Если пример состоит из одного действия, то начинают решать пример со 2-го или 3-го пункта.

Например, вычислите  $16^{-0,75}$ .

Решение.

$$16^{-0,75} = (2^4)^{-\frac{3}{4}} = 2^{-\frac{4 \cdot 3}{4}} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \quad \left| \quad (a^m)^n = a^{mn}; a^{-n} = \frac{1}{a^n}; 0,75 = \frac{3}{4} \right.$$

Ответ:  $\frac{1}{8}$ .

**П о л е з н ы й с о в е т.** Как разложить на множители  $(a-b)$  и  $(a+b)$ ?

$$1. (a-b) = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right) \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$2. (a-b) = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right) \left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$3. (a+b) = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right) \left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$4. a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}} = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right) \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$



## Примеры

1. Вычислите: 1).  $4^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{5}{6}}$ ; 2).  $\left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5} + \left(0,2^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}$ .

Решение.

$$1). 4^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{5}{6}} = 4^{\frac{1}{3} - \frac{5}{6}} = 4^{-\frac{1}{2}} = (2^2)^{-\frac{1}{2}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$2). \left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5} + \left(0,2^{\frac{3}{4}}\right)^{-4} = 5^{\frac{2 \cdot 5}{5}} + 5^{\frac{3 \cdot 4}{4}} =$$

$$= 5^2 + 5^3 = 5^2(1+5) = 25 \cdot 6 = 150$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}; (a^m)^n = a^{mn};$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}; 0,2 = \frac{1}{5} = 5^{-1};$$

$$(5^{-1})^{\frac{-3 \cdot 4}{4}} = 5^3$$

Ответ: 1).  $\frac{1}{2}$ ; 2). 150.

2. Упростите выражение: 1).  $\frac{a^{\frac{5}{3}} \cdot b^{-1} - ab^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}}$ ; 2).  $\frac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{5}{4}}} - \frac{b^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}$ .

Решение.

$$1). \frac{a^{\frac{5}{3}} \cdot b^{-1} - ab^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}} = \frac{ab^{-1} \left( a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}} \right)}{\left( a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}} \right)} = ab^{-1} = \frac{a}{b}$$

Ответ:  $\frac{a}{b}$ .

Вынесем за скобку

$a \cdot b^{-1}$  с наименьшим

показателем

$$a^{\frac{5}{3}} : a = a^{\frac{5}{3}-1} = a^{\frac{2}{3}}; b^{-1} = \frac{1}{b};$$

$$ab^{-\frac{1}{3}} : ab^{-1} = a^0 b^{-\frac{1}{3}+1} = b^{\frac{2}{3}};$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Вынесем за скобку

$$a^{\frac{1}{4}} \text{ и } b^{\frac{1}{2}}$$

$$a^{\frac{9}{4}} : a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{9}{4}-\frac{1}{4}} = a^2;$$

$$b^{\frac{3}{2}} : b^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = b^1 = b;$$

$$b^{\frac{1}{2}} : b^{-\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = b^1 = b;$$

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

$$2). \frac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{5}{4}}} - \frac{b^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{1}{4}}(1-a^2)}{a^{\frac{1}{4}}(1-a)} - \frac{b^{\frac{1}{2}}(1-b^2)}{b^{\frac{1}{2}}(1+b)} =$$

$$= \frac{(1-a)(1+a)}{(1-a)} - \frac{(1-b)(1+b)}{(1+b)} = 1+a - (1-b) =$$

$$= 1+a-1+b = a+b$$

Ответ:  $a+b$ .



**Попробуй не реши!**

1. Сократите дробь  $\frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$ .

2. Упростите выражение: а)  $(a^{0,8})^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(a^{-\frac{2}{5}}\right)^{-1,5}$ ; б)  $c^{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt[3]{c^2}$ .

3.  $(81p^{-4})^{-\frac{3}{4}}$

Ответ: 1).  $x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}$ ; 2). а) 1; б)  $c^3$ ; 3).  $\frac{p^3}{27}$ .

**Попробуй-ка реши!**

Сократите дробь  $\frac{3\sqrt{x} - 2x - x^{\frac{3}{2}}}{x + 3\sqrt{x}}$ .

Ответ:  $1 - x^{\frac{1}{2}}$ .



## § 5.

## Степень с иррациональным показателем

Иррациональные числа — это десятичные бесконечные непериодические дроби.

Например,  $\pi = 3,14\dots$ ;  $\sqrt{2} = 1,4142135\dots$ ;  $\sqrt{3} = 1,73205\dots$  и т. д.

Эти числа нельзя записать дробью  $\frac{m}{n}$ , где  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Определение.** Если основание степени  $a > 1$  и  $\alpha$  — иррациональное число, то  $a^{\alpha^-} < a^\alpha < a^{\alpha^+}$ , где  $\alpha^-$  и  $\alpha^+$  есть приближенные значения числа  $\alpha$  с недостатком и с избытком (строгое определение дано в старшей школе).

Чем точнее рациональные приближения, тем точнее значение степени  $a^\alpha$ .

Например,  $\alpha^-$  числа  $\sqrt{2}$ : 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142...

$\alpha^+$  числа  $\sqrt{2}$ : 2; 1,5; 1,42; 1,415...

Тогда, например,  $3^{\sqrt{2}}$  можно вычислить так:

$$3^1 = 3$$

$$3^{1,4} = 4,655535$$

$$3^{1,41} = 4,7069644$$

$$3^{1,414} = 4,727694 \text{ и т. д.}$$

Аналогично, вычисляя  $3^2$ ;  $3^{1,5}$ ;  $3^{1,42}$ ;  $3^{1,415}$ , получим значение  $3^{\sqrt{2}}$ , заключенное между  $3^{\sqrt{2}^-}$  и  $3^{\sqrt{2}^+}$ , равное  $3^{\sqrt{2}} = 4,728804\dots$

На практике обычно берут одну из границ с нужной степенью точности  $\alpha$  и вычисляют на калькуляторе.

Теперь можно рассматривать степень с любым действительным показателем, причем все свойства степеней выполняются, так как степень с иррациональным показателем рассматривается как степень с рациональным показателем с заданной точностью.

## Примеры

Вычислите.

1.  $6^{1+2\sqrt{3}} : (4^{\sqrt{3}} \cdot 9^{\sqrt{3}})$



Решение.

$$6^{1+2\sqrt{3}} : (4^{\sqrt{3}} \cdot 9^{\sqrt{3}}) = 6^{1+2\sqrt{3}} : (4 \cdot 9)^{\sqrt{3}} = \\ = 6^{1+2\sqrt{3}} : 6^{2\sqrt{3}} = 6^{1+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}} = 6$$

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m;$$

$$36^{\sqrt{3}} = (6^2)^{\sqrt{3}} = 6^{2\sqrt{3}};$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Ответ: 6.

2. Упростите выражение  $\frac{a^{-n} - b^{-n}}{a^{-2n} - b^{-2n}} : \left( \frac{1}{b^{-n}} - \frac{1}{a^{-n}} \right)^{-1}$ .

Решение.

$$1). \frac{a^{-n} + b^{-n}}{a^{-2n} - b^{-2n}} = \frac{a^{-n} + b^{-n}}{(a^{-n})^2 - (b^{-n})^2} = \\ = \frac{a^{-n} + b^{-n}}{(a^{-n} + b^{-n})(a^{-n} - b^{-n})} = \frac{1}{a^{-n} - b^{-n}}$$

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

$$2). \left( \frac{1}{b^{-n}} - \frac{1}{a^{-n}} \right)^{-1} = \left( \frac{a^{-n} - b^{-n}}{a^{-n}b^{-n}} \right)^{-1} = \frac{a^{-n}b^{-n}}{a^{-n} - b^{-n}}$$

$$\left( \frac{a}{b} \right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

$$3). \frac{1}{a^{-n} - b^{-n}} : \frac{a^{-n}b^{-n}}{a^{-n} - b^{-n}} = \frac{1 \cdot (a^{-n} - b^{-n})}{(a^{-n} - b^{-n})(a^{-n}b^{-n})} = \\ = \frac{1}{a^{-n}b^{-n}} = a^n b^n$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Ответ:  $a^n b^n$ .

Попробуй-ка реши!

1. Упростите выражение  $\frac{8 \cdot 100^n}{2^{2n+1} \cdot 5^{2n-2}}$ .

2. Сократите дробь  $\frac{a - \sqrt{a} - 2}{2 - \sqrt{a}}$ .

3. Упростите выражение  $(a^{-2} - b^{-2}) \cdot (b^{-1} - a^{-1})^{-1}$ .

Ответ: 1). 100; 2).  $-(\sqrt{a} + 1)$ ; 3).  $-\frac{a+b}{ab}$ .



## Глава V. Корни

### § 1.

### Арифметический квадратный корень

**Определение 1.** *Квадратным корнем из числа  $a$  называется число  $b$ , квадрат которого равен  $a$ .*

Например,  $\sqrt{16} = \pm 4$ , где  $-4$  и  $4$  — корни из числа  $16$ , так как  $(-4)^2 = 16$  и  $4^2 = 16$ , числа  $-4$  и  $4$  являются корнями уравнения  $x^2 = 16$ , число  $+4$  называется арифметическим корнем квадратного уравнения.

**Определение 2.** *Арифметическим квадратным корнем из числа  $a$  называется неотрицательное число  $b$ , квадрат которого равен  $a$ .*

Символически:

$$\begin{array}{ccc} \text{знак} & & \text{арифметический} \\ \text{квадратного} & \sqrt{a} = b & \text{квадратный корень} \\ \text{корня} & & b \geq 0 \\ & \text{подкоренное выражение} & \\ & a \geq 0 & \end{array}$$

Определение квадратного корня символически:

$$\sqrt{a} = b \text{ — арифметический корень} \\ a \geq 0; b \geq 0; b^2 = a$$

$$\sqrt{a} \geq 0; (\sqrt{a})^2 = a; a \geq 0$$



Действие извлечения квадратного корня — обратное действию возведения в степень, когда по данной степени (числу) и показателю ( $n = 2$ ) находят основание степени.  $\sqrt[n]{a}$  — действие извлечения квадратного корня (показатель корня — «2» — опускают и пишут просто  $\sqrt{a}$ , а читают — квадратный корень из числа  $a$ ):

$$\text{основание степени} \text{ — } x^{\text{показатель}} = b \text{ — степень} \quad (b \geq 0)$$

$x = \sqrt{b}$  — действие извлечения квадратного корня

**Запомните!** Неизвестное основание степени находят действием извлечения корня из степени.

**З а м е ч а н и е.** Аналогично находят корни  $n$ -й степени.

Например:

1).  $x^3 = 8$ , то  $x = \sqrt[3]{8}$ ;  $x = 2$

2).  $x^4 = 81$ , то  $x = \sqrt[4]{81}$ ;  $x = 3$

3).  $x^5 = 32$ , то  $x = \sqrt[5]{32}$ ;  $x = 2$

4).  $x^n = b$ , то  $x = \sqrt[n]{b}$

Знак корня иначе называют радикалом.

### Пример

Найдите сторону квадрата  $a$ , если площадь квадрата равна  $16 \text{ м}^2$ .

Решение.

$$S_{\text{квадрата}} = a^2; a = \sqrt{16}; a = 4 \text{ м} \quad | \quad S = 16 \text{ м}^2; a = \sqrt{S}; 4^2 = 16$$

Ответ:  $a = 4 \text{ м}$ .

**Внимание!**  $\sqrt{a}$  не существует, если  $a < 0$  — действительное число.  $\sqrt{-4}$ ;  $\sqrt{-1}$ ;  $\sqrt{-9}$  не имеет смысла среди действительных чисел, так как  $(-2)^2 \neq -4$  и  $2^2 \neq -4$ ;  $(-1)^2 \neq -1$  и  $1^2 \neq -1$ ;  $(-3)^2 \neq -9$  и  $3^2 \neq -9$ .

$\sqrt{a} = \pm b$  — два корня, корень  $+b$  — арифметический квадратный корень;  $(-b)$  не является арифметическим корнем из  $a$ ,  $(-b)$  — корень, противоположный арифметическому корню. Введение арифметического корня приводит к однозначности действия извлечения корня.

$$\sqrt{0} = 0$$

$$\sqrt{1} = 1$$



## Алгоритм

50

## Извлечение арифметического квадратного корня

1. Если под корнем стоит одно число, то подберите такое неотрицательное число, которое в квадрате даст подкоренное выражение (по таблице). *Например:*

$$\sqrt{81} = 9 \text{ — корень}$$

$$\sqrt{0,25} = 0,5 \text{ — корень}$$

$$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \text{ — корень}$$

$$9^2 = 81; \sqrt{a} = b, \text{ если } b^2 = a; b \geq 0$$

$$0,5^2 = 0,25$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

Пусть  $\sqrt{16} = 5$ , тогда  $5^2 = 16$  — это неверно; значит, 5 не является  $\sqrt{16}$ .

2. Если под корнем стоит произведение или сумма чисел, то выполните действия под знаком корня, а затем извлекайте корень.

*Например:*

$$\sqrt{3 \cdot 27} = \sqrt{81} = 9$$

$$\sqrt{2^2 + 3 \cdot 7} = \sqrt{4 + 21} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{(17-15)(17+15)} = \sqrt{2 \cdot 32} = \sqrt{64} = 8$$

$$9^2 = 81$$

$$5^2 = 25$$

$$8^2 = 64$$

3. Если перед корнем стоит множитель, то найденный корень (число) умножьте на этот множитель.

*Например:*

$$4 \cdot \sqrt{0,09} = 4 \cdot 0,3 = 1,2$$

$$(0,3)^2 = 0,09$$

## Примеры

Вычислите.

$$1. \quad 0,04 \cdot \sqrt{0,04} = 0,04 \cdot 0,2 = 0,008$$

$$(0,2)^2 = 0,04$$

$$2. \quad 3 \cdot \sqrt{3 \cdot 27} - 6\sqrt{2 \cdot 18} = 3\sqrt{81} - 6\sqrt{36} = 3 \cdot 9 - 6 \cdot 6 = -9$$

$$9^2 = 81; 6^2 = 36$$

Таблица квадратов чисел и корней из чисел

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841



В пересечении строки и столбца — квадрат чисел, а наоборот — корень из числа, например,  $\sqrt{576} = 24$  сначала находим десятки, потом единицы.

### Сравнение корней

Свойства корней:

1.  $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ , если  $a = b$ ;  $a, b > 0$
2.  $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ , если  $a > b > 0$
3.  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ , если  $0 < a < b$

Например, сравните: 1.  $\sqrt{3 \cdot 27}$  и  $\sqrt{81}$ ; 2.  $\sqrt{16}$  и  $\sqrt{25}$ .

1. $\sqrt{3 \cdot 27} = \sqrt{81}$	$3 \cdot 27 = 81$
2. $\sqrt{16} < \sqrt{25}$	$16 < 25$

Алгоритм

51

Сравнение арифметических корней

1. Запишите каждую часть равенства или неравенства в виде корней  $a = \sqrt{a^2}$ ,  $a \geq 0$ .
2. Сравните числа, стоящие под знаком корня:  
если  $a > b > 0$ , то  $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ ;  
если  $0 < a < b$ , то  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ .
3. Сделайте вывод относительно заданных чисел.

### Примеры

1. Сравните числа:  $\sqrt{3,26}$  и 1,8.

Решение.

- 1). Запишем число:  $1,8 = \sqrt{1,8^2} = \sqrt{3,24}$
- 2). Сравним числа:  $3,26 > 3,24$ , тогда  $\sqrt{3,26} > \sqrt{3,24}$ ; значит,  $\sqrt{3,26} > 1,8$

Ответ:  $\sqrt{3,26} > 1,8$ .

2. I способ. Сравнение суммы корней

Пример. Какое из чисел больше —  $(\sqrt{5} + \sqrt{6})$  или  $(2 + \sqrt{7})$ ?



Решение.

1). Возведем в квадрат оба числа ( $>0$ ):

$$(\sqrt{5} + \sqrt{6})^2 = 5 + 2\sqrt{5 \cdot 6} + 6 = 11 + 2\sqrt{30}$$

$$(2 + \sqrt{7})^2 = (\sqrt{4} + \sqrt{7})^2 = 4 + 2\sqrt{4 \cdot 7} + 7 = 11 + 2\sqrt{28}$$

2). Найдем разность полученных результатов:

$$11 + 2\sqrt{30} - (11 + 2\sqrt{28}) = 11 + 2\sqrt{30} - 11 - 2\sqrt{28} = 2(\sqrt{30} - \sqrt{28})$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$a > b > 0, \text{ то } a^2 > b^2$$

$$a - b > 0, \text{ то } a > 0$$

$$\sqrt{30} > \sqrt{28},$$

$$\text{т. к. } 30 > 28$$

Ответ: первое число больше.

II способ. Сравнение разности корней.

Пример. Сравните числа:  $(\sqrt{14} - \sqrt{11})$  и  $(\sqrt{10} - \sqrt{7})$ .

Решение. Умножим и разделим каждую разность чисел на их сумму.

$$1). (\sqrt{14} - \sqrt{11}) = \frac{(\sqrt{14} - \sqrt{11})(\sqrt{14} + \sqrt{11})}{(\sqrt{14} + \sqrt{11})} =$$

$$= \frac{14 - 11}{\sqrt{14} + \sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{14} + \sqrt{11}}$$

$$2). (\sqrt{10} - \sqrt{7}) = \frac{(\sqrt{10} - \sqrt{7})(\sqrt{10} + \sqrt{7})}{(\sqrt{10} + \sqrt{7})} =$$

$$= \frac{10 - 7}{\sqrt{10} + \sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{10} + \sqrt{7}}$$

$$3). \text{ Сравним дроби } \frac{3}{\sqrt{14} + \sqrt{11}} - \frac{3}{\sqrt{10} + \sqrt{7}} < 0,$$

т. к. знаменатель первой дроби больше,  
тогда I дробь меньше, а значит,  
 $(\sqrt{14} - \sqrt{11}) < \sqrt{10} - \sqrt{7}$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$\sqrt{a^2} = a$$

Если  $a - b < 0$ ,  
то  $a < b$

$$\sqrt{14} > \sqrt{10}$$

$$+ \sqrt{11} > \sqrt{7}$$

$$\sqrt{14} + \sqrt{11} > \sqrt{10} + \sqrt{7}$$

Ответ: первое число меньше.

3. При каких значениях  $a$  равенство  $\sqrt{a-3} = 4$  будет верным?

Решение.

$$1). \text{ Запишем число 4 в виде корня: } 4 = \sqrt{4^2} = \sqrt{16}$$

$$2). \sqrt{a-3} = \sqrt{16}, \text{ если } a-3=16, \text{ то } a=16+3; a=19$$

3). Учтем, что под корнем стоит положительное  
число или 0:  $a-3 \geq 0$ , тогда  $a \geq 3$ , число  $19 \geq 3$ .

$$a = \sqrt{a^2};$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{b},$$

$$\text{если } a=b;$$

$$a, b > 0$$

Ответ: равенство будет верным при  $a = 19$ .



## Проверь себя!

1. Сравните числа 2,1 и  $\sqrt{4,3}$ .
2. Между какими целыми последовательными числами заключено число  $\sqrt{12}$ ?

Ответ: 1).  $2,1 > \sqrt{4,3}$ ; 2).  $3 < \sqrt{12} < 4$ .

## Попробуй-ка реши!

1. Какое из чисел больше —  $(3 + \sqrt{5})$  или  $(\sqrt{8} + \sqrt{6})$ ?
2. Найдите наибольшее целое решение неравенства  $(\sqrt{2} - 2)x > \sqrt{2} + 2$ .

Ответ: 1).  $(\sqrt{8} + \sqrt{6})$  больше; 2).  $-6$ .



## § 2.

## Свойства арифметических корней $a \geq 0; b \geq 0$

1.

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt{a^{2n}} = |a|^n$$

$$\sqrt{a} \geq 0$$

Например:

$$\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$$

$$\sqrt{(-3)^6} = |(-3)^3| = |-3|^3 = 3^3 = 27$$

$$\sqrt{2^4} = 2^2 = 4$$

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

2.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$\Leftrightarrow$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

3.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad b \neq 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad b \neq 0$$

4.

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

$\Leftrightarrow$

$$a = (\sqrt{a})^2$$

5.

$$(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$$

$\Leftrightarrow$

$$\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$$

6.

Внесение множителя под знак корня:

Вынесение множителя из-под знака корня:

$$\text{а) } c\sqrt{a} = \sqrt{c^2 a},$$

если  $c > 0$

$$\text{б) } c\sqrt{a} = -\sqrt{c^2 a},$$

если  $c < 0$

$$c = \sqrt{c^2}$$

$$-c = -\sqrt{c^2}$$

$$\sqrt{a^2 b} = |a| \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = |a| \sqrt{b}$$

$$\begin{array}{c} a\sqrt{b} \\ a > 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} -a\sqrt{b} \\ a < 0 \end{array}$$

7. Избавление знаменателя дроби от иррациональности:

$$1). \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$2). \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$$

$$3). \frac{a}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{a(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}$$

8. Сложение и вычитание корней:  $a\sqrt{b} \pm c\sqrt{b} = \sqrt{b}(a \pm c)$



## Алгоритм

52

## Квадратный корень из степени

1. Запишите за чертой формулу  $\sqrt{a^2} = |a|$  или  $\sqrt{a^{2n}} = |a|^n$ .
2. Представьте подкоренное выражение в виде квадрата некоторого выражения.  
Например:  $a^6 = (a^3)^2$ ;  $(a-b)^4 = ((a-b)^2)^2$
3. Примените формулу п. 1 к решению примера.
4. Раскройте скобки модуля по его определению:  $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$
5. Запишите ответ.

**З а м е ч а н и е.** Алгоритм применяем устно, постепенно упрощая выражение.

## Примеры

1. Найдите значение выражения  $\sqrt{x^2}$ , если 1).  $x = 1$ ; 2).  $x = -3$ .

*Решение.*

$$1). \sqrt{1^2} = |1| = 1$$

$$\left| \begin{array}{l} \sqrt{a^2} = |a| = a, \text{ если } a \geq 0 \end{array} \right.$$

$$2). \sqrt{(-3)^2} = |-3| = -(-3) = 3$$

$$\left| \begin{array}{l} \sqrt{a^2} = |a| = -a, \text{ если } a < 0 \end{array} \right.$$

2. Упростите: 1).  $\sqrt{(-5)^6}$ ; 2).  $\sqrt{(-3)^4}$ ; 3).  $\sqrt{(4-\sqrt{5})^2}$ ; 4).  $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ ; 5).  $\sqrt{(a+3)^2}$ , если  $a < -3$ .

*Решение.*

$$1). \sqrt{(-5)^6} = \sqrt{((-5)^3)^2} = \left| \underset{<0}{(-5)^3} \right| = -(-5^3) = +5^3 = 125$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$|-a^3| = |-a|^3$$

$$2). \sqrt{(-3)^4} = \sqrt{((-3)^2)^2} = \left| \underset{>0}{(-3)^2} \right| = 3^2 = 9$$

$$|-a^2| = |-a|^2$$

$$3). \sqrt{(4-\sqrt{5})^2} = |4-\sqrt{5}| = \left| \underset{>0}{\sqrt{16}-\sqrt{5}} \right| = 4-\sqrt{5}$$

$$\sqrt{16} > \sqrt{5},$$

$$\text{то } 4-\sqrt{5} > 0$$

**Помни!**  $|a| \geq 0$ , в ответе всегда неотрицательное число!



$$4). \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = |\sqrt{3}-2| = \left| \underset{<0}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} \right| = 2-\sqrt{3} \quad \left| \begin{array}{l} \sqrt{3} < \sqrt{4}, \\ \text{то } \sqrt{3}-2 < 0 \end{array} \right.$$

$$5). \text{ Упростите выражение } \sqrt{(a+3)^2}, \quad \left| \begin{array}{l} \text{если } a < -3 \\ \sqrt{(a+3)^2} = \left| \underset{<0}{a+3} \right| = -(a+3) = -a-3 \\ |a| = a, \text{ если } a \geq 0 \\ |a| = -a, \text{ если } a < 0 \end{array} \right.$$

3. Решите уравнение  $\sqrt{(x-5)^2} = x-5$ .

Решение.

$$\sqrt{(x-5)^2} = |x-5|, \text{ получим } |x-5| = x-5, x \geq 5. \text{ Ответ: } [5; +\infty).$$

### Проверь себя!

1. ГИА. Упростите:  $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$

2.  $\sqrt{c^{12}}$ , если  $c < 0$

3.  $\sqrt{(-2)^{10}}$

4.  $\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{6})^2}$

5. Решите уравнение  $\sqrt{(5-2x)^2} = 2x-5$ .

Ответ: 1). 1; 2).  $c^6$ ; 3).  $2^5$ ; 4).  $\sqrt{6}-\sqrt{5}$ ; 5).  $x \geq 2,5$ .

### Алгоритм

53

### Квадратный корень из произведения

1. Запишите формулу  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$  или  $\sqrt{abc} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$ .
2. Представьте выражение под знаком корня в виде произведения чисел  $a^2$  и  $b^2$  (для этого разложите подкоренное выражение на простые множители и запишите их в виде второй степени).
3. Примените формулу  $\sqrt{a^2} = a$ , если  $a \geq 0$ .
4. Если дано произведение корней, то примените формулу  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ .
5. Запишите ответ.



### Примеры

Вычислите.

$$1. \sqrt{0,01 \cdot 169} = \sqrt{0,01} \cdot \sqrt{169} = 0,1 \cdot 13 = 1,3$$

$$2. \sqrt{108 \cdot 27} = \sqrt{36 \cdot 3 \cdot 3^3} = \sqrt{6^2} \cdot \sqrt{3^4} = 6 \cdot 3^2 = 6 \cdot 9 = 54$$

$$3. \sqrt{1764} = \sqrt{21^2 \cdot 2^2} = \sqrt{21^2} \cdot \sqrt{2^2} = 21 \cdot 2 = 42$$

$$4. \sqrt{625 \cdot 9 \cdot 36} = \sqrt{25^2 \cdot 3^2 \cdot 6^2} = \sqrt{25^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{6^2} = 25 \cdot 3 \cdot 6 = 450$$

$$5. \sqrt{2} \cdot \sqrt{22} \cdot \sqrt{11} = \sqrt{2 \cdot 22 \cdot 11} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 11} = \sqrt{2^2 \cdot 11^2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{11^2} = 2 \cdot 11 = 22$$

$$6. \sqrt{113^2 - 112^2} = \sqrt{(113 - 112)(113 + 112)} = \sqrt{1 \cdot 225} = \sqrt{15^2} = 15$$

$$7. \sqrt{5^4 \cdot 3^2} = \sqrt{5^4} \cdot \sqrt{3^2} = 5^2 \cdot 3 = 25 \cdot 3 = 75$$

$$8. \sqrt{72 \cdot 32} = \sqrt{36 \cdot 2 \cdot 2^5} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2^6} = \sqrt{6^2} \cdot \sqrt{(2^3)^2} = 6 \cdot 8 = 48$$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a^{2n}} = |a|^n$$

$$\begin{array}{r|l} 1764 & 2 \\ 882 & 2 \\ 441 & 21^2 \end{array}$$

$$\sqrt{abc} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$1 \cdot a = a$$

$$\sqrt{a^{2n}} = a^n, a \geq 0$$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b};$$

$$\sqrt{a^{2n}} = |a|^n;$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2;$$

$$72 = 2 \cdot 36$$

### Проверь себя!

Вычислите.

$$1. \sqrt{225 \cdot 0,16 \cdot 400}$$

$$2. \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}$$

$$3. \sqrt{8} \cdot \sqrt{98}$$

$$4. \sqrt{0,3 \cdot 120}$$

$$5. \sqrt{50625}$$

Ответ: 1). 120; 2). 84; 3). 28; 4). 6; 5). 225.



## Алгоритм

54

## Квадратный корень из дроби

1. Запишите формулу  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ .
2. Представьте под корнем числа в виде квадратов выражений, например:  $\frac{144}{0,01} = \frac{12^2}{(0,1)^2}$ . Для этого разложите числа на множители и запишите их в виде степени, если эти числа не в таблице квадратов и не записаны дробным числом  $A \frac{m}{n} = \frac{An+m}{n}$ .
3. Примените формулу п. 1.
4. Если дано частное корней  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ , то примените формулу п. 1 справа налево:  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ .
5. Найдите частное чисел  $a$  и  $b$  и перейдите к п. 2 и п. 3.

**З а м е ч а н и е.** Алгоритм применяйте устно, записывая упрощения в строку.

## Примеры

Вычислите.

$$1. \sqrt{\frac{16}{81}} - \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{225}} = \sqrt{\frac{4^2}{9^2}} - \frac{\sqrt{13^2}}{\sqrt{15^2}} =$$

$$= \frac{4}{9} - \frac{13}{15} = \frac{20-39}{45} = -\frac{19}{45}$$

$$2. \frac{4\sqrt{99}}{9\sqrt{44}} = \frac{4}{9} \sqrt{\frac{99}{44}} = \frac{4}{9} \sqrt{\frac{11 \cdot 9}{11 \cdot 4}} =$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{\sqrt{3^2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 2} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}; \sqrt{16} = 4;$$

$$\sqrt{81} = 9; \sqrt{a^2} = a, \text{ если } a \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$



$$3. \sqrt{3\frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{\sqrt{7^2}}{\sqrt{4^2}} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$$

$$4. 20\sqrt{18} : 5\sqrt{2} = 4\sqrt{18:2} = 4\sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}; A\frac{m}{n} = \frac{An+m}{n}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}; \sqrt{a^2} = a, \text{ если } a \geq 0$$

### Проверь себя!

Вычислите.

$$1. \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}$$

$$2. \frac{\sqrt{7,5}}{\sqrt{0,3}}$$

Ответ: 1).  $\frac{2}{3}$ ; 2). 5.

**З а м е ч а н и е.** Полезно прописывать под знаком корня числа в квадрате, даже если вы знаете значения корней из этих чисел, чтобы привыкнуть к понятию корня.

### Алгоритм

55

### Вынесение множителя из-под знака корня

1. Представьте выражение под знаком корня в виде произведения двух множителей, один из которых равен квадрату некоторого числа или выражения ( $\sqrt{a^2 \cdot b}$ ).

Например:

$$50 = 25 \cdot 2 = 5^2 \cdot 2$$

$$12 = 4 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$$

$$1000 = 100 \cdot 10 = 10^2 \cdot 10$$

$$x^5 = x^4 \cdot x = (x^2)^2 \cdot x$$

2. Извлеките корень из числа или выражения в квадрате  $\sqrt{a^2} = |a|$ , запишите его множителем перед знаком корня, а под корнем останется второй множитель:  $\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = |a| \sqrt{b}$ .

Например:  $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$ ;  $\sqrt{x^3} = \sqrt{x^2 \cdot x} = x\sqrt{x}, x \geq 0$



**З а м е ч а н и е.** Если корень извлекаем из степени с нечетным показателем (например,  $a^3$ ;  $a^5$ ;  $a^7$ ; ...), то считается, что  $a \geq 0$ , поэтому знак модуля в ответе писать не надо; если корень извлекается из степени с четным показателем, то знак модуля у выносимого множителя писать надо, по свойству:  $\sqrt{a^2} = |a|$  и  $\sqrt{a^{2n}} = |a|^n$ .

Например:

$$\sqrt{x^5} = \sqrt{x^4 \cdot x} = \sqrt{(x^2)^2 \cdot x} = x^2 \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x^6 b} = \sqrt{(x^3)^2 \cdot b} = |x^3| \sqrt{b}$$

### Примеры

Вынесите множитель из-под знака корня.

1.  $\sqrt{16x} = \sqrt{4^2 x} = 4\sqrt{x}$

2.  $\frac{1}{2}\sqrt{128} = \frac{1}{2}\sqrt{64 \cdot 2} = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 \cdot 2} = \frac{8}{2}\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

3.  $2\sqrt{18} = 2\sqrt{9 \cdot 2} = 2\sqrt{3^2 \cdot 2} = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

4.  $\sqrt{27c^6}$ ,  $c < 0$

$$\sqrt{27c^6} = \sqrt{9 \cdot 3 \cdot (c^3)^2} = 3|c^3| \sqrt{3} = 3(-c^3) \sqrt{3} = -3c^3 \sqrt{3}$$

5.  $\sqrt{16x^2 y}$ ,  $x < 0$

$$\sqrt{16x^2 y} = \sqrt{4^2 x^2 y} = 4|x| \sqrt{y} = -4x \sqrt{y} \quad \left| \sqrt{a^2} = |a|; |a| = -a, \text{ если } a < 0 \right.$$

6.  $\sqrt{25a^3 b^3}$ ,  $a < 0$ ;  $b < 0$

$$\begin{aligned} \sqrt{25a^3 b^3} &= \sqrt{25} \cdot \sqrt{a^2 \cdot a \cdot b^2 \cdot b} = \\ &= 5|a| \cdot |b| \cdot \sqrt{ab} = 5(-a)(-b) \sqrt{ab} = 5ab \sqrt{ab} \end{aligned} \quad \left| \sqrt{a^2} = |a| = -a, \text{ если } a < 0 \right.$$

7.  $\frac{1}{x} \sqrt{-x^3}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \sqrt{-x^3} &= \frac{1}{x} \sqrt{-x \cdot x^2} = \frac{1}{x} |x| \sqrt{-x} = \\ &= \frac{-x}{x} \sqrt{-x} = -\sqrt{-x} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \sqrt{a} \text{ имеет смысл, если } a \geq 0 \\ -x^3 > 0, \text{ тогда } x < 0 \Rightarrow |x| = -x \end{array} \right.$$



**Проверь себя!**

Вынесите множитель из-под знака корня.

1.  $\sqrt{80}$  2.  $-\frac{1}{5}\sqrt{275}$  3.  $\sqrt{160}$  4.  $\sqrt{48x^2}$  5.  $\sqrt{72a^6}, a < 0$

Ответ: 1).  $4\sqrt{5}$ ; 2).  $-\sqrt{11}$ ; 3).  $4\sqrt{10}$ ; 4).  $4|x|\sqrt{3}$ ; 5).  $-6a^3\sqrt{2}$ .**Алгоритм****56****Внесение множителя под знак корня**

1. Возведите в квадрат модуль стоящего перед корнем множителя и запишите его под корень:  $|a| = \sqrt{a^2}$ .
2. Умножьте полученное число в квадрате на подкоренное выражение под общим корнем:  $\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$ .
3. Перед корнем поставьте знак «+», если множитель был положительный, и знак «-», если множитель был отрицательный:

$$\begin{array}{cc}
 & a\sqrt{b} \\
 & \swarrow \quad \searrow \\
 a \geq 0, \text{ то} & a < 0, \text{ то} \\
 +\sqrt{a^2b} & -\sqrt{a^2b}
 \end{array}$$

Например, внести под знак корня множитель:

$-3\sqrt{2} = -\sqrt{9 \cdot 2} = -\sqrt{18};$

$2\sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$

$-a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}$

**Примеры**

Внесите множитель под знак корня.

1.  $5\sqrt{3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}$

2.  $3\sqrt{2x} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2x} = \sqrt{18x}$

3.  $-3\sqrt{5} = -\sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{45}$

4.  $-7\sqrt{a} = -\sqrt{49} \cdot \sqrt{a} = -\sqrt{49a}$

5.  $-x^2\sqrt{3} = -\sqrt{x^4} \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{3x^4}$

$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}, a > 0$

$-a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}, a < 0$

$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$



$$6. -ab\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}, a > 0; b > 0$$

$$\begin{aligned} -ab\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} &= -\sqrt{a^2 b^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \\ &= -\frac{\sqrt{a^2 b^2 (b+a)}}{ab} = -\sqrt{ab(a+b)} \end{aligned}$$

$$m \cdot \frac{a}{b} = \frac{m \cdot a}{b}$$

### Проверь себя!

Внесите множитель под знак корня.

$$1. 3\sqrt{0,1} \quad 2. -5\sqrt{3} \quad 3. a\sqrt{5}, a > 0 \quad 4. -a\sqrt{3}, a > 0$$

$$\text{Ответ: 1). } \sqrt{0,9}; 2). -\sqrt{75}; 3). \sqrt{5a^2}; 4). -\sqrt{3a^2}.$$

**З а м е ч а н и е.** Записывайте подробно все операции, пока не получите навыка, а затем операцию возведения в квадрат выполняйте «в уме» и сразу записывайте число. Например:  $4\sqrt{3} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{48}$ .

Действие внесение множителя и вынесение множителя из-под знака корня применяют при сравнении и упрощении корней.

### Примеры

$$1. \text{ Сравните числа } 4\sqrt{8} \text{ и } 2\sqrt{18}.$$

*Решение.*

$$\text{I способ. Внесем множители под знак корня: } 4\sqrt{8} = \sqrt{16 \cdot 8} = \sqrt{128};$$

$$2\sqrt{18} = \sqrt{4 \cdot 18} = \sqrt{72}; 128 > 72, \text{ значит, } \sqrt{128} > \sqrt{72},$$

$$\text{а значит, и } 4\sqrt{8} > 2\sqrt{18}.$$

**II способ.** Вынесем множители из-под знака корня:

$$4\sqrt{8} = 4\sqrt{4 \cdot 2} = 4 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2};$$

$$2\sqrt{18} = 2\sqrt{9 \cdot 2} = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}; 8\sqrt{2} > 6\sqrt{2}, \text{ значит, и } 4\sqrt{8} > 2\sqrt{18}.$$

$$2. \text{ Упростите выражение: 1). } -\frac{2}{3}\sqrt{27} + \frac{1}{5}\sqrt{300} + 5\sqrt{3};$$

$$2). b\sqrt{\frac{a}{b}} + a\sqrt{\frac{b}{a}}, a > 0, b > 0.$$



Решение.

1). Вынесем множители из-под знака корня:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}\sqrt{27} + \frac{1}{5}\sqrt{300} + 5\sqrt{3} &= -\frac{2}{3}\sqrt{9 \cdot 3} + \frac{1}{5}\sqrt{100 \cdot 3} + 5\sqrt{3} = \\ &= -\frac{2 \cdot 3}{3}\sqrt{3} + \frac{10}{5}\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = -2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

2). Внесем множители под знак корня:

$$b\sqrt{\frac{a}{b}} + a\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{b^2 \cdot \frac{a}{b}} + \sqrt{a^2 \cdot \frac{b}{a}} = \sqrt{ab} + \sqrt{ab} = 2\sqrt{ab}$$

Алгоритм

57

Сложение и вычитание квадратных корней

1. Приведите корни, если возможно, к одному подкоренному выражению по свойствам:

$$\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b} \text{ или } a\sqrt{b} = \sqrt{|a|^2 b}$$

2. Сложите или вычтите множители перед корнями с одинаковыми подкоренными выражениями (иначе — приведите подобные корни).

3. Умножьте полученный множитель на корень.

Примеры

Упростите выражение.

$$\begin{aligned} 1. \quad \sqrt{27} + \sqrt{12} - \sqrt{75} &= 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = \\ &= (3 + 2 - 5)\sqrt{3} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \sqrt{14} + \sqrt{\frac{2}{7}} + \sqrt{\frac{7}{2}} &= \sqrt{2 \cdot 7} + \sqrt{\frac{2 \cdot 7}{7 \cdot 7}} + \sqrt{\frac{7 \cdot 2}{2 \cdot 2}} = \\ &= \sqrt{14} + \frac{\sqrt{14}}{7} + \frac{\sqrt{14}}{2} = \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{14} = 1\frac{9}{14}\sqrt{14} \end{aligned}$$

$$27 = 9 \cdot 3;$$

$$12 = 4 \cdot 3;$$

$$75 = 25 \cdot 3$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}$$



$$3. \quad \frac{1}{3}\sqrt{9x^5} + \frac{1}{2}\sqrt{4x^3} - x\sqrt{x} + x\sqrt{x^3} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3x^2\sqrt{x} + \frac{1}{2} \cdot 2x\sqrt{x} - x\sqrt{x} + x \cdot x\sqrt{x} =$$

$$= x^2\sqrt{x} + x\sqrt{x} - x\sqrt{x} + x^2\sqrt{x} =$$

$$= x^2\sqrt{x} + x^2\sqrt{x} = 2x^2\sqrt{x}$$

Считать  $x > 0$ 

$$\sqrt{a^{2n}} = |a|^n$$

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

$$4. \quad \text{Докажите, что } 5 - \left( 3\sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt{0,25} \right) = 2,5.$$

Доказательство. Левая часть равенства:

$$5 - \left( 3\sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt{0,25} \right) = 5 - \left( 3 \cdot \frac{2}{3} + 0,5 \right) = 5 - (2 + 0,5) = 5 - 2,5 = 2,5$$

получили правую часть, следовательно, равенство верное

**Алгоритм****58****Освобождение от иррациональности  
знаменателя или числителя дроби****I тип дроби:**  $\frac{b}{\sqrt{a}}$  или  $\frac{\sqrt{a}}{b}$ 1. Умножьте числитель и знаменатель дроби на  $\sqrt{a}$ :

$$1). \quad \frac{b \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \frac{b\sqrt{a}}{a} \quad 2). \quad \frac{\sqrt{a}}{b} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}}{b \cdot \sqrt{a}} = \frac{a}{b\sqrt{a}}$$

2. Если в знаменателе дроби  $\sqrt{a^{2n-1}}$ , то сначала умножьте числитель и знаменатель на  $\sqrt{a}$ :  $\sqrt{a^{2n-1}} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^{2n}}$ , а затем в знаменателе примените формулу  $\sqrt{a^{2n}} = a^n$ ,  $a > 0$ .

$$\text{Например: } \frac{2}{\sqrt{27}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3^3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3^4}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

**Примеры**

Освободите от иррациональности знаменатель или числитель дроби.



$$1. \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2}$$

$$2. \frac{5}{\sqrt{125}} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5^3} \cdot \sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5^4}} = \frac{5\sqrt{5}}{5^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$3. \frac{8}{3\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$4. \frac{1}{\sqrt{\underbrace{a-b}_x}} = \frac{\sqrt{a-b}}{a-b}$$

$$5. \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{b}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a}$$

$$\sqrt{a^{2n}} = a^n, a > 0$$

$$\frac{b}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{b} = \frac{a}{b\sqrt{a}}$$

**З а м е ч а н и е.** Число  $\sqrt{a}$  можно рассматривать как дробь  $\frac{\sqrt{a}}{1}$  и получить:  $\sqrt{a} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{a}{\sqrt{a}}; \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

### Проверь себя!

Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби.

$$1. \frac{c}{\sqrt{3}}$$

$$2. \frac{4}{3\sqrt{5}}$$

$$3. \frac{4}{\sqrt{x-y}}$$

Ответ: 1).  $\frac{c\sqrt{3}}{3}$ ; 2).  $\frac{4\sqrt{5}}{15}$ ; 3).  $\frac{4\sqrt{x-y}}{x-y}$ .

II тип дроби:  $\frac{c}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$

1. Умножьте числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение, чтобы получить в знаменателе разность квадратов, тогда  $(\sqrt{a})^2 = a; (\sqrt{b})^2 = b$ .  
( $a \oplus \sqrt{b}$  и  $a \ominus \sqrt{b}$ ;  $\sqrt{a} \ominus \sqrt{b}$  и  $\sqrt{a} \oplus \sqrt{b}$  — сопряженные выражения):



$$\frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{c(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{c(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$$

2. Упростите дробь; если можно, сократите.

### З а м е ч а н и я

1. В знаменателе всегда получите разность!
2. Если в знаменателе сумма чисел, то умножьте числитель и знаменатель на разность этих чисел и наоборот.

### Примеры

Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби.

$$1. \quad \frac{6}{\sqrt{3} + 1} = \frac{6(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{6(\sqrt{3} - 1)}{3 - 1} = \frac{6(\sqrt{3} - 1)}{2} = 3(\sqrt{3} - 1)$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{c}{\sqrt{a} + b} = \frac{c(\sqrt{a} - b)}{a - b^2} \\ (\sqrt{a} + b)(\sqrt{a} - b) = a - b^2 \end{array} \right.$$

$$2. \quad \frac{33}{7 - 3\sqrt{3}} = \frac{33(7 + 3\sqrt{3})}{(7 - 3\sqrt{3})(7 + 3\sqrt{3})} = \frac{33(7 + 3\sqrt{3})}{49 - 9 \cdot 3} = \frac{33(7 + 3\sqrt{3})}{22} = \frac{3(7 + 3\sqrt{3})}{2}$$

$$3. \quad \frac{12}{\sqrt{3} + \sqrt{6}} = \frac{12(\sqrt{6} - \sqrt{3})}{(\sqrt{3} + \sqrt{6})(\sqrt{6} - \sqrt{3})} = \frac{12(\sqrt{6} - \sqrt{3})}{6 - 3} = \frac{12(\sqrt{6} - \sqrt{3})}{3} = 4(\sqrt{6} - \sqrt{3})$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b} \\ a > b \end{array} \right.$$

**Полезный совет.** Если в знаменателе дана сумма двух корней, то в разности первым числом пишите то, которое больше, тогда разность квадратов корней будет положительным числом.

Например:  $\sqrt{3} + \sqrt{6} = \sqrt{6} + \sqrt{3}$ ;  $(\sqrt{6} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{3}) = 6 - 3 > 0$

$$4. \quad \frac{5 + 3\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2} = \frac{(5 + 3\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{10 + 6\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - 9}{4 - 3} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1} = 1 + \sqrt{3}$$

$$\left| \begin{array}{l} 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3(\sqrt{3})^2 = \\ = 3 \cdot 3 = 9 \\ 2 > \sqrt{3} \end{array} \right.$$



## Проверь себя!

Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби.

$$1. \frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \quad 2. \frac{9}{3-2\sqrt{2}}$$

Ответ: 1).  $2(\sqrt{5}+\sqrt{3})$ ; 2).  $9(3+2\sqrt{2})$ .

**Полезный совет.** Если под корнем стоит сумма или разность чисел  $\sqrt{c \pm k\sqrt{b}}$ , одно из которых содержит корень  $k\sqrt{b}$ , то представьте число без корня ( $c$ ) в виде суммы таких чисел, чтобы получить формулу  $(a \pm b)^2$ , если это возможно. Числа  $a$  и  $b$  найдите из члена  $k = 2a\sqrt{b}$ .

Например:

$$1. \sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{4+4\sqrt{3}+3} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = 2+\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} 7 &= 4+3; 4\sqrt{3} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \\ a &= 2; b = \sqrt{3}; \\ a^2 \pm 2ab + b^2 &= (a \pm b)^2 \end{aligned}$$

$$2. \sqrt{8\sqrt{3}+19} = \sqrt{16+8\sqrt{3}+3} = \sqrt{(4+\sqrt{3})^2} = 4+\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} 19 &= 16+3; 8\sqrt{3} = 2 \cdot 4\sqrt{3}; \\ 3 &= (\sqrt{3})^2; a = 4; b = \sqrt{3} \end{aligned}$$

## Решение примеров на свойства корней

1. Упростите выражение, если  $x < 3$ :  $(x-3)\sqrt{\frac{1}{x^2-6x+9}}$ .

Решение.

$$\begin{aligned} (x-3)\sqrt{\frac{1}{x^2-6x+9}} &= (x-3)\sqrt{\frac{1}{(x-3)^2}} = \\ &= \frac{x-3}{|x-3|} = \frac{x-3}{3-x} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |a| &= -a, \text{ если } a < 0 \\ |x-3| &= 3-x, \text{ так как } x < 3 \end{aligned}$$

2. ГИА. Упростите выражение  $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(3-\sqrt{5})^2}$ .



Решение.

$$\begin{aligned} \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} &= \left| \underset{<0}{2-\sqrt{5}} \right| + \left| \underset{>0}{3-\sqrt{5}} \right| = \\ &= \left| \underset{<0}{\sqrt{4}-\sqrt{5}} \right| + \left| \underset{>0}{\sqrt{9}-\sqrt{5}} \right| = -(\underset{<0}{2-\sqrt{5}}) + (\underset{>0}{3-\sqrt{5}}) = \\ &= \sqrt{5} - 2 + 3 - \sqrt{5} = 1 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \sqrt{a^2} = |a| \\ |a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

3. ГИА. Сравните  $\sqrt{140}$  и  $\frac{1}{7+4\sqrt{3}} + \frac{1}{7-4\sqrt{3}}$ .

Решение.

$$\begin{aligned} 1). \quad \frac{1}{7+4\sqrt{3}} + \frac{1}{7-4\sqrt{3}} &= \frac{7-4\sqrt{3}+7+4\sqrt{3}}{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})} = \\ &= \frac{14}{49-16 \cdot 3} = \frac{14}{1} = 14 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \text{ОЗ: } (7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3}) \\ (a-b)(a+b) = a^2 - b^2; \\ (4\sqrt{3})^2 = 16 \cdot 3 = 48 \\ \sqrt{a} < \sqrt{b}, \text{ если } 0 < a < b \end{array} \right.$$

2).  $\sqrt{140}$  и  $14 = \sqrt{196}$ ,  $140 < 196$ , то и  $\sqrt{140} < \sqrt{196}$ , а значит,

$$\sqrt{140} < \frac{1}{7+4\sqrt{3}} + \frac{1}{7-4\sqrt{3}}$$

Ответ:  $\sqrt{140}$  меньше.

4. ГИА. Найдите значение выражения  $(\sqrt{\sqrt{10}-3} + \sqrt{\sqrt{10}+3})^2$ .

Решение.

$$\begin{aligned} (\sqrt{\sqrt{10}-3} + \sqrt{\sqrt{10}+3})^2 &= \\ &= (\sqrt{\sqrt{10}-3})^2 + 2\sqrt{\sqrt{10}-3} \cdot \sqrt{\sqrt{10}+3} + (\sqrt{\sqrt{10}+3})^2 = \\ &= (\sqrt{\sqrt{10}-3})^2 + 2\sqrt{(\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-3)} + (\sqrt{\sqrt{10}+3})^2 = \\ &= |\sqrt{10}-3| + 2\sqrt{10-9} + \sqrt{10}+3 = \\ &= \sqrt{10}-3 + 2\sqrt{1} + \sqrt{10}+3 = 2\sqrt{10}+2 = 2(\sqrt{10}+1) \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (\sqrt{a})^2 = a; \sqrt{1} = 1; \\ \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}; \\ \sqrt{10}-3 > 0; 10 > 9; \\ |a| = a, a \geq 0 \end{array} \right.$$

**Полезный совет.** Чтобы многочлен разложить на множители, можно вынести множитель за скобки или применить формулу  $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ ; удобно также воспользоваться формулой  $a = (\sqrt{a})^2$ , если  $a > 0$ .



Например, вынести множитель за скобки:

$$\begin{array}{l} 1). 3 + \sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 + \sqrt{3} = \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) \\ 2). a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \\ 4a^2 - 3 = (2a)^2 - (\sqrt{3})^2 = (2a - \sqrt{3})(2a + \sqrt{3}) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} (\sqrt{a})^2 = a \\ a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \end{array} \right.$$

### Примеры

Разложите на множители, используя формулу разности квадратов (1-2).

$$\begin{array}{l} 1. 11 - 16b^2 = (\sqrt{11})^2 - (4b)^2 = \\ = (\sqrt{11} - 4b)(\sqrt{11} + 4b) \\ 2. x - 2 = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2}); \\ x \geq 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \\ a = (\sqrt{a})^2, a > 0 \end{array} \right.$$

Разложите на множители путем вынесения множителя за скобки.

$$\begin{array}{l} 3. \sqrt{33} - \sqrt{22} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{11} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{11} = \\ = \sqrt{11}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \\ 4. x - 3\sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 - 3\sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 3) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \end{array} \right.$$

5. Сократите дробь: 1).  $\frac{5 + \sqrt{10}}{\sqrt{10}}$ ; 2).  $\frac{2\sqrt{x} - 3\sqrt{y}}{4x - 9y}$

$$1). \frac{5 + \sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{(\sqrt{5})^2 + \sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \\ = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad \left| \begin{array}{l} \sqrt{10} : \sqrt{5} = \sqrt{2} \end{array} \right.$$

$$2). \frac{2\sqrt{x} - 3\sqrt{y}}{4x - 9y} = \frac{2\sqrt{x} - 3\sqrt{y}}{(2\sqrt{x})^2 - (3\sqrt{y})^2} = \\ = \frac{2\sqrt{x} - 3\sqrt{y}}{(2\sqrt{x} - 3\sqrt{y})(2\sqrt{x} + 3\sqrt{y})} = \frac{1}{2\sqrt{x} + 3\sqrt{y}} \quad \left| \begin{array}{l} 4x = 2^2(\sqrt{x})^2 = (2\sqrt{x})^2; \\ a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \end{array} \right.$$



6. Преобразуйте выражения: 1).  $(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})$

2).  $(6 - \sqrt{2})^2 + 3\sqrt{32}$

$$1). (\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a}) = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{a})^2 = x - a \quad \left| \begin{array}{l} (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \end{array} \right.$$

$$2). (6 - \sqrt{2})^2 + 3\sqrt{32} = 36 - 12\sqrt{2} + 2 + 3\sqrt{2^5} = 38 - 12\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 38 \quad \left| \begin{array}{l} 3\sqrt{2^5} = 3\sqrt{2^4 \cdot 2} = 12\sqrt{2}; \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{array} \right.$$

### Примеры

Разложите на множители.

1.  $x^2 - 6$

2.  $9x^2 - 5$

3.  $a - 3, a \geq 0$

4.  $\sqrt{a} - \sqrt{2a}$

Ответ: 1).  $(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})$ ; 2).  $(3x - \sqrt{5})(3x + \sqrt{5})$ ;

3).  $(\sqrt{a} - \sqrt{3})(\sqrt{a} + \sqrt{3})$ ; 4).  $\sqrt{a}(1 - \sqrt{2})$ .



## §3.

## Извлечение корня из числа

## Алгоритм

59

Извлечение квадратного корня  
из натурального числа

1. Разбейте число  $m$  на грани по две цифры в каждой, справа налево. Количество граней покажет, сколько цифр в ответе.

*Например:* в числе 32'49 две грани, значит, в ответе две цифры. В числе 1'52'27'56 четыре грани — в ответе четыре цифры.

2. Подберите к числу в первой грани слева такое наибольшее число, квадрат которого не превосходит числа в первой грани, и запишите эту цифру в ответ.

*Например:* в числе 12'74'49 первая грань — число  $12 : 3^2 < 12 < 4^2$ , поэтому число 3 запишите в ответ.

3. Квадрат числа из ответа запишите под первой гранью и вычтите.

*Например:*

$$\begin{array}{r} \sqrt{12'74'49} = 3.. \\ - \quad 9 \\ \hline 3 \end{array}$$

4. К остатку снесите вторую грань.

*Например:*

$$\begin{array}{r} \sqrt{12'74'49} = 3.. \\ - \quad 9 \\ \hline 374 \end{array}$$

5. Удвойте результат корня и запишите его перед первым остатком (п. 4).

*Например:*

$$\begin{array}{r} 6 \mid \sqrt{12'74'49} = 3.. \\ - \quad 9 \\ \hline 374 \end{array}$$

6. Подберите такую цифру, чтобы, приписав ее к удвоенному результату и умножив полученное число на эту цифру (число), получить число, равное или меньше числа п. 4. Запишите подобранную цифру в ответ.



Например:

$$\sqrt{12'74'49} = 35$$

$$\begin{array}{r|l} \times 6\boxed{5} & \begin{array}{r} 9 \\ - 374 \\ \hline 325 \\ 49 \end{array} \\ \boxed{5} & \end{array}$$

7. Если в числе граней больше, чем две, то продолжите извлечение корня дальше, применяя п. 4, 5, 6.

Например:

$$\sqrt{12'74'49} = 357$$

$$\begin{array}{r|l} \times 65 & \begin{array}{r} 9 \\ - 374 \\ \hline 325 \\ 4949 \\ \hline 4949 \\ 0 \end{array} \\ 5 & \\ \times 707 & \\ 7 & \end{array}$$

8. Если корень не извлекается нацело, то поставьте в ответе запятую и продолжайте извлечение корня до нужного десятичного разряда, приписывая в каждую грань дальше два нуля.
9. Запишите ответ.

### Примеры

Извлеките квадратный корень из чисел: 1.  $\sqrt{8464}$ ; 2.  $\sqrt{33856}$ ; 3.  $\sqrt{1522756}$ ; 4.  $\sqrt{1225}$ .

Решение.

1.  $\sqrt{84'64} = 92$

$$\begin{array}{r|l} \times 18\boxed{2} & \begin{array}{r} 81 \\ - 364 \\ \hline 364 \\ 0 \end{array} \\ 2 & \end{array}$$

2.

$$\sqrt{3'38'56} = 184$$

$$\begin{array}{r|l} \times 2\boxed{8} & \begin{array}{r} 1 \\ - 238 \\ \hline 224 \\ 1456 \\ \hline 1456 \\ 0 \end{array} \\ 8 & \\ \times 36\boxed{4} & \\ 4 & \end{array}$$



3.  $\sqrt{1'52'27'56} = 1234$

$$\begin{array}{r}
 \times 2\boxed{2} \\
 \times 24\boxed{3} \\
 \times 246\boxed{4} \\
 \times 2464\boxed{4} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 - \\
 1 \\
 \hline
 52 \\
 - \\
 44 \\
 \hline
 827 \\
 - \\
 729 \\
 \hline
 9856 \\
 - \\
 9856 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \end{array}$$

4.  $\sqrt{12'25} = 35$

$$\begin{array}{r}
 \times 6\boxed{5} \\
 \times \boxed{5} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 - \\
 9 \\
 \hline
 325 \\
 - \\
 325 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \end{array}$$

### Проверь себя!

Извлеките квадратный корень из чисел:

1.  $\sqrt{2116}$

2.  $\sqrt{56169}$

3.  $\sqrt{239121}$

Ответ: 1). 46; 2). 237; 3). 489.

### Алгоритм

60

### Извлечение квадратного корня с заданной точностью из десятичной дроби

1. Разбейте число на грани по две цифры от запятой влево и вправо. Если справа не хватает разрядов, то припишите нули (по два нуля в каждой грани).
2. Извлекайте корень по алгоритму 59 как из натурального числа.
3. Когда извлечение корня из целой части закончится, поставьте в ответе запятую и продолжайте извлечение корня до требуемого разряда плюс один.

**З а м е ч а н и е.** Если требуется извлечь корень с точностью до 0,1, то извлеките корень до сотых долей и округлите до десятых. Если требуется извлечь корень с точностью до 0,01, то извлеките корень до тысячных долей и округлите до сотых и т. д.



**Пример**

Извлеките  $\sqrt{8}$  с точностью до 0,1.

*Решение.* Извлекаем  $\sqrt{8}$  до сотых.

$$\begin{array}{r} \sqrt{8,00'00} = 2,82... \\ \begin{array}{r} \times 4\boxed{8} \\ 8 \\ \times 56\boxed{2} \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} \underline{4} \\ 400 \\ \underline{384} \\ 1600 \\ \underline{1124} \\ 476 \end{array} \end{array}$$

$$\sqrt{8} = 2,82... \approx 2,8$$

*Ответ:*  $\sqrt{8} \approx 2,8$  с точностью до 0,1.

**Проверь себя!**

Извлеките  $\sqrt{23,45}$  с точностью до 0,01.

*Ответ:*  $\sqrt{23,45} \approx 4,84\boxed{2} \approx 4,84$ .

### Десятичные приближения корней с избытком и с недостатком

$\sqrt{2} = 1,4142... —$  иррациональное число

$\sqrt{1,96} = 1,4(0) —$  рациональное число

$1 < \sqrt{2} < 2$  с точностью до 1

$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$  с точностью до 0,1

$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$  с точностью до 0,01

$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$  с точностью до 0,001

Числа 1; 1,4; 1,41; 1,414... — десятичные приближения числа  $\sqrt{2}$  с недостатком.

Числа 2; 1,5; 1,42; 1,415... — десятичные приближения числа  $\sqrt{2}$  с избытком.

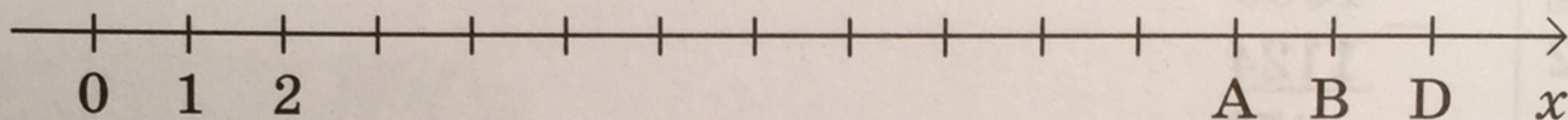
При округлении результата извлечения корня выбираем то значение, которое более точное, используя цифру разряда, стоящую за требуемым разрядом округления (см. алгоритм 60).



### Примеры

Подберите два последовательных целых числа, между которыми заключено число: 1.  $\sqrt{27}$ ; 2.  $\sqrt{7,5}$ .

1.  $\sqrt{27}$ :  $5 < \sqrt{27} < 6$ ;  $25 < 27 < 36$ ;  $\sqrt{27} \approx 5, \dots$
2.  $\sqrt{7,5}$ :  $2 < \sqrt{7,5} < 3$ ;  $4 < 7,5 < 9$ ;  $\sqrt{7,5} \approx 2, \dots$
3. На координатной прямой отмечены точки А, В, D. Где должна быть расположена точка С ( $4\sqrt{11}$ )?



*Решение.*

1. Измерим в единицах длины модуль чисел, изображенных точками А, В, D, и найдем их координаты: А(12); В(13); D(14).

2. Найдем координаты точки С:  
 $4\sqrt{11} = \sqrt{16 \cdot 11} = \sqrt{176}$ ; С( $\sqrt{176}$ )

3. Найдем приближенное значение  $\sqrt{176}$  до единиц:

$$\sqrt{169} < \sqrt{176} < \sqrt{196} \quad \left| \quad \sqrt{169} = 13; \quad \sqrt{196} = 14 \right.$$

Значит, точка С( $4\sqrt{11}$ ) находится между точками В и D.

*Ответ:* между В и D.

4. Сравните числа  $0,5\sqrt{108}$  и  $9\sqrt{3}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} 0,5\sqrt{108} &= 0,5\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3} = \\ &= 0,5 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$3\sqrt{3} < 9\sqrt{3}, \text{ значит, } 0,5\sqrt{108} < 9\sqrt{3}$$

*Ответ:*  $0,5\sqrt{108} < 9\sqrt{3}$ .

5. Решите уравнение  $5\sqrt{x} = 3$ .

*Решение.*

$$1). x \geq 0$$

$$2). 5\sqrt{x} = 3; \sqrt{x} = \frac{3}{5}; x = \frac{9}{25}; \frac{9}{25} \geq 0$$

*Ответ:*  $\frac{9}{25}$ .

108	2	$108 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3$
54	2	
27	3	
9	3	
3	3	

$\sqrt{x}$  имеет смысл при  $x \geq 0$   
возведите в квадрат левую  
и правую (положительные)  
части уравнения  
 $(\sqrt{x})^2 = x$



## Проверь себя!

ГИА. Расположите в порядке возрастания:  $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ ;  $4 \cdot \sqrt{\frac{1}{32}}$ ;  $\frac{1}{3}$ .

Ответ:  $\frac{1}{3}$ ;  $4 \cdot \sqrt{\frac{1}{32}}$ ;  $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ .

Попробуй не реши!

1. Упростите.

1).  $\sqrt{(-5)^4}$       2).  $\sqrt{81b^{18}}$ ,  $b < 0$       3).  $-5\sqrt{a^{10}}$ ,  $a \geq 0$

4).  $\sqrt{x^2 - 12x + 36}$ , если  $x < 6$       5).  $\frac{4\sqrt{40a^2}}{\sqrt{10}}$ ,  $a < 0$

6).  $\sqrt{(b+1)^2} + \sqrt{(b+3)^2}$ , если  $-3 \leq b \leq -1$       7).  $\sqrt{72} + \sqrt{128}$

2. Сравните  $2\sqrt{45}$  и  $\sqrt{125}$ .

3. Внесите под знак корня и вычислите:  $x\sqrt{-x^3}$ .

Ответ:

1. 1). 25; 2).  $-9b^9$ ; 3).  $-5a^5$ ; 4).  $6 - x$ ; 5).  $-8a$ ; 6). 2; 7).  $14\sqrt{2}$ .

2.  $2\sqrt{45} > \sqrt{125}$ ; 3.  $-\sqrt{-x^5}$ .

Попробуй-ка реши!

1. Внесите под корень и вычислите:  $(\sqrt{3} - 2)\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ .

2. Упростите:  $(\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{11 - 6\sqrt{2}})^2$ .

3. Сравните: 1).  $\sqrt{11} + \sqrt{3}$  и  $\sqrt{5} + \sqrt{7}$

2). ГИА.  $\left(\frac{1}{5\sqrt{2}-7} - \frac{1}{5\sqrt{2}+7}\right)$  и  $\sqrt{250}$

4. Вынесите общий множитель за скобки:  $\sqrt{-x} + \sqrt{xy}$ .

5. Упростите:  $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ .

Ответ: 1). -1

2). 8

3). 1)  $\sqrt{11} + \sqrt{3}$  больше; 2)  $\sqrt{250}$  больше

4).  $\sqrt{-x}(1 + \sqrt{-y})$

5).  $\sqrt{2} - 1$



## Глава VI. Действительные числа

### § 1.

### Рациональные и иррациональные числа

В разных классах мы изучаем разные числа:

1.  $N$  — натуральные числа: 1, 2, 3, 4, 5...

2.  $Z$  — целые числа: 0,  $\pm 1$ ,  $\pm 2$ ,  $\pm 3$ ...

3.  $\frac{m}{n}$  — дробные числа,  $n \in N$ ;  $m \in Z$ :  $-\frac{1}{2}$ ;  $\frac{2}{3}$ ;  $\frac{5}{4}$ ; ...

Натуральные числа и целые числа тоже можно записать дробью

$$\frac{m}{n}: 0 = \frac{0}{5}; -1 = -\frac{4}{4}; 5 = \frac{5}{1}; -2 = -\frac{8}{4}; 100 = \frac{100}{1} \dots$$

4.  $Q$  — рациональные числа — это все натуральные, целые и дробные числа. Каждое рациональное число можно записать обыкновенной дробью  $\frac{m}{n}$ , где  $n \in N$ ;  $m \in Z$ , или десятичной бесконечной периодической дробью.

Период — это повторяющаяся цифра или группа цифр, стоящих после запятой. Период записывают в круглых скобках.

Например:  $2 = 2,000\dots = 2,(0)$ ;  $\frac{2}{3} = 0,666\dots = 0,(6)$ ;  $\frac{4}{7} = 0,(571428)$ ;  $-1 = -1,000\dots = -1,(0)$ ;  $3,2(51)$  — читается так: 3 целых, 2 десятых, 51 в периоде.



5.  $\bar{Q}$  — иррациональные числа — это десятичные бесконечные непериодические дроби.

Например:  $\pi = 3,1415926\dots$ ;  $\sqrt{2} = 1,4142\dots$ ;  $\sin 15^\circ$  — иррациональные числа.

6.  $R$  — действительные вещественные числа — это все рациональные числа  $Q$  и иррациональные числа  $\bar{Q}$ . Действительные числа — это бесконечные десятичные периодические и непериодические дроби.

7. Комплексные числа — это числа вида  $z = a + bi$ , где  $a$  и  $b$  — действительные числа,  $i$  — мнимая единица ( $i = \sqrt{-1}$ ;  $i^2 = -1$ );  $bi$  — мнимая часть комплексного числа,  $a$  — действительная часть комплексного числа (рис. 19).

Например:  $z = 3 - 2i$ ;  $z = 0 - 6i$ ;  $z = 3 + 0i$

Удобно все перечисленные числа изобразить на схеме (рис. 20).

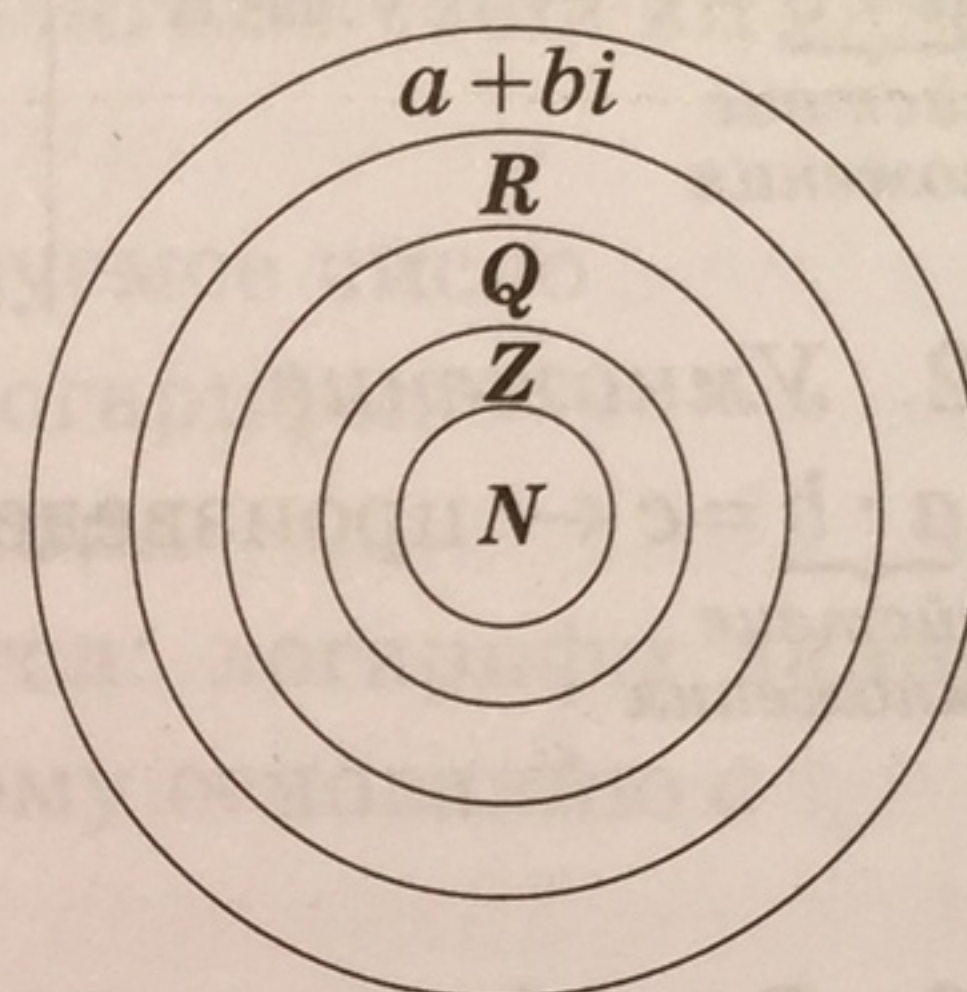


Рис. 19

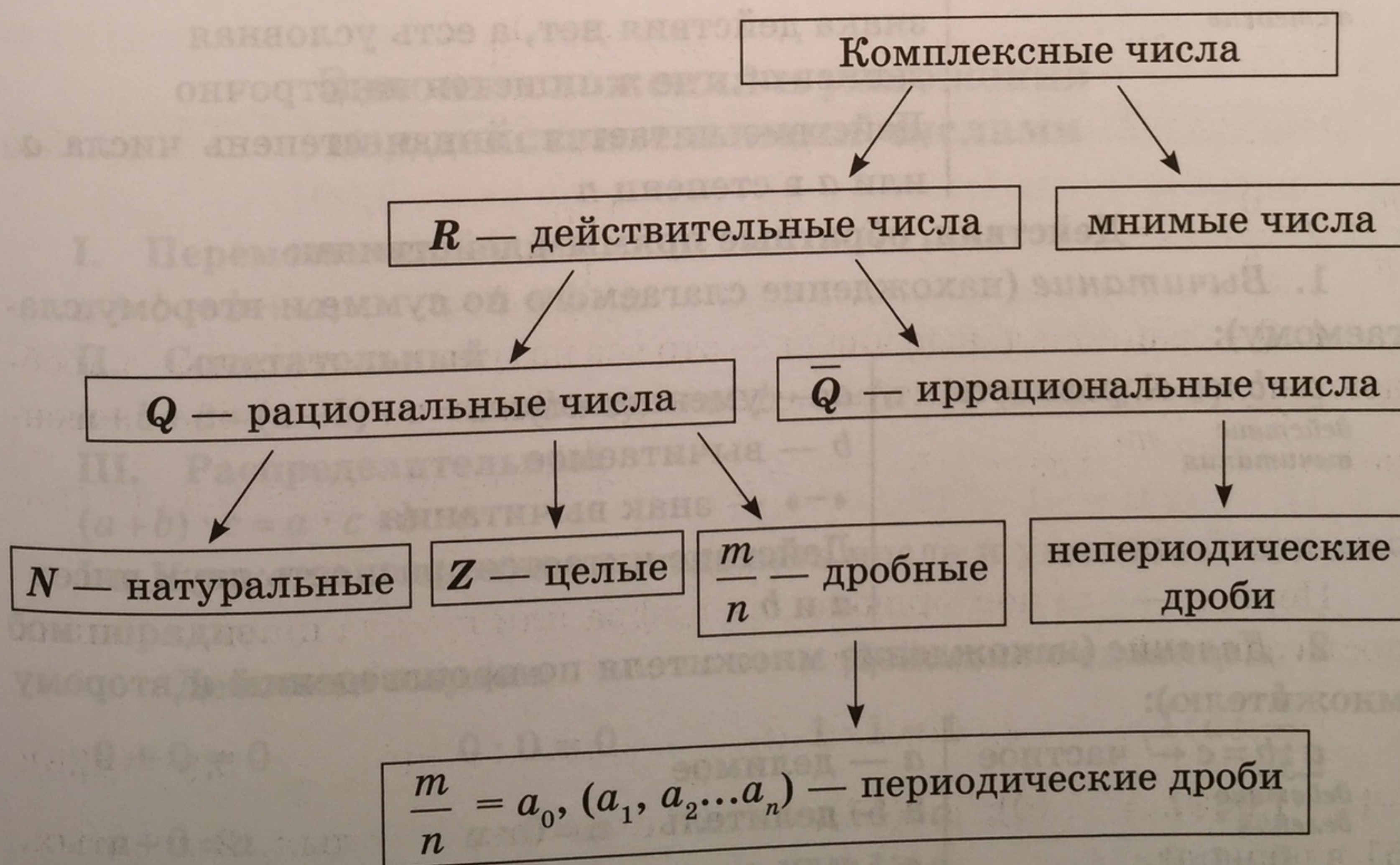


Рис. 20



По таким схемам удобно находить те числа, которые изучают в данном классе, а также видеть связь чисел между собой.

## Действия над действительными числами

### Прямые действия:

#### 1. Сложение

$\underbrace{a+b}_{\text{действие сложения}} = c \leftarrow$  сумма

$a$  и  $b$  — слагаемые

«+» — знак сложения

Действие читается: сумма двух чисел  $a$  и  $b$

#### 2. Умножение

$\underbrace{a \cdot b}_{\text{действие умножения}} = c \leftarrow$  произведение

$a$  и  $b$  — множители

«×» или «•» — знаки умножения

Действие читается: произведение двух чисел  $a$  и  $b$

#### 3. Возведение в степень

$\underbrace{a^n}_{\text{действие возведения в степень}} = c \leftarrow$  степень

$a$  — основание степени

$n$  — показатель степени

знака действия нет, а есть условная запись  $a^n$ , где  $n$  пишется надстрочно

Действие читается:  $n$ -ная степень числа  $a$  или  $a$  в степени  $n$

### Действия, обратные прямым действиям:

1. **Вычитание** (нахождение слагаемого по сумме и второму слагаемому):

$\underbrace{a-b}_{\text{действие вычитания}} = c \leftarrow$  разность

$a$  — уменьшаемое

$b$  — вычитаемое

«-» — знак вычитания

Действие читается: разность двух чисел  $a$  и  $b$

2. **Деление** (нахождение множителя по произведению и второму множителю):

$\underbrace{a:b}_{\text{действие деления}} = c \leftarrow$  частное

$a$  — делимое

$b$  — делитель

«:» или «—» — знаки деления

Действие читается: частное двух чисел  $a$  и  $b$



3. Извлечение корня (нахождение основания степени по данной степени и показателю):

$\sqrt[n]{a} = c \leftarrow$  корень  
действие  
извлечения  
корня

$\sqrt{a} = c; n = 2; c$  — корень

$a$  — подкоренное выражение

$n = 2$  — показатель корня

$\sqrt{\phantom{x}}$  — знак действия

Действие читается: извлечение корня второй степени из числа  $a$

4. Логарифмирование (нахождение показателя степени по данной степени и данному основанию):

$\log_a b = n \leftarrow$  логарифм  
действие  
логарифмирования

$b$  — логарифмируемое число

$a$  — основание логарифма

$\log$  — знак действия

Действие читается: логарифм данного числа  $b$  по данному основанию  $a$

Знаки действий:

$+$ ;  $-$ ;  $\cdot$ ;  $:$  или  $\frac{a}{b}$ ;  $\sqrt{\phantom{x}}$ ;  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$ ;  $\log$ ;  $\lg$

**Внимание!** Любое действие выполняется только над парой чисел!

## Законы сложения и умножения над действительными числами

### I. Переместительный

$$a + b = b + a; \quad a \cdot b = b \cdot a$$

### II. Сочетательный

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c); \quad a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

### III. Распределительный

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

I и II законы позволяют складывать числа и умножать их в любом порядке.

Действия с нулем

$$0 + 0 = 0$$

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$a + 0 = a$$

$$a \cdot 0 = a$$

$$a - 0 = a$$

$$0 : a = 0$$

$$0 - a = -a$$

$$a : 0 \text{ — нельзя!}$$

Действия с единицей

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$1 : a = \frac{1}{a}$$

$$a \cdot 1 = a$$

$$1 : 1 = 1$$

$$a : 1 = a$$

$$0 : 1 = 0$$



## § 2.

## Сравнение действительных чисел

### Алгоритм

61

### Сравнение чисел

1. Если числа заданы не в десятичных дробях, то запишите их в виде бесконечных десятичных дробей, разделив числитель на знаменатель.
2. Округлите числа до нужного разряда. Если одна дробь конечная, а другая бесконечная, то припишите нули справа у конечной дроби до нужного разряда и тогда сравнивайте ее с округленной бесконечной дробью.
3. Сравнивайте числа, начиная со старшего разряда. Из двух чисел то больше, у которого первый несовпадающий одноименный разряд больше.

### Примеры

1. Сравните числа 1,43 и 1,(43), округлив их до 0,001.

*Решение.*

$$1,43 = 1,430 \text{ и } 1,4343... \approx 1,434; 1,430 < 1,434$$

*Ответ:*  $1,43 < 1,(43)$ .

2. Сравните числа  $-1,(27)$  и  $-1,272$ .

*Решение.*

$$1). -1,(27) = -1,2727... \approx -1,273$$

$$2). -1,273 < -1,272$$

*Ответ:*  $-1,(27) < -1,272$ .

3. Расположите в порядке возрастания числа 1,371...; 2,065; 2,056; 1(37); -0,78.

*Решение.*

$$-0,78; 1,371; 1(37); 2,056; 2,065$$

$$1,371 < 1,374$$

$$2,065 > 2,056$$

$$-a < -b, a, b > 0;$$

$$\text{если } |-a| > |-b|$$

$$-a < a, (a > 0);$$

$$1,(37) = 1,3737... \approx 1,374$$

$$6 > 5$$



4. Найдите приближенное значение  $a - b$ , где  $a = 2\frac{1}{7}$  и  $b = 1,142$ , округлив  $a$  и  $b$  до тысячных.

Решение.

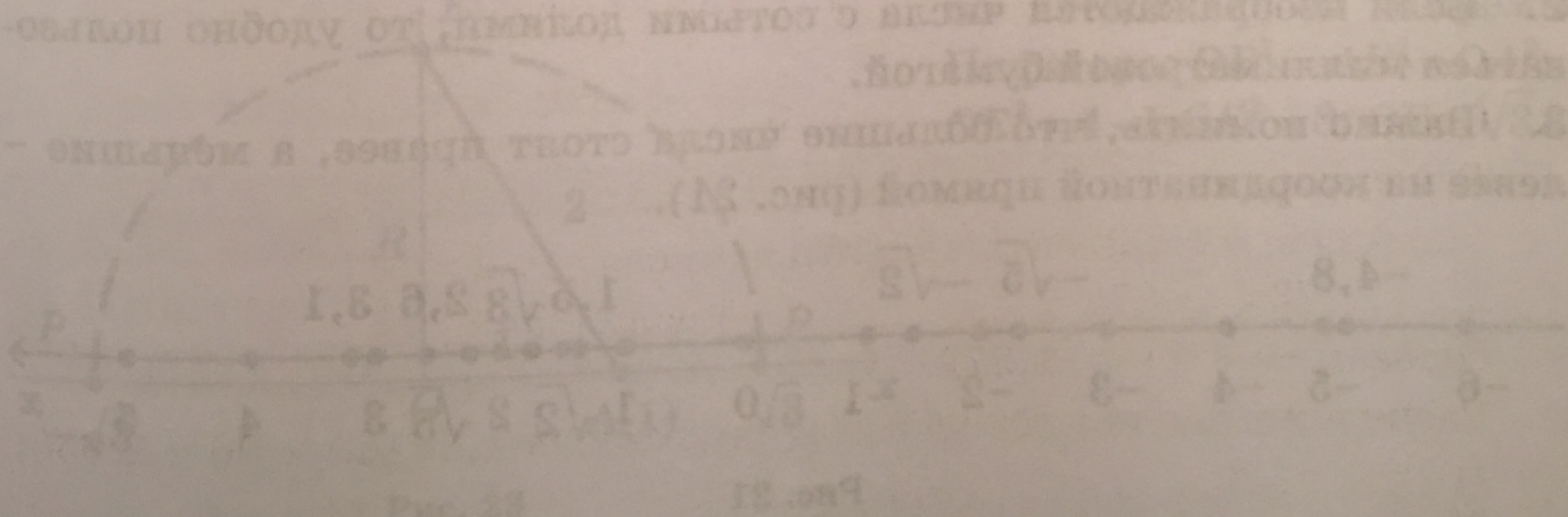
$$1). \quad 2\frac{1}{7} = 2,(\overline{142857}) = 2,142857... \approx 2,143 \quad \left| \quad 2\frac{1}{7} = 2,\overbrace{142857}1\overbrace{42857}...$$

$$2). \quad a - b = 2,143 - 1,142 = 1,001$$

Ответ:  $a - b \approx 1,001$ .

**З а м е ч а н и е.** При выполнении действий над десятичными бесконечными дробями на практике их заменяют приближенными значениями (конечными десятичными дробями) и, задавая более высокую точность приближения, получают более точное значение результата. Правила округления чисел см. в главе VII «Приближенные вычисления».

Все действия и правила сравнения действительных чисел такие же, как для рациональных чисел.





## § 3.

## Изображение действительных чисел на координатной прямой

Все действительные числа ( $R$ ) изображаются *точками* на координатной числовой оси, иррациональные числа округляются с нужной точностью, и определяется место положения точки, изображающей это число, если его нельзя построить точно.

## Алгоритм

62

## Изображение действительных чисел на координатной прямой

1. Изобразите координатную прямую с заданным единичным отрезком.
2. Отложите влево ( $-$ ) и вправо ( $+$ ) от нуля нужное количество единичных отрезков и их долей и поставьте на оси точку, соответствующую данному числу  $a$ .
3. Для изображения иррациональных чисел надо округлить число до  $0,1$  и нанести на ось точку, соответствующую целой и дробной части, слева от нуля, если число отрицательное, или справа от нуля, если число положительное. Для практического изображения точность изображения до  $0,1$  вполне достаточна, важно расположение числа относительно других чисел.

## Полезные советы

1. Полезно знать, что  $\sqrt{2} \approx 1,4$ ;  $\sqrt{3} \approx 1,7$ ;  $\sqrt{5} \approx 2,24 \approx 2,2$ .
2. Если изображаются числа с сотыми долями, то удобно пользоваться миллиметровой бумагой.
3. Важно помнить, что бóльшие числа стоят правее, а меньшие — левее на координатной прямой (рис. 21).

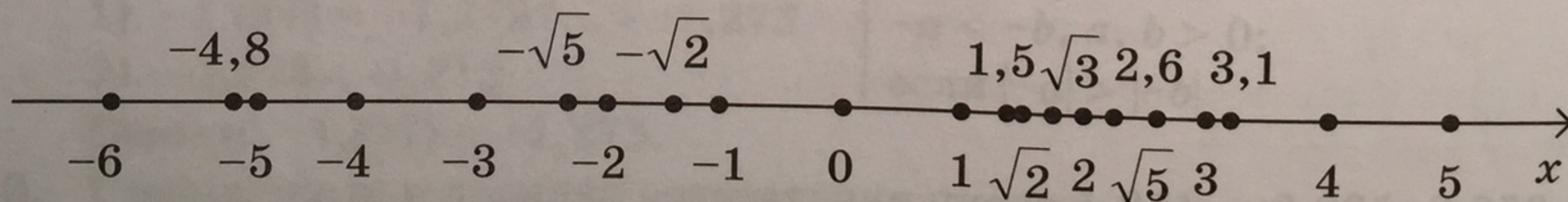


Рис. 21

Покажем, как точно найти точки на оси с координатой:  $\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{3}$ ;  $\sqrt{5}$ .

1. Постройте координатную прямую с отрезком  $AO = 1$ .
2. Из точки  $A$  проведите перпендикуляр к оси и отложите на нем  $AB = 1$  и  $AB_1 = 2$ .



3. Из точки  $O(0)$  проведите полуокружность с радиусами:  $R = OB$  и  $R_1 = OB_1$  до пересечения с осью  $Ox$  — получите точки на оси  $C(\sqrt{2})$  и  $C_1(-\sqrt{2})$ ,  $D(\sqrt{5})$  и  $D_1(-\sqrt{5})$  (рис. 22).

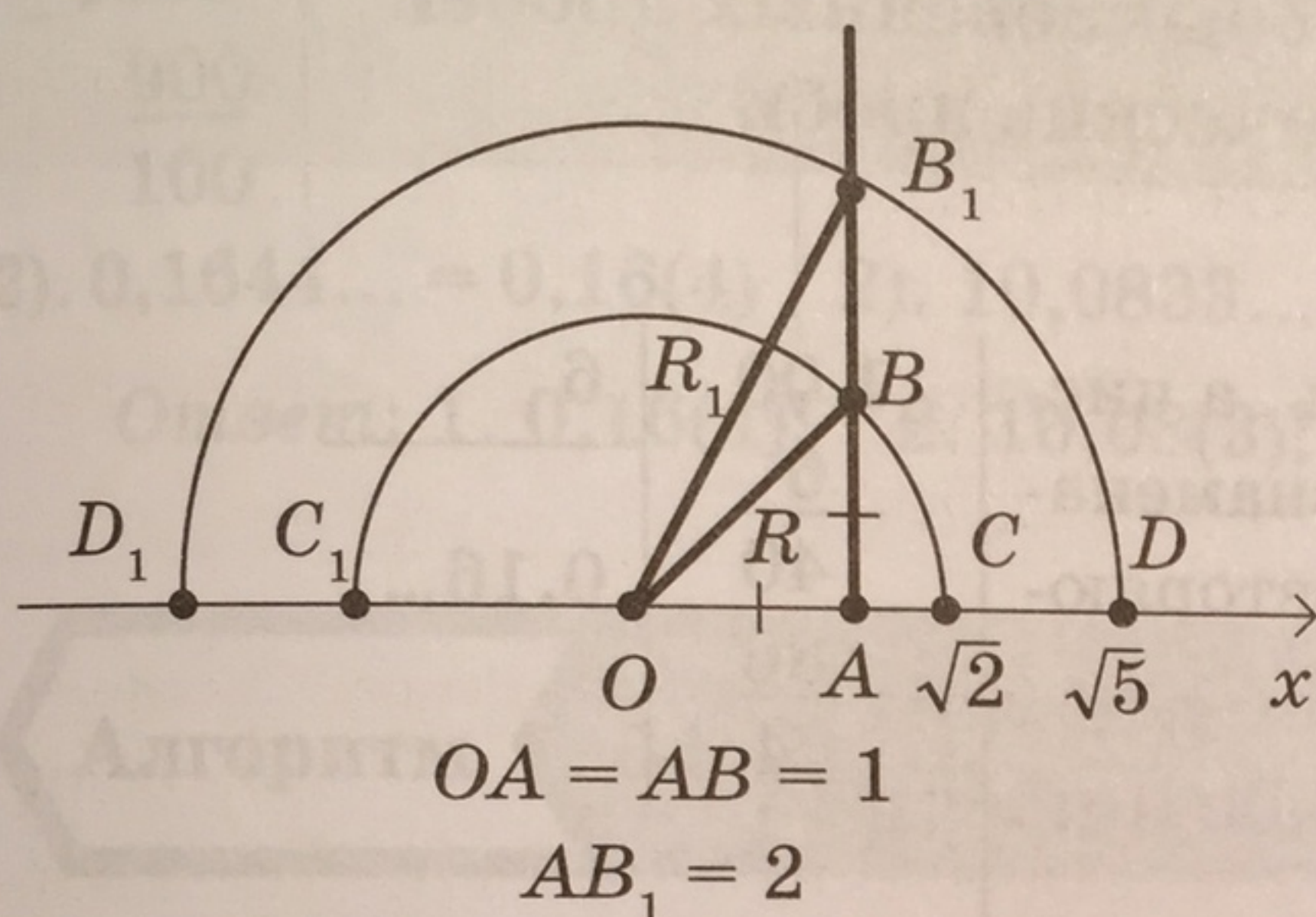


Рис. 22

$\triangle OAB$  — прямоугольный,  
по теореме Пифагора:  
 $OB^2 = OA^2 + AB^2$ ;  
 $OB^2 = 1 + 1$ ;  $OB^2 = 2$ ;  $OB = \sqrt{2}$ .

$\triangle OAB_1$  — прямоугольный,  
по теореме Пифагора:  
 $OB_1^2 = OA^2 + AB_1^2$ ;  
 $OB_1^2 = 1 + 2^2$ ;  $OB_1^2 = 5$ ;  $OB_1 = \sqrt{5}$ .

4. Для получения точек с координатами  $\pm\sqrt{3}$  надо: из точки  $A(1)$  провести дугу окружности  $R = 2$  до пересечения с перпендикуляром, проведенным через точку  $O$  к оси  $Ox$ ; радиусом  $OE = \sqrt{3}$  провести полуокружность с центром в точке  $O$  до пересечения с осью  $Ox$  в точках  $P(\sqrt{3})$  и  $P_1(-\sqrt{3})$  (рис. 23).

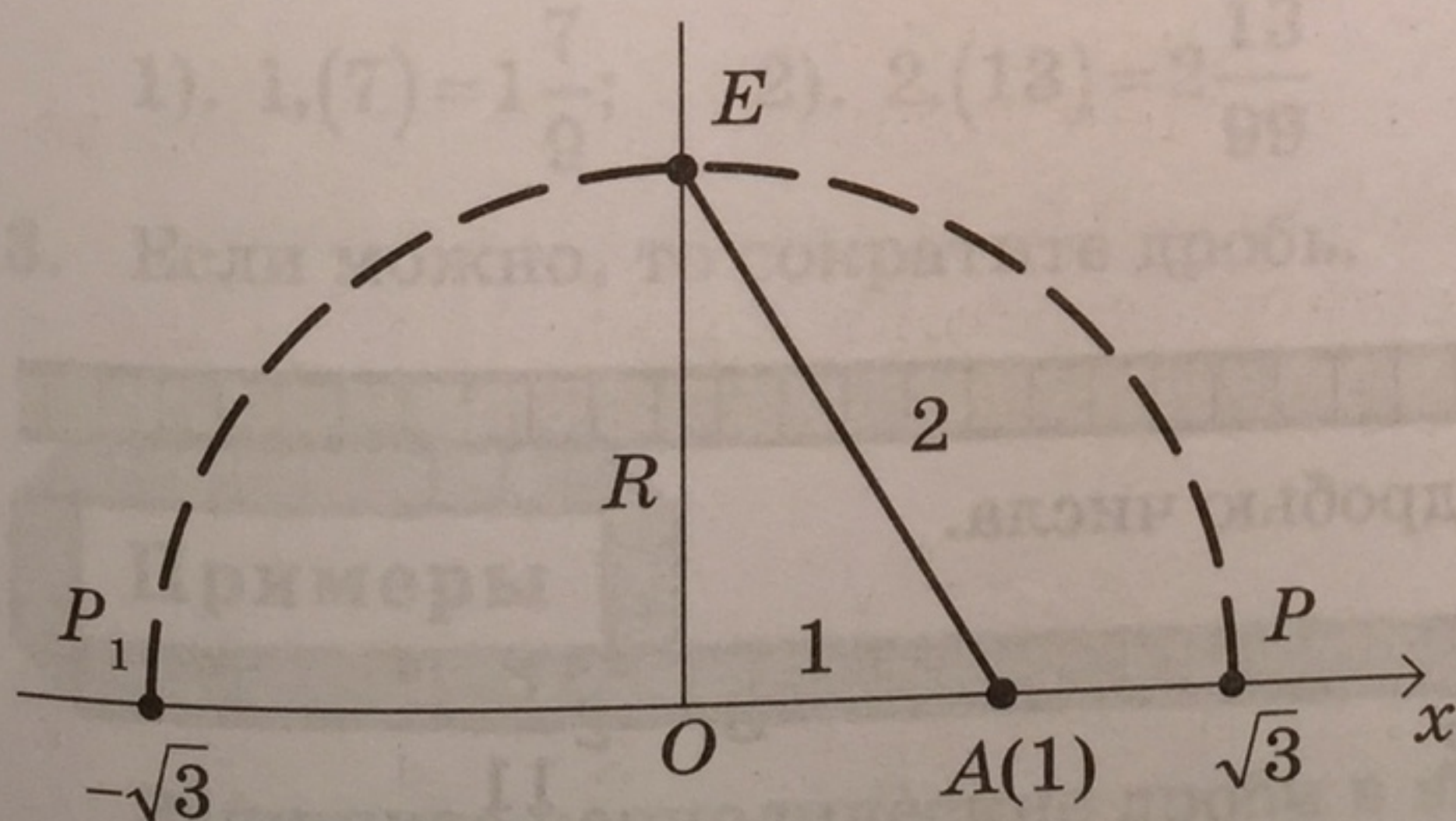


Рис. 23

$\triangle AOE$  — прямоугольный,  
по следствию из теоремы  
Пифагора:  $OE^2 = AE^2 - OA^2$ ;  
 $OE^2 = 4 - 1$ ;  $OE^2 = 3$ ;  $OE = \sqrt{3}$ .

**Вывод.** Каждому действительному числу на оси соответствует единственная точка и каждой точке на оси — только одно действительное число.



## § 4.

## Перевод обыкновенных дробей в периодические и наоборот — периодических дробей в обыкновенные

## Алгоритм

## 63

## Перевод обыкновенных дробей в периодические дроби

1. Оставьте целую часть как есть, а числитель дроби разделите на знаменатель этой дроби до первой повторяющейся цифры.

Например:  $1\frac{1}{6} = 1,166...$

$\begin{array}{r} -1,00 \\ 6 \\ \hline -40 \\ 36 \\ 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \\ \hline 0,16... \end{array}$
--	--

2. Запишите целую часть, а после запятой повторяющуюся группу цифр или одну цифру в скобках, после неповторяющихся цифр.

Например:  $1\frac{1}{6} = 1,1(6)$  — читаем: одна целая, одна десятая и шесть в периоде

3. Запишите ответ:  $a_0, a_1(a_2...a_n)$ .

## Примеры

Запишите периодической дробью числа.

1.  $\frac{37}{225}$

2.  $10\frac{1}{12}$

3.  $-2\frac{8}{11}$

Решение.

1).  $\frac{37}{225} = 0,1644...$

Решение.

1).  $10\frac{1}{12} = 10,0833...$

Решение.

1).  $-2\frac{8}{11} = -2,727$



$\begin{array}{r} 37,0 \\ - 225 \\ \hline 1450 \\ - 1350 \\ \hline 1000 \\ - 900 \\ \hline 100 \end{array}$	$\begin{array}{r} 225 \\ \hline 0,1644... \end{array}$	$\begin{array}{r} 1,00 \\ - 96 \\ \hline 40 \\ - 40 \\ \hline 0 \end{array}$
$\begin{array}{r} 12 \\ \hline 0,0833... \end{array}$	$\begin{array}{r} 8,0 \\ - 77 \\ \hline 30 \\ - 30 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 11 \\ \hline 0,7272... \end{array}$

2).  $0,1644... = 0,16(4)$     2).  $10,0833... = 10,08(3)$     2).  $-2,727... = -2,(72)$

Ответ: 1.  $0,16(4)$ ; 2.  $10,08(3)$ ; 3.  $-2,(72)$ .

### Алгоритм

64

### Перевод периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь

**I случай.** Период дроби следует сразу за запятой  $a_0, (a_1 a_2 \dots a_n)$ .

1. Определите количество цифр в периоде ( $n$ )  $a_0, (a_1 a_2 \dots a_n)$ .

Например:

- 1).  $1,(7)$  — одна цифра 7;  $n = 1$   
 2).  $2,(13)$  — две цифры 1 и 3;  $n = 2$

2. Запишите период дроби в числитель, а в знаменатель дроби запишите число, состоящее из  $n$  девяток, получите дробное число.

Например:

1).  $1,(7) = 1\frac{7}{9}$ ;    2).  $2,(13) = 2\frac{13}{99}$

3. Если можно, то сократите дробь.

### Примеры

Запишите периодические дроби в виде обыкновенных дробей.

1.  $12,(31) = 12\frac{31}{99}$

$12,(31)$  — две цифры в периоде;  
 $n = 2$

2.  $5,(135) = 5\frac{135^{(9)}}{999} = 5\frac{15^{(3)}}{111} = 5\frac{5}{37}$

$5,(135)$  — три цифры в периоде;  
 $n = 3$



$$3. 0,(18) = \frac{18^{(9)}}{99} = \frac{2}{11}$$

$0,(18)$  — две цифры в периоде;  $n = 2$

$$4. 100,(6) = 100\frac{6^{(3)}}{9} = 100\frac{2}{3}$$

$100,(6)$  — одна цифра в периоде;  $n = 1$

**II случай.** Период дроби отделен от запятой одной или несколькими цифрами  $a_0, a_1, a_2 (a_3 \dots a_n)$ .

1. Запишите целое число без запятой, содержащее все цифры слева до периода и один период.

Например:  $8,3(2)$  запишем 832

2. Запишите целое число, содержащее все цифры до периода.

Например:  $8,3(2)$  запишем 83

3. Найдите разность чисел п. 1 и п. 2.

Например:  $832 - 83 = 749$

4. Запишите дробь, числитель которой равен разности п. 3, а знаменатель дроби содержит столько девяток, сколько цифр в периоде, и столько нулей, сколько цифр после запятой до периода, и выделите целую часть.

Например: в числе  $8,3(2)$  одна цифра в периоде и одна после запятой до периода, значит, знаменатель равен 90.

$$\text{Получим дробь: } 8,3(2) = \frac{749}{90}$$

Научное обоснование этих действий получите в 11-м классе.

### Примеры

Запишите периодическую дробь в виде обыкновенной дроби.

1.  $4,1(25)$

Решение.

1). Запишем число без запятой 4125

2). Целое число до периода 41

3). Найдём разность  $4125 - 41 = 4084$



4). Составим дробь

$$\frac{4084}{990} = \frac{2042}{495} = 4\frac{62}{495}$$

Две цифры в периоде (99)

Одна цифра после запятой (один нуль)

2. 3,21(7)

Решение.

$$1). 3217; \quad 2). 321; \quad 3). 3217 - 321 = 2896$$

$$4). \frac{2896}{900} = \frac{724}{225} = 3\frac{49}{225}$$

Одна цифра в периоде (9)

Две цифры после запятой (два нуля)

3. 0,152(15)

Решение.

$$1). 15215; \quad 2). 152; \quad 3). 15215 - 152 = 15063$$

$$4). \frac{15063}{99000} = \frac{5021}{33000}$$

Две цифры в периоде (99)

Три цифры после запятой (три нуля)

## Проверь себя!

Запишите периодическую дробь в виде обыкновенной дроби.

$$1. 8,(32); \quad 2. 1,(8); \quad 3. 5,12(4)$$

$$\text{Ответ: } 1). 8\frac{32}{99}; \quad 2). 1\frac{8}{9}; \quad 3). 5\frac{28}{225}.$$



## § 5. Модуль числа

**Определение 1.** Модуль (абсолютная величина) числа  $a$  есть само число:  $|a| = a$ , если  $a > 0$ .

Например:  $|0,3| = 0,3$ ;  $|7| = 7$

**Определение 2.** Модуль отрицательного числа есть число ему противоположное (то есть положительное число):  $|a| = -a$ , если  $a < 0$ .

Например:  $|-3| = -(-3) = 3$ ;  $|-1| = -(-1) = 1$

**Определение 3.** Модуль нуля равен нулю:  $|0| = 0$ .

Эти определения можно записать символически так:

$$|a| = a, \text{ если } a \geq 0$$

$$|a| = -a, \text{ если } a < 0, \text{ или одной формулой: } |a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

$$1. |-13| = -(-13) = 13$$

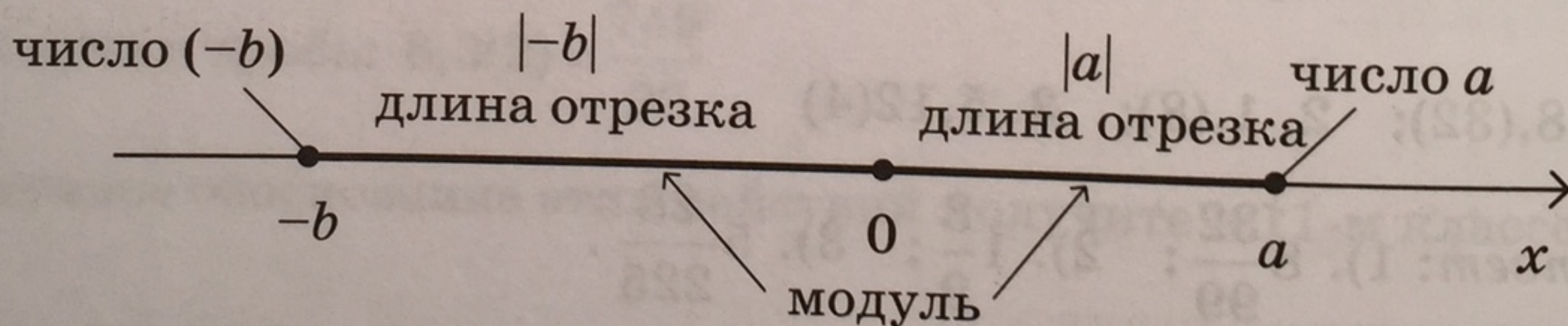
$$2. |1,2| = 1,2$$

$$3. |0| = 0$$

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$
$$|0| = 0$$

### Геометрический смысл модуля

**Определение.** Модуль числа  $a$  — это расстояние от точки 0 до точки, изображающей число  $a$  на числовой оси.



Модуль числа изображается на числовой оси отрезком, а число — точкой.

Модуль числа — это длина отрезка оси, а значит  $|a| \geq 0$ , следовательно, в ответе всегда неотрицательное число ( $a \geq 0$ ).

### Свойства модулей

$$1. |a| \geq 0$$

$$2. |a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|; a, b, c — \text{любые числа}$$



3.  $|a| = |-a|$ ;  $|a - b| = |b - a|$ ;  $a, b$  — любые числа

4.  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ ;  $a, b$  — любые числа

5.  $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ ,  $a$  — любое число и  $b \neq 0$

6.  $|a^n| = -a^n$ , если  $a \leq 0$ ,  $n$  — нечетное натуральное число

7.  $|a^n| = |a|^n$ , где  $a$  — любое число,  $n$  — натуральное число

### Примеры

Выполните действия, применив свойства модуля (1–5).

1. Докажите, что  $|-3 + 5 - 8| \leq |-3| + |5| + |-8|$ ;  $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$   
 $|-6| \leq 3 + 5 + 8$ ;  $6 \leq 16$  — верно

2.  $|-3 \cdot 5| = |-3| \cdot |5|$ ;  $|-15| = 3 \cdot 5$ ;  $15 = 3 \cdot 5$   $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

3.  $\left|\frac{-8}{15}\right| = \frac{|-8|}{|15|}$ ;  $\left|\frac{8}{15}\right| = \frac{8}{15}$ ;  $\left|\frac{-8}{15}\right| = \frac{8}{15}$   $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

4.  $|(-3)^3| = -(-3)^3 = 27$   $|a^n| = -a^n$ ,

5.  $|(-2)^4| = |-2|^4 = 2^4 = 16$

$n$  — нечетное,  $a < 0$

$|a^n| = |a|^n$ ,

$n$  — натуральное

### Проверь себя!

Выполните действия.

1.  $|(-2)^2| + |(-2)^3| - |-2 \cdot 2|$       2.  $|-1 \cdot 10 \cdot (-5)| : |-2|$

3. Сравните:  $|-13 + 15 - 8|$  и  $|-13| + |15| + |-8|$ .

Ответ: 1). 8; 2). 25; 3).  $6 < 36$ .



## §6. Комплексные числа

**Определение 1.** Выражения вида  $z = a + bi$ , где  $a$  и  $b$  — действительные числа,  $i$  — мнимая единица ( $i^2 = -1$ ), называются комплексными числами.

$a + bi$  — комплексное (составное) число

Число  $a$  — действительная часть комплексного числа  $a + bi$

Число  $bi$  — мнимая часть комплексного числа  $a + bi$

$$i = \sqrt{-1} \text{ или } i^2 = -1$$

Например, в числах:

1).  $-2 + i$ ;  $a = -2$ ;  $b = 1$

2).  $1 - i$ ;  $a = 1$ ;  $b = -1$

3).  $0 + 3i$ ;  $a = 0$ ;  $b = 3$

Любое действительное число есть частный случай комплексных чисел.

Например:  $5 + 0i = 5$ ;  $-2 + 0i = -2$ ;  $0 + 0i = 0$

### Примеры

1. Определите действительную и мнимую часть комплексных чисел.

1).  $z = 2 + 3i$ ;  $a = 2$ ;  $b = 3$

2).  $z = -1 + i$ ;  $a = -1$ ;  $b = 1$

3).  $z = -3 - i$ ;  $a = -3$ ;  $b = -1$

$$z = a + bi$$

2. Запишите число 10 как комплексное число.

Решение.  $10 = 10 + 0i$

$$z = a + bi, a = 10, b = 0$$

### Равенство комплексных чисел

**Определение 2.** Два комплексных числа  $a + bi$  и  $c + di$  называются равными, если  $a = c$  и  $b = d$ , то есть равны их действительные и мнимые части.

Например:  $\sqrt{9} + \sqrt{4}i = 3 + 2i$ , так как  $\sqrt{9} = 3$ ;  $\sqrt{4} = 2$



**Пример**

Найдите действительные числа  $x$  и  $y$ , если комплексные числа равны:  $(4x + 3y) + (2x - y)i = 3 - 11i$ .

*Решение.*

По определению равенства комплексных чисел составим систему:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 3 \\ 2x - y = -11 \end{cases} \cdot 3 + \begin{cases} 4x + 3y = 3 \\ 6x - 3y = -33 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} a + bi = c + di, \text{ если } a = c \text{ и } b = d \\ (4x + 3y) + (2x - y)i = \underbrace{3}_c - \underbrace{11}_d i \end{array} \right.$$

$$10x = -30$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ -y = -11 + 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases}$$

Ответ:  $x = -3$ ;  $y = 5$ .

**Проверь себя!**

Найдите действительные числа  $x$  и  $y$  из равенства  $(x + y) + (x - y)i = 8 + 2i$  комплексных чисел.

Ответ:  $x = 5$ ;  $y = 3$ .

**Арифметические действия над комплексными числами**

Свойства действий сложения и умножения для действительных чисел сохраняются над комплексными числами. Обозначим  $z_1 = a + bi$ ;  $z_2 = c + di$ ;  $z_3 = k + li$ , тогда свойства запишутся так:

**Переместительное свойство:**  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

**Сочетательное свойство:**  $z_1 + z_2 + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$$

**Распределительное свойство умножения:**

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$$

**Степень числа  $i$ :**

$$i^1 = i$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$

$$i^2 = -1 \text{ (по определению)}$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^7 = i^6 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1$$

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$$



Любая степень числа  $i$  имеет только одно из четырех значений:  $i$ ,  $-1$ ;  $-i$ ;  $1$ . Для того чтобы определить, какое получится число в ответе, надо разделить показатель степени  $n$  при  $i^n$  на 4, остаток от деления будет равен 0; 1; 2 или 3:  $i^{4m} = 1$ ;  $i^1 = i$ ;  $i^2 = -1$ ;  $i^3 = -i$ .

### Примеры

Вычислите.

$$i^{11} = i^{4 \cdot 2 + 3} = i^3 = -i$$

$$i^{21} = i^{4 \cdot 5 + 1} = i^1 = i$$

$$i^{32} = i^{4 \cdot 8} = 1$$

$$i^{10} = i^{4 \cdot 2 + 2} = i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^1 = i$$

$$i^4 = 1$$

$$i^2 = -1$$

$$11 : 4 = 2 + (3 \text{ ост.})$$

$$21 : 4 = 5 + (1 \text{ ост.})$$

$$32 : 4 = 8$$

$$10 : 4 = 2 + (2 \text{ ост.})$$

### Проверь себя!

Вычислите.

1.  $i^{19}$ ; 2.  $i^{35}$ ; 3.  $i^{100}$

Ответ: 1).  $-i$ ; 2).  $-i$ ; 3). 1.

### Алгоритм

65

### Сложение и вычитание комплексных чисел

1. Сложите (вычтите) действительные части комплексных чисел и запишите сумму действительной частью результата.
2. Сложите (вычтите) мнимые части комплексных чисел и запишите сумму мнимой частью результата.
3. В результате получится комплексное число.

### Примеры

Найдите сумму или разность комплексных чисел.

$$1. (1+3i) + (-3+i) = (1-3) + (3+1)i = -2+4i$$

$$2. (1+i) + (-1-i) = (1-1) + (1-1)i = 0+0i$$

$$3. (4+i) + (4-i) = (4+4) + (1-1)i = 8+0i$$

$$\begin{aligned} (a+bi) + (c+di) &= \\ &= (a+c) + (b+d)i \end{aligned}$$



$$\begin{array}{l|l}
 4. (14+i) - ((-5)+i) = (14 - (-5)) + (1-1)i = 19+0i & (a+bi) - (c+di) = \\
 5. (4+3i) - (4-3i) = (4-4) + (3-(-3))i = 0+6i & = (a-c) + (b-d)i
 \end{array}$$

**Определение 3.** Комплексные числа  $a+bi$  и  $-a-bi$  называются *противоположными*, если их сумма равна нулю:  $(a+bi) + (-a-bi) = 0+0i$ .

**Определение 4.** Комплексные числа  $a+bi$  и  $a-bi$  называются *сопряженными*, если их сумма равна действительному числу  $2a$ :  $(a+bi) + (a-bi) = 2a+0i$ .

### Проверь себя!

Найдите сумму или разность комплексных чисел.

$$1. (2+i) + (-2+i) \quad 2. (-3-2i) - (3-3i) \quad 3. (-0,5-i) + (-0,5-i)$$

Ответ: 1).  $0+2i$ ; 2).  $-6+i$ ; 3).  $-1-2i$ .

### Алгоритм

66

### Умножение комплексных чисел

1. Умножьте комплексные числа как многочлен на многочлен (см. алгоритм 11).
2. Упростите выражение, содержащее  $i^2$ .
3. Сгруппируйте действительные и мнимые части и запишите комплексное число  $a+bi$ .

### Примеры

Найдите произведение комплексных чисел: 1).  $(2-i)(3+i)$ ; 2).  $(9-2i)(1-3i)$ ; 3).  $(4-i)(4+i)$ ; 4).  $(5-i)(-5+i)$ .

Решение.

$$1). (2-i)(3+i) = 6 - 3i + 2i - i^2 = 6 - 3i + 2i - (-1) = \quad i^2 = -1$$

$$= (6+1) + (-3+2)i = 7-i$$

$$2). (9-2i)(1-3i) = 9 - 2i - 27i + 6i^2 =$$

$$= 9 - 29i + (-6) = (9-6) - 29i = 3 - 29i$$

$$3). (4-i)(4+i) = 4^2 - i^2 = 16+1=17 \quad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$



$$4). (5-i)(-5+i) = -25 + 5i + 5i - i^2 = -25 + 10i + 1 = -24 + 10i \quad \left| \quad -i^2 = -(-1) = 1 \right.$$

Произведение сопряженных чисел есть число действительное:

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \quad | \quad a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2$$

Например:  $(10-2i)(10+2i) = 10^2 + 2^2 = 104$

### Проверь себя!

Найдите произведение комплексных чисел.

1.  $(3-4i)(2+i)$       2.  $(5+i)(5-i)$

Ответ: 1).  $10-5i$ ; 2). 26.

### Алгоритм

67

### Деление комплексных чисел

1. Умножьте числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное знаменателю, получите в знаменателе действительное число.
2. Выполните умножение в числителе и знаменателе.
3. Запишите комплексное число в виде  $a+bi$ .

### Проверь себя!

Найдите частное двух комплексных чисел.

1.  $\frac{2+3i}{2-3i}$

Решение.

1).  $\frac{2+3i}{2-3i} = \frac{(2+3i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}$

2).  $\frac{(2+3i)^2}{4+9} = \frac{4+12i+9i^2}{13} = \frac{4+12i-9}{13}$

3).  $= \frac{-5+12i}{13} = -\frac{5}{13} + \frac{12}{13}i$

Ответ:  $-\frac{5}{13} + \frac{12}{13}i$ .

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$$

$$i^2 = -1$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$



$$2. \frac{1+3i}{3-2i}$$

**Решение.** Выполним все пункты алгоритма цепочкой:

$$\begin{aligned} \frac{1+3i}{3-2i} &= \frac{(1+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{3+9i+2i+6i^2}{9+4} = \\ &= \frac{(3-6)+11i}{13} = \frac{-3+11i}{13} = -\frac{3}{13} + \frac{11}{13}i \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} i^2 = -1 \end{array} \right.$$

**Ответ:**  $-\frac{3}{13} + \frac{11}{13}i$ .

**Проверь себя!**

Найдите частное двух комплексных чисел: 1.  $\frac{2+i}{2-i}$ ; 2.  $\frac{1-4i}{3-i}$ .

**Ответ:** 1).  $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ ; 2).  $0,7 - 1,1i$ .

### Решение примеров на все действия с комплексными числами

**Полезный совет.** При выполнении операций над комплексными числами соблюдайте порядок действий, ответ записывайте комплексным числом  $a + bi$ .

1. Выполните действия  $3i(1-i) + 2i(1+i)$ .

**Решение.**

$$3i(1-i) + 2i(1+i) = 3i - 3i^2 + 2i + 2i^2 = 3i + 3 + 2i - 2 = 1 + 5i \quad \left| \begin{array}{l} i^2 = -1 \end{array} \right.$$

**Ответ:**  $1 + 5i$ .

2. Вычислите:  $\frac{3-4i}{(1+i)(2-i)}$ .

**Решение.**

$$\begin{aligned} \frac{3-4i}{(1+i)(2-i)} &= \frac{3-4i}{2+2i-i-i^2} = \frac{3-4i}{3+i} = \frac{(3-4i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \\ &= \frac{9-12i-3i+4i^2}{9+1} = \frac{(9-4)+(-15i)}{10} = \frac{5-15i}{10} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \end{array} \right.$$



Ответ:  $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ .

3. Решите уравнение  $x(1-2i) = 2+5i$ .

Решение.

$$x(1-2i) = 2+5i;$$

$$x = \frac{2+5i}{1-2i}; \quad x = \frac{-8+9i}{5};$$

$$x = -\frac{8}{5} + \frac{9}{5}i$$

$$xa = b; \quad x = b : a;$$

$$\begin{aligned} \frac{2+5i}{1-2i} &= \frac{(2+5i)(1+2i)}{1+4} = \frac{2+5i+4i+10i^2}{5} = \\ &= \frac{-8+9i}{5} = -\frac{8}{5} + \frac{9}{5}i \end{aligned}$$

$$i^2 = -1$$

Ответ:  $-\frac{8}{5} + \frac{9}{5}i$ .

4. Вычислите: 1).  $(2-i)^3$ ; 2).  $i^{18}$ .

Решение.

$$\begin{aligned} 1). (2-i)^3 &= 2^3 - 3 \cdot 2^2 i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 - i^3 = \\ &= 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i \end{aligned}$$

$$2). i^{18} = i^{4 \cdot 4 + 2} = i^2 = -1$$

$$\begin{aligned} (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3; \\ i^3 &= -i; \quad i^2 = -1; \quad -i^3 = -1(-i) = i \\ i^{18} &= i^{4 \cdot 4 + 2} = i^2 = -1 \end{aligned}$$

Ответ: 1).  $2 - 11i$ ; 2).  $-1$ .

**Попробуй-ка реши!**

1. Разложите на комплексно сопряженные множители ( $a$  и  $b$  — действительные числа): 1).  $8a^2 + 16b^2$ ; 2).  $9a^2 + 25b^2$ .

Ответ: 1).  $(2\sqrt{2}a - 4bi)(2\sqrt{2}a + 4bi)$ ; 2).  $(3a - 5bi)(3a + 5bi)$ .

2. Вычислите: 1).  $i^{22}$ ; 2).  $-i^{103}$ ; 3).  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4$ ; 4).  $\frac{(2+i)(2-i)}{i}$ .

Ответ: 1).  $-1$ ; 2).  $i$ ; 3).  $1$ ; 4).  $-5i$ .



## § 7.

## Решение квадратных уравнений

Решение квадратного уравнения  $z^2 = a$ 

I случай:  $a = 0$ ;  $z^2 = 0$ ;  $z_{1,2} = 0$  — один корень

II случай:  $a > 0$ ;  $z^2 = a$ ;  $z_{1,2} = \pm\sqrt{a}$  — два действительных корня

III случай:  $-a < 0$  ( $a > 0$ );  $z^2 = -a$ ;  $z_{1,2} = \pm\sqrt{-a}$  — два комплексных корня ( $\pm\sqrt{-a} = \pm\sqrt{-1 \cdot |a|} = \pm\sqrt{-1} \cdot \sqrt{|a|} = \pm\sqrt{|a|}i$ )

## Алгоритм

## 68

Решение уравнений вида  $z^2 = -a$  ( $a > 0$ )

1. Приведите уравнение к виду  $z^2 = -a$ .
2. Запишите формулу за чертой  $z = \pm\sqrt{|a|}i$ .
3. Подставьте в формулу решения значения  $a$ .
4. Запишите ответ.

## Примеры

Решите уравнения.

1.  $z^2 + 4 = 0$

Решение.

1)  $z^2 = -4$ ; 3)  $z_{1,2} = \pm\sqrt{4}i$ ,  $z_{1,2} = \pm 2i$  | 2)  $z^2 = -a$ ;  $z = \pm\sqrt{|a|}i$

Ответ:  $\pm 2i$ .

2.  $4z^2 + 25 = 0$

Решение.

1).  $4z^2 = -25$ ;  $z^2 = -\frac{25}{4}$  | 2).  $z^2 = -a$ ;  $z = \pm\sqrt{|a|}i$

3).  $z_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{25}{4}}i$ ;  $z_{1,2} = \pm\frac{5}{2}i$

Ответ:  $\pm\frac{5}{2}i$ .



**Проверь себя!**

Решите уравнение  $25z^2 = -4$ .

Ответ:  $\pm \frac{2}{5}i$ .

**Алгоритм****69****Решение квадратных уравнений  
с комплексным неизвестным**

1. Приведите уравнение к виду  $az^2 + bz + c = 0$  или  $z^2 + pz + q = 0$ .
2. Запишите за чертой  $a =$ ,  $b =$ ,  $c =$  или  $p =$ ,  $q =$  и формулы дискриминанта  $D = b^2 - 4ac$ ;  $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$  или  $\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$  и формулы корней уравнения  $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|i}}{2a}$ ;  $z_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{|D|}{4}}i}{a}$  или  $z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{|D|i}$ .
3. Найдите корни уравнения, подставив в формулу корней числа  $a$ ,  $b$  и  $D$  или  $p$ ,  $q$  и  $D$ , и найдите корни  $z_{1,2} = -\frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{|D|}}{2a}i$  или  $z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{|D|i}$ .
4. Ответ запишите комплексными числами  $a + bi$ .

**Примеры**

Решите уравнения.

1.  $z^2 + 6z + 13 = 0$

Решение.

$$z_{1,2} = -3 \pm \sqrt{4}i$$

$$z_1 = -3 + 2i$$

$$z_2 = -3 - 2i$$

Ответ:

$$-3 + 2i; -3 - 2i.$$

$$z^2 + pz + q = 0; p = 6; q = 13;$$

$$D_1 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q; D_1 = 3^2 - 13 = -4; z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D_1}i;$$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4}i = 2i$$



2.  $9z^2 - 12z + 5 = 0$

Решение.

$$z_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{9i}}{9}$$

$$z_1 = \frac{6+3i}{9}; \quad z_1 = \frac{6}{9} + \frac{3i}{9}; \quad z_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i$$

$$z_2 = \frac{6-3i}{9}; \quad z_2 = \frac{6}{9} - \frac{3i}{9}; \quad z_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}i$$

Ответ:  $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}i; \frac{2}{3} - \frac{1}{3}i$ .

$$az^2 + bz + c = 0; \quad a = 9; \quad b = -12; \quad c = 5$$

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac; \quad \frac{D}{4} = 6^2 - 45 = -9;$$

$$z_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{\frac{D}{4}}i}{a}; \quad \sqrt{-9} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3i$$

**Внимание!** Для решения квадратных уравнений с комплексным неизвестным справедливы прямая и обратная теоремы Виета.

### I. Прямая теорема Виета

Если дано уравнение  $az^2 + bz + c = 0$  или  $z^2 + pz + q = 0$ ,

то  $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}; \quad z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}$  или  $z_1 + z_2 = -p; \quad z_1 \cdot z_2 = q$ ,

причем  $z_1$  и  $z_2$  — сопряженные числа:  $a + bi$  и  $a - bi$ .

### II. Обратная теорема Виета

Если даны числа  $p, q, z_1$  и  $z_2$  такие, что  $z_1 + z_2 = -p; \quad z_1 \cdot z_2 = q$ , то  $z_1$  и  $z_2$  — корни уравнения  $z^2 + pz + q = 0$ .

Алгоритм

70

Составление квадратного уравнения по его комплексным корням

1. Запишите общий вид уравнения  $z^2 + pz + q = 0$ .

2. Найдите  $z_1 + z_2 = -p, \quad p = -(z_1 + z_2)$  и  $z_1 \cdot z_2 = q$ .

3. Подставьте  $p$  и  $q$  в общий вид уравнения.

**З а м е ч а н и е.** Сумма сопряженных комплексных чисел есть действительное число  $z_1 + z_2 = 2a$ , а произведение  $z_1 \cdot z_2 = a^2 + b^2$ .

Примеры

1. Составьте приведенное квадратное уравнение, имеющее корни:

$$z_1 = -4 + i; \quad z_2 = -4 - i.$$



Решение.

1).  $z^2 + pz + q = 0$

2).  $z_1 + z_2 = -4 + i + (-4) - i = -8; p = 8$

$z_1 \cdot z_2 = (-4 + i)(-4 - i) = 16 + 1 = 17; q = 17$

3).  $z^2 + 8z + 17 = 0$

Ответ:  $z^2 + 8z + 17 = 0$ .

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -p; \\ z_1 \cdot z_2 = a^2 + b^2; \\ -i^2 = -(-1) = 1 \end{cases}$$

2. Составьте приведенное квадратное уравнение, имеющее корень, сопряженный данному корню, и проверьте ответ, решив полученное уравнение, если  $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$ .

Решение.

1).  $z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{3}$

2).  $z^2 + pz + q = 0$

3).  $-p = z_1 + z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{3} + \sqrt{2} - i\sqrt{3} = 2\sqrt{2}$

$q = z_1 \cdot z_2 = (\sqrt{2} + i\sqrt{3})(\sqrt{2} - i\sqrt{3}) = 2 + 3 = 5$

$z^2 - 2\sqrt{2}z + 5 = 0$

- 4). Решим полученное уравнение:

$z_{1,2} = \sqrt{2} \pm \sqrt{3}i; z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$

$z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{3}i$  — верно

Ответ:  $z^2 - 2\sqrt{2}z + 5 = 0$ .

 $z_1$  и  $z_2$  сопряженные числа:

$a + bi$  и  $a - bi$ ;

$(a + bi) + (a - bi) = 2a$ ;

$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ ;

$z_1 + z_2 = -p; p = -2\sqrt{2}; z_1 \cdot z_2 = q$ ;

$p = -2\sqrt{2}; \frac{p}{2} = -\sqrt{2}; q = 5$ ;

$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{4}\right)}i$ ;

$\frac{D}{4} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \sqrt{2 - 5} = \sqrt{3}i$

## Алгоритм

71

## Разложение на множители трехчлена

$z^2 + pz + q = 0$  или  $az^2 + bz + c = 0$

1. Найдите корни трехчлена, решив уравнение  $z^2 + pz + q = 0$  или  $az^2 + bz + c = 0$ .
2. Подставьте корни уравнения в формулу  $z^2 + pz + q = (z - z_1)(z - z_2)$  или  $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ .

## Примеры

Разложите на множители квадратный трехчлен.

1.  $4z^2 + 8z + 5 = 0$



Решение.

1).  $4z^2 + 8z + 5 = 0$

$$z_{1,2} = -1 \pm \frac{1}{2}i$$

$$z_1 = -1 + \frac{1}{2}i; \quad z_2 = -1 - \frac{1}{2}i$$

2).  $4z^2 + 8z + 5 = 4\left(z + 1 - \frac{1}{2}i\right)\left(z + 1 + \frac{1}{2}i\right)$

Ответ:  $4\left(z + 1 - \frac{1}{2}i\right)\left(z + 1 + \frac{1}{2}i\right)$ .

$$a = 4; \quad b = 8; \quad c = 5$$

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac; \quad \frac{D}{4} = 16 - 20 = -4$$

$$z_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}i}{a}$$

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm 2i}{4} \quad z_{1,2} = -1 \pm \frac{1}{2}i$$

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

2.  $z^2 + 2z + 10 = 0$

Решение.

1).  $z^2 + 2z + 10 = 0$

$$z_{1,2} = -1 \pm 3i$$

$$z_1 = -1 + 3i; \quad z_2 = -1 - 3i$$

2).  $z^2 + 2z + 10 =$

$$= (z + 1 - 3i)(z + 1 + 3i)$$

Ответ:  $(z + 1 - 3i)(z + 1 + 3i)$ .

$$p = 2, \quad q = 10$$

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - q; \quad \frac{D}{4} = 1 - 10 = -9$$

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}i; \quad z_{1,2} = -1 \pm 3i$$

$$z^2 + pz + q = (z - z_1)(z - z_2)$$

## Проверь себя!

1. Составьте приведенное квадратное уравнение, имеющее корни:

$$z_1 = 1 + i; \quad z_2 = 1 - i.$$

2. Разложите на множители трехчлен
- $z^2 + 2z + 5 = 0$
- .

Ответ: 1).  $z^2 - 2z + 2 = 0$ ; 2).  $(z + 1 - 2i)(z + 1 + 2i)$ .

**Попробуй-ка реши!**Решите уравнение  $z^4 + 2z - 15 = 0$ .

Ответ:  $-\sqrt{3}; \sqrt{3}; -\sqrt{5}i; \sqrt{5}i$ .

**Вывод.** Любое квадратное уравнение  $az^2 + bz + c = 0$ , где  $a, b, c$  — действительные числа,  $a \neq 0$ , всегда имеет корни, так как  $\sqrt{D}$  определен для любого числа ( $D = 0$ ;  $D > 0$ ;  $D < 0$ ). Уравнение третьей степени имеет наибольшее количество корней — три, а уравнение четвертой степени — четыре.



## Глава VII. Приближенные вычисления

### § 1. Абсолютная погрешность

В практической деятельности человек встречается с точными и приближенными значениями различных величин.

Например, количество учеников в классе по списку, количество дней в неделе, количество часов в сутках и т. д. — это точные величины, а количество деревьев в лесу, количество людей в городе, длина дороги, масса взвешенного товара, температура и т. д., а также округленные числа — это приближенные значения величин.

Пусть  $x$  — истинная величина, число  $a$  — приближенное значение  $x$ . Это записывают так:  $x \approx a$  (читается так:  $x$  приблизительно равно  $a$ ).

Чтобы найти, на сколько ошиблись при нахождении приближенного значения  $a$ , надо составить разность  $x - a$ . При этом может получиться ошибка с плюсом и с минусом, поэтому находят модуль этой разности:  $|x - a|$  — эту величину называют *абсолютной погрешностью* (или *ошибкой*).

**Определение.** Абсолютной погрешностью приближения ( $a$ ) называется модуль разности между точным значением величины  $x$  и ее приближенным значением  $a$ .

$|x - a| = h$  — погрешность или ошибка

$$\begin{cases} x - a = h \\ x - a = -h \end{cases} \quad \begin{cases} x = a + h \\ x = a - h \end{cases} \quad x = a \pm h \quad \left| |m| = \begin{cases} m, & \text{если } m \geq 0 \\ -m, & \text{если } m < 0 \end{cases} \right.$$



Например, найти погрешность приближения:

1) числа 0,1981 числом 0,198

2)  $-\frac{8}{17}$  числом  $-\frac{1}{2}$

Решение.

Найдем  $|x - a| = h$

1).  $x = 0,1981$ ;  $a = 0,198$

$$h = |0,1981 - 0,198| = |0,0001| = 0,0001$$

2).  $x = -\frac{8}{17}$ ;  $a = -\frac{1}{2}$

$$h = \left| -\frac{8}{17} - \left( -\frac{1}{2} \right) \right| = \left| -\frac{8}{17} + \frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{16}{34} + \frac{17}{34} \right| = \left| \frac{1}{34} \right| = \frac{1}{34}$$

$$h = |x - a|$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd};$$

$$|a| = a,$$

если  $a \geq 0$

Ответ: 1).  $h = 0,0001$ ; 2).  $h = \frac{1}{34}$ .

### Алгоритм

72

### Нахождение приближенного значения $x$ с недостатком и с избытком

1. Найдите абсолютную погрешность приближения по формуле  $h = |x - a|$ .
2. Найдите разность  $a - h$ , получите значение  $x$  с недостатком.
3. Найдите сумму  $a + h$ , получите значение  $x$  с избытком.
4.  $x = a \pm h$

### Примеры

1. Известно, что  $x \approx 1,125$ , его приближенное значение  $a = 1,13$ . Найдите приближенные значения числа  $x$  с недостатком и с избытком.

Решение.

1). Найдите  $h$ :

$$h = |1,125 - 1,13| = |-0,005| = 0,005$$

$$|a| = -a, \text{ если } a < 0$$

$$h = |x - a|$$



$$2). a - h = 1,13 - 0,005 = 1,125 \text{ (} x \text{ с недостатком)}$$

$$3). a + h = 1,13 + 0,005 = 1,135 \text{ (} x \text{ с избытком)}$$

$$4). x = 1,13 \pm 0,005$$

Ответ:  $x \approx 1,125$  с недостатком;  $x \approx 1,135$  с избытком.

2. Пусть 7,43 приближенное значение числа  $x$ , а абсолютная погрешность приближения меньше 0,01. В каком промежутке заключено точное значение числа  $x$ ?

Решение.

$$a = 7,43; h < 0,01$$

$$1). \text{ Значение } x \text{ с недостатком: } a - h = 7,43 - 0,01 = 7,42$$

$$2). \text{ Значение } x \text{ с избытком: } a + h = 7,43 + 0,01 = 7,44$$

$$3). 7,42 \leq x \leq 7,44$$

Ответ:  $7,42 \leq x \leq 7,44$ .

### Оценка погрешности

Если значение  $x$  неизвестно, то можно найти границы, в которых оно заключено, — это значения приближений  $x$  с недостатком ( $a - h$ ) и с избытком ( $a + h$ ) — и записать так:  $a - h \leq x \leq a + h$ .

В этом случае говорят, что число  $x$  равно числу  $a$  с точностью до  $h$ , и пишут:  $x = a \pm h$ .

Например, запись  $x = 19,175 \pm 0,001$  означает, что  $x$  найден с точностью до одной тысячной или число  $x$  заключено в границах:

$$19,175 - 0,001 \leq x \leq 19,175 + 0,001$$

$$19,174 \leq x \leq 19,176$$

Чем меньше погрешность  $h$ , тем точнее значение  $x$ .

При измерении приборами погрешность может быть разной, но не больше единицы последнего разряда измерения, такая погрешность указана на приборах, тогда в числе  $a$  все цифры будут считаться верными.

**Определение.** Верной цифрой приближенного значения  $a$  называют цифру любого разряда, если абсолютная погрешность не превосходит единицы этого разряда.

Например:  $45,32 \pm 0,01$ , то все цифры числа 45,32 верные; если  $45,32 \pm 0,1$ , то верные цифры 4, 5, 3.



## Алгоритм

73

## Нахождение приближенного значения числа и его абсолютной погрешности

1. Если известны приближенные значения  $x$  с недостатком и с избытком, то, чтобы найти  $h$ , вычтите из верхней границы (ВГ) нижнюю границу (НГ) и результат разделите на 2:

$$\underbrace{a-h}_{\text{нижняя граница}} \leq x \leq \underbrace{h+a}_{\text{верхняя граница}} \quad h = \frac{a+h-(a-h)}{2}$$

2. Чтобы найти  $a$ , надо от верхней границы отнять  $h$  (или к нижней границе прибавить  $h$ ).
3. Запишите число  $x = a \pm h$ .

## Примеры

1. Укажите приближенное значение  $a$  числа  $x$ :  $3,7 \leq x \leq 4,1$  и абсолютную погрешность — число  $h$ .

Решение.

$$1). \text{ Найдите } h: h = \frac{4,1-3,7}{2} = \frac{0,4}{2} = 0,2$$

$$h = \frac{a+h-(a-h)}{2}$$

$$2). \text{ Найдите } a = 4,1 - 0,2 = 3,9$$

$$a = (a+h) - h$$

$$3). x = 3,9 \pm 0,2$$

$$\text{или } a = (a-h) + h$$

Ответ:  $a = 3,9$ ;  $h = 0,2$ .

2. Что означает запись  $x = 0,73 \pm 0,01$ ?

Решение. Эта запись означает, что число  $x$  заключено между числами  $a - h$  и  $a + h$  и что цифра 3 верная.

$$0,73 - 0,01 \leq x \leq 0,73 + 0,01 \text{ или } 0,72 \leq x \leq 0,74$$

3. Пусть  $x = 5,8 \pm 0,2$ . Может ли точное значение  $x$  оказаться равным: 1). 5,9; 2). 6,001; 3). 6; 4). 5,81?

Решение.

1). Найдем границы числа  $x$ :

$$\text{с недостатком: } 5,8 - 0,2 = 5,6$$

$$\text{с избытком: } 5,8 + 0,2 = 6$$

2). Запишем  $x$ :  $5,6 \leq x \leq 6$



В этот промежуток попадут числа 5,9; 6; 5,81

Ответ:  $x$  может быть равным 5,9; 6; 5,81.

### Вывод

1. Если дано значение величины  $x$  и его приближенное значение  $a$ , то можно найти абсолютную погрешность:  $h = |x - a|$ .

2. Число  $x = a \pm h$ .

3. НГ:  $a - h$  — нижняя граница числа  $x$

ВГ:  $a + h$  — верхняя граница числа  $x$

$$a - h \leq x \leq a + h$$

4. Если  $x$  не дано, но даны его ВГ и НГ, то  $h = \frac{a + h - (a - h)}{2}$ ;  
 $a = \text{НГ} + h$  или  $a = \text{ВГ} - h$ .



## § 2. Округление чисел

Для практической деятельности человека часто не нужна очень большая точность чисел или значений величин при измерениях, поэтому числа округляют до нужного разряда, причем округлять величины можно с недостатком или с избытком в зависимости от того, где ошибка округления будет меньше.

### Правила округления

1. Если первая отбрасываемая цифра меньше 5, то нужно округлять числа с недостатком, то есть оставить без изменения последнюю цифру нужного разряда, а остальные цифры отбросить (или заменить нулями, если числа целые).

*Например:* округлить число 27,341 до 0,1.

*Решение.*

$27,\underline{3}41 \approx 27,3$  — округление с недостатком

2. Если первая отбрасываемая цифра больше или равна 5, то нужно округлять числа с избытком, то есть отбросить все цифры после нужного разряда (или заменить нулями, если числа целые), а цифру последнего разряда увеличить на одну единицу.

*Например:* число 154,567 округлить до 0,01.

*Решение.*

$154,\underline{5}67 \approx 154,57$  — округление с избытком

### Алгоритм

74

### Округление чисел

1. Подчеркните разряд, до которого надо округлять число.
2. Оцените первую цифру после округляемого разряда, сравнив ее с 5:
  - 1). Если эта цифра меньше 5, то округлите число с недостатком.
  - 2). Если число больше или равно 5, то округлите число с избытком.



### Примеры

1. Округлите число 1546,472 до 0,1; до 1; до 10.

*Решение.*

- 1). Округлим число 1546,472 до 0,1:

$$1546,\underline{4}72 \approx 1546,5$$

- 2). Округлим число до 1:

$$1546,\underline{4}72 \approx 1546$$

- 3). Округлим число до 10:

$$1546,\underline{4}72 \approx 1550$$

7 > 5 округляем

с избытком

4 < 5 округляем

с недостатком

6 > 5 округляем

с избытком

**З а м е ч а н и е.** Применение алгоритма не прописываем, а подчеркиваем цифру, до которой округляем и которую отбрасываем, и устно применяем алгоритм.

2. *Задача.* Олень движется со скоростью 13,8 м/с. Выразите эту скорость в километрах в час и округлите с точностью до 1 км/ч.

*Решение.*

- 1). Переведем 13,8 м/с в км/ч:

$$13,8 \text{ м/с} = \frac{13,8 \cdot 3600}{1000} = 49,68 \text{ км/ч}$$

$$1 \text{ км} = 1000 \text{ м}$$

$$1 \text{ ч} = 3600 \text{ с}$$

- 2). Округлим скорость 49,68 км/ч до 1 км/ч:

$$49,\underline{6}8 \approx 50 \text{ км/ч}$$

*Ответ:* скорость оленя  $\approx 50$  км/ч.

3. Представьте в виде десятичной дроби с точностью до 0,001 число  $2\frac{3}{11}$ .

*Решение.*

- 1). Разделите 3 на 11 до 0,0001 долей (с одной лишней цифрой):

$$2\frac{3}{11} = 2,2727...$$

- 2).  $2,2727 \approx 2,273$  (с избытком) | 7 > 5

*Ответ:*  $\approx 2,273$ .

### Проверь себя!

Округлите число 725,643 до 0,1; до 10.

*Ответ:*  $\approx 725,6$ ;  $\approx 730$ .



## Алгоритм

75

## Нахождение абсолютной погрешности чисел, записанных в стандартном виде

1. Запишите число в стандартном виде:  $x \approx a \cdot 10^n$ ,  $1 \leq a < 10$ ;  $n \in \mathbb{Z}$ . Все цифры числа  $a$  верные.
2. Если все цифры числа  $a$  верные, то прибавьте к последнему разряду числа  $a$  одну единицу  $a_0, \underbrace{a_1 a_2 \dots a_n}_m \pm 0, \underbrace{00 \dots 1}_m$  и раскройте скобки:

$$\left( a_0, \underbrace{a_1 a_2 \dots a_n}_m \pm 0, \underbrace{00 \dots 1}_m \right) \cdot 10^n = \underbrace{a_0, a_1 a_2 \dots a_n}_a \cdot 10^n \pm \underbrace{0, 00 \dots 1}_h \cdot 10^n$$

Например:

$$\begin{aligned} x \approx 2,15 \cdot 10^4 &= (2,15 \pm 0,01) \cdot 10^4 = \left. \begin{aligned} &(a+b) \cdot c = ac + bc \\ &= 2,15 \cdot 10^4 \pm 0,01 \cdot 10^4 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

3. Упростите  $h = 0, \underbrace{00 \dots 1}_m \cdot 10^n = 10^{-m} \cdot 10^n = 10^{-m+n} \quad | \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$$\text{Например: } 2,15 \cdot 10^4 \pm 10^{-2} \cdot 10^4 = 2,15 \cdot 10^4 \pm 10^2; \quad h = 10^2$$

## Примеры

Оцените абсолютную погрешность приближенного значения  $x \approx a \cdot 10^n$ , если все цифры множителя  $a$  верные.

1.  $x \approx 2,164 \cdot 10^6$

Решение.

$$1). 2,164 \cdot 10^6 = (2,164 \pm 0,001) \cdot 10^6 = 2,164 \cdot 10^6 \pm 0,001 \cdot 10^6$$

$$2). h = 0,001 \cdot 10^6 = 10^{-3} \cdot 10^6 = 10^3$$

Ответ:  $h = 10^3$ .

2.  $x \approx 55,23 \cdot 10^{-3}$

Решение.

$$1). 55,23 \cdot 10^{-3} = 5,523 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 5,523 \cdot 10^{-2}$$

$$2). 5,523 \cdot 10^{-2} = (5,523 \pm 0,001) \cdot 10^{-2} = 5,523 \cdot 10^{-2} \pm 0,001 \cdot 10^{-2}$$

$$3). h = 0,001 \cdot 10^{-2} = 10^{-3} \cdot 10^{-2} = 10^{-5}$$

Ответ:  $h = 10^{-5}$ .



**Проверь себя!**

1. Найдите абсолютную погрешность приближенного значения  $x \approx a \cdot 10^n$ , если все цифры множителя  $a$  верные:  $x \approx 57,18 \cdot 10^5$ .

2. Округлите число 0,00156 до 0,001 и запишите ответ в стандартном виде.

3. Вычислите с точностью до 0,01:  $\frac{13,33}{3,015} - 2,1 \cdot 0,45$  и найдите  $h$  и  $a$ .

Ответ: 1).  $h = 10^3$ ; 2).  $x \approx 2 \cdot 10^{-3}$ ; 3).  $3,476 \approx 3,48$ ;  $|h| = 0,004$ ;  $a = 3,48$ .

**Попробуй-ка реши!**

1. Вычислите с точностью до 0,01 м<sup>2</sup> площадь концентрического кольца, у которого радиус внешней окружности 72,8 см, а внутренний радиус 19,2 см ( $S_{\text{кольца}} = \pi(R^2 - r^2)$ ).

2. В цилиндрический сосуд высотой 17,2 см и радиусом основания 5,4 см налита жидкость на высоту 14,8 см. Можно ли в этот сосуд долить еще 0,25 л жидкости? ( $V_{\text{цилиндра}} = \pi r^2 \cdot H$ , где  $r$  — радиус основания,  $H$  — высота цилиндра, 1 л = 1 дм<sup>3</sup>).

Ответ: 1).  $\approx 1,55$  м<sup>2</sup>

2). Нельзя влить 0,25 л, так как оставшийся объем  $\approx 0,22$  л



### § 3.

### Относительная погрешность

Для сравнения качества приближения различных величин применяют относительную погрешность приближения.

**Определение.** *Относительной погрешностью называется отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного числа.*

Если относительная погрешность выражена в процентах, то отношение умножают на 100%:

$$\delta = \frac{|x - a|}{|a|} = \frac{h}{|a|}; \quad \delta = \frac{h \cdot 100\%}{|a|}$$

### Алгоритм

76

### Нахождение относительной погрешности

**I случай.** Числа записаны не в стандартном виде

1. Запишите за чертой формулу относительной погрешности:

$$\delta = \frac{|x - a|}{|a|} = \frac{h}{|a|}$$

2. Найдите  $h$  по одной из формул:

а)  $x$  и  $a$  заданы:  $h = |x - a|$

б)  $НГ \leq x \leq ВГ$ :  $h = \frac{ВГ - НГ}{2}$

3. Найдите  $a = НГ + h$  или  $a = НГ - h$ , если  $a$  задано, то перейдите к п. 4.
4. Подставьте значения  $h$  и  $|a|$  в формулу п. 1 и найдите  $\delta$  — относительную погрешность.

### Примеры

1. Округлите число  $x = 10,59$  до единиц. Найдите абсолютную и относительную погрешность округления.



Решение.

1). Округлите число  $x$ :  $10,59 \approx 11$ ;  $a = 11$ 2). Найдите  $h = |10,59 - 11| = |-0,41| = 0,41$ 3). Найдите  $\delta\% = \frac{0,41 \cdot 100\%}{11} = \frac{41}{11} \approx 3,7\% \approx 4\%$ 

$$h = |x - a|$$

$$\delta = \frac{h \cdot 100\%}{|a|}$$

Ответ:  $h = 0,41$ ;  $\delta\% \approx 4\%$ .2. Найдите относительную погрешность приближения числа  $\frac{7}{9}$  числом 0,777.

Дано:

$$x = \frac{7}{9}$$

$$a = 0,777$$

Найти:  $\delta$ 

Решение:

1). Представим  $\frac{7}{9}$  бесконечной дробью:

$$\frac{7}{9} = 0,7777... \approx 0,778$$

2).  $h = |0,778 - 0,777| = 0,001$ 3).  $\delta = \frac{0,001 \cdot 100\%}{0,777} \approx \frac{100\%}{777} \approx 0,1\%$ 

$$\delta = \frac{h \cdot 100\%}{|a|}$$

$$h = |x - a|$$

$$h = |0,778 - 0,777| = 0,001$$

$$\frac{0,001}{0,777} = \frac{1}{777}$$

Ответ:  $\delta \approx 0,1\%$ .

II случай. Числа записаны в стандартном виде

1. Запишите за чертой формулу относительной погрешности:

$$\delta = \frac{|x - a|}{|a|} = \frac{h}{|a|}$$

2. Найдите абсолютную погрешность:

$$x = \left( a_0, \underbrace{a_1 a_2 \dots a_n}_m \pm 0, \underbrace{00 \dots 1}_m \right) \cdot 10^n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \cdot 10^n \pm 10^m \cdot 10^n$$

$$h = 10^m \cdot 10^n$$

3. Подставьте в формулу п. 1  $h$  и  $a$  и найдите относительную погрешность  $\delta$ :

$$\delta = \frac{10^m \cdot 10^n}{a_0, a_1 a_2 \dots a_n \cdot 10^n} = \frac{10^m}{a_0, a_1 a_2 \dots a_n}; \quad \delta = \frac{10^m \cdot 100\%}{a_0, a_1 a_2 \dots a_n}$$



## Примеры

1. Оцените относительную погрешность приближенного значения  $y \approx 1,490 \cdot 10^5$ , записанного в виде  $a \cdot 10^n$ , если в множителе  $a$  все цифры верные.

*Решение.*

2). Найдем  $h$ :

$$(1,490 \pm 0,001) \cdot 10^5 = 1,490 \cdot 10^5 \pm 0,001 \cdot 10^5$$

$$h = 0,001 \cdot 10^5; \quad a = 1,490 \cdot 10^5$$

$$3). \quad \delta = \frac{0,001 \cdot 10^5}{1,490 \cdot 10^5} = \frac{1}{1490} < \frac{1}{1000}$$

$$1). \quad \delta = \frac{|y-a|}{|a|} = \frac{h}{|a|}$$

$$h = |\pm 0,001 \cdot 10^5|$$

$$\delta = \frac{h}{|a|}$$

*Ответ:*  $\delta < 0,001$ .

2. Оцените относительную погрешность приближенного значения  $y \approx 2,3162 \cdot 10^{-4}$ .

*Решение.*

1). Найдем  $h$ :

$$(2,3162 \pm 0,0001) \cdot 10^{-4} = 2,3162 \cdot 10^{-4} \pm 0,0001 \cdot 10^{-4}$$

$$h = 0,0001 \cdot 10^{-4}; \quad a = 2,3162 \cdot 10^{-4}$$

$$2). \quad \delta = \frac{0,0001 \cdot 10^{-4}}{2,3162 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{23162} \approx 0,00004 < 0,0001$$

$$\delta = \frac{h}{|a|}$$

*Ответ:*  $\delta < 0,0001$ .

**Вывод.** Если число  $x \approx a \cdot 10^n$ , где  $1 \leq a < 10$ ;  $n \in \mathbb{Z}$  и множитель  $a$  записан верными цифрами, то относительная погрешность приближенного значения не превосходит единицы последнего разряда в числе  $a$ .

*Например:*

в числе  $x \approx 2,8 \cdot 10^2$   $\delta < 0,1$ , а в числе  $x \approx 1,215 \cdot 10^{-3}$   $\delta < 0,001$

3. Масса Солнца  $(2 \cdot 10^{33} \pm 0,1 \cdot 10^{33})$  г. Масса детского мяча  $(2,5 \pm 0,1) \cdot 10^2$  г. Какое измерение точнее?

*Дано:*

$$x = 2 \cdot 10^{33} \pm 0,1 \cdot 10^{33}$$

$$y = (2,5 \pm 0,1) \cdot 10^2$$

Найти: что больше —  $\delta_x$  или  $\delta_y$ ?



Решение.

$$1). h_x = |\pm 0,1 \cdot 10^{33}| = 0,1 \cdot 10^{33}$$

$$2). a_x = 2 \cdot 10^{33}$$

$$3). \delta_x = \frac{0,1 \cdot 10^{33} \cdot 100\%}{2 \cdot 10^{33}} \approx 5\%$$

$$4). y = (2,5 \pm 0,1) \cdot 10^2 = 2,5 \cdot 10^2 \pm 0,1 \cdot 10^2$$

$$5). h_y = |\pm 0,1 \cdot 10^2| = 0,1 \cdot 10^2$$

$$6). a_y = |2,5 \cdot 10^2| = 2,5 \cdot 10^2$$

$$7). \delta_y = \frac{0,1 \cdot 10^2 \cdot 100\%}{2,5 \cdot 10^2} \approx 4\%$$

8).  $4\% < 5\%$ , значит, масса детского мяча измерена точнее

$$\delta = \frac{h \cdot 100\%}{|a|}$$

$$h = |x - a|$$

Ответ: масса детского мяча измерена точнее.

**Проверь себя!**

Округлите число 27809,21 до десятков и найдите абсолютную и относительную погрешность в процентах.

Ответ:  $h = 0,79 \approx 0,8$ ;  $\delta\% \approx 0,003\%$ .



## § 4.

## Действия над приближенными значениями

**Определение.** При сложении и вычитании данных приближенных величин следует оставить столько десятичных знаков, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом десятичных знаков.

Например: найдите периметр треугольника, стороны которого приближенно равны  $a \approx 3,25$  м;  $b \approx 6,70$  м;  $c \approx 5,325$  м.

Решение.

$$P = 3,25 + 6,70 + 5,325 = 15,275 \approx 15,28 \text{ м} \quad | \quad P = a + b + c$$

Ответ:  $P \approx 15,28$  м.

## Алгоритм

77

## Сложение и вычитание приближенных чисел

1. Определите число, в котором меньше десятичных знаков.  
Например: 2,3 и 5,32 — из них 2,3 — менее точное число
2. Выполните действие сложения или вычитания данных чисел.
3. Округлите результат, используя п. 1 (или до указанной точности).

## Примеры

1. Известно, что  $a \approx 26,1042$ ;  $b \approx 8,98$ ;  $c \approx 3,65$ . Найдите приближенное значение выражения  $a - b + c$ .

Решение.

1). Числа  $b$  и  $c$  имеют два десятичных знака.

$$\begin{aligned} 2). \quad & 26,1042 - 8,98 + 3,65 = \\ & = (26,1042 + 3,65) - 8,98 = \\ & = 29,7542 - 8,98 = 20,7742 \approx 20,77 \end{aligned}$$

Ответ:  $a - b + c \approx 20,77$ .

$$\begin{array}{r} a - b + c = (a + c) - b \\ + \quad 26,104 \quad - \quad 29,7542 \\ \quad 3,65 \quad \quad 8,98 \\ \hline 29,7542 \quad 20,7742 \end{array}$$

**З а м е ч а н и е.** Все действия выполняйте подряд, не разделяя на пункты.

2. Найдите приближенные значения  $x + y$  и  $x - y$ , если  $x \approx 4,1608$ ;  $y \approx 1,09$ .



Решение.

$$1). x + y = 4,1608 + 1,09 = 5,2508 \approx 5,25$$

$$2). x - y = 4,1608 - 1,09 = 3,0708 \approx 3,07$$

В числе  $y \approx 1,09$  два десятичных знака

Ответ:  $x + y \approx 5,25$ ;  $x - y \approx 3,07$ .

**Вывод.** При сложении и вычитании приближенные значения суммы и разности округляют по менее точному данному, имея в виду абсолютную точность, т.е. оставляют в результате столько знаков после запятой, сколько их содержится в менее точном данном.

### Алгоритм

78

### Умножение и деление приближенных значений чисел

1. Запишите приближенные числа в стандартном виде:  $x = a_0 \cdot 10^n$ ;  $1 \leq a < 10$ ;  $n \in \mathbb{Z}$ .
2. Выполните действие умножения или деления в стандартном виде.  
Например:  $2,12 \cdot 10^3 \cdot 1,3 \cdot 10^{-1} = (2,12 \cdot 1,3) \cdot 10^{3+(-1)} = 2,756 \cdot 10^2$
3. Определите наименьшую относительную погрешность в одном из чисел:  $a_0, a_1 a_2 \dots a_n$ ;  $b_0, b_1 b_2 \dots b_n$  (меньшее количество десятичных знаков — см. вывод на стр. 211).
4. В ответе оставьте столько десятичных знаков, сколько их в том числе  $a$  или  $b$ , где их меньше (п. 3).

Например:

$$2,756 \cdot 10^2 \approx 2,8 \cdot 10^2 = 280$$

В числе 1,3 один десятичный знак, округляем до 0,1

### Примеры

Вычислите приближенные значения выражений  $xy$  и  $x : y$ , если известны приближенные значения  $x$  и  $y$ .

1.  $x \approx 2,05$  и  $y \approx 1,2$

Решение.

$$1). xy = 2,05 \cdot 1,2 = 2,46 \approx 2,5$$

$$2). \frac{x}{y} = \frac{2,05}{1,2} \approx 1,708 \approx 1,7$$

В числе 1,2 один десятичный знак, округляем до 0,1

Ответ:  $xy \approx 2,5$ ;  $\frac{x}{y} \approx 1,7$ .



2.  $x \approx 0,275$  и  $y \approx 15,03$

Решение.

$$1). x \approx 0,275 = 2,75 \cdot 10^{-1}; y \approx 15,03 = 1,503 \cdot 10^1$$

$$2). xy = 2,75 \cdot 10^{-1} \cdot 1,503 \cdot 10^1 = \\ = 2,75 \cdot 1,503 \cdot 10^0 \approx \\ \approx 4,13325 \cdot 1 \approx 4,13$$

В числе  $x$  два десятичных знака, округляем до 0,01

$$3). x : y = 2,75 \cdot 10^{-1} : 1,503 \cdot 10^1 = 1,8296... \cdot 10^{-2} \approx \\ \approx 1,83 \cdot 10^{-2} \approx 0,0183 \approx 0,02$$

$$\left| \begin{array}{l} 10^{-1} : 10^1 = 10^{-2} \\ a^m : a^n = a^{m-n} \end{array} \right.$$

Ответ:  $xy \approx 4,13$ ;  $x : y \approx 0,02$ .

**З а м е ч а н и е.** При возведении приближенных чисел в квадрат и куб в результате сохраняется столько десятичных знаков, сколько их в основании степени.

Например:

$$1,5^2 = 2,25 \approx 2,3$$

В числе 1,5 один десятичный знак

$$0,4^3 = 0,064 \approx 0,1$$

В числе 0,4 один десятичный знак

**Вывод.** При умножении и делении приближенных значений числа переводят в стандартный вид  $x = a \cdot 10^n$  и ответ округляют по менее точной относительной погрешности, которая совпадает с последним десятичным знаком числа  $a$ .

### Определение результатов сложения, умножения, вычитания и деления приближенных чисел по способу границ<sup>1</sup>

Формулы границ:

$$1. \quad x + y \quad \begin{cases} НГ(x + y) = НГx + НГy \\ ВГ(x + y) = ВГx + ВГy \end{cases}$$

$$2. \quad x \cdot y \quad \begin{cases} НГ(x \cdot y) = НГx \cdot НГy \\ ВГ(x \cdot y) = ВГx \cdot ВГy \end{cases}$$

$$3. \quad x - y \quad \begin{cases} НГ(x - y) = НГx - НГy \\ ВГ(x - y) = ВГx - ВГy \end{cases}$$

$$4. \quad \frac{x}{y} \quad НГ\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{НГx}{ВГy}; \quad ВГ\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ВГx}{НГy}$$

<sup>1</sup> Для интересующихся.



### Правила определения нижней и верхней границы

1. НГ (нижнюю границу) округлять можно только по недостатку.
2. ВГ (верхнюю границу) округлять можно только по избытку.
3. В качестве приближенных значений в ответе брать среднее арифметическое значение чисел НГ и ВГ.

#### Пример

Найдите значение выражения  $(a + b) \cdot c$ , если:

$$a \approx 5,21(\pm 0,01) \quad b \approx 3,5(\pm 0,1) \quad c \approx 2,15(\pm 0,01)$$

Решение.

1).  $a + b$

$$5,20 \leq a \leq 5,22$$

$$3,4 \leq b \leq 3,6$$

$$\text{НГ}(a+b) = 5,2 + 3,4 = 8,6$$

$$\text{ВГ}(a+b) = 5,22 + 3,6 = 8,82$$

$$8,6 \leq a+b \leq 8,82$$

$$a+b = \frac{8,82+8,6}{2} = \frac{17,42}{2} = 8,71 \approx 8,7$$

2).  $(a + b) \cdot c$

$$2,14 \leq c \leq 2,16$$

$$8,6 \leq a+b \leq 8,82$$

$$2,14 \cdot 8,6 \leq (a+b) \cdot c \leq 2,16 \cdot 8,82$$

$$18,404 \leq (a+b) \cdot c \leq 19,0512$$

$$18,4 \leq (a+b) \cdot c \leq 19,1$$

$$(a+b) \cdot c = \frac{18,4+19,1}{2} = \frac{37,5}{2} = 18,75$$

$$(a+b) \cdot c = 18,75 \approx 18,8$$

Ответ:  $(a+b) \cdot c \approx 18,8$ .

Проверим вычисления методом «грубого» округления. В числе  $b$  один десятичный знак, округлим все числа до десятых.

$$a \approx 5,21 \approx 5,2; \quad c \approx 2,15 \approx 2,2;$$

$$a+b \approx 5,2+3,5=8,7;$$

$$(a+b) \cdot c \approx 8,7 \cdot 2,2 = 19,14 \approx 19$$

$$\text{НГ: } 18,404 \approx 18,4$$

(с недостатком)

$$\text{ВГ: } 19,0512 \approx 19,1$$

(с избытком)

$$(a+b) \cdot c \approx 18,8 \approx 19$$

(как в проверке)

$$(a+b) \cdot c \approx 18,75 \approx 18,8$$



## Решение примеров по теме «Приближенные вычисления»

1. Оцените абсолютную погрешность приближенного значения  $x \approx 4,00116$ , если все цифры верные.

*Решение.*

1). В числе 4,00116 последний разряд сотысячные доли, значит, погрешность  $h = 0,00001$  (все цифры верные).

$$2). \quad x = 4,00116 \pm 0,00001 \quad | \quad x = a \pm h$$

Ответ:  $h = 0,00001$ .

2. Оцените относительную погрешность приближенного значения  $x \approx 6,24 \cdot 10^5$ .

*Решение.*

$$1). \quad (6,24 \pm 0,01) \cdot 10^5 = 6,24 \cdot 10^5 \pm 0,01 \cdot 10^5$$

$$2). \quad h = 0,01 \cdot 10^5$$

$$3). \quad \delta = \frac{0,01 \cdot 10^5 \cdot 100\%}{6,24 \cdot 10^5} = \frac{100}{624} \approx 0,16 \approx 0,2\%$$

Ответ:  $\delta \approx 0,2\%$ .

$$(a+b)c = ac + bc$$

6,24 — цифры верные, последний разряд — сотые доли

$$\delta = \frac{h \cdot 100\%}{|a|}$$

3. Найдите приближенное значение  $a+b$  и  $a-b$ , если  $a \approx 51,642$ ;  $b \approx 12,68$ .

*Решение.*

$$1). \quad a+b = 51,642 + 12,68 \approx 64,322 \approx 64,32$$

$$2). \quad a-b = 51,642 - 12,68 \approx 38,962 \approx 38,96$$

Ответ:  $a+b \approx 64,32$ ;  $a-b \approx 38,96$ .

4. Вычислите приближенное значение выражений  $xy$  и  $x:y$ , если известны  $x \approx 15,94$ ;  $y \approx 0,82$ .

*Решение.*

$$1). \quad x \approx 15,94 = 1,594 \cdot 10^1; \quad y \approx 0,82 = 8,2 \cdot 10^{-1}$$

$$2). \quad xy = 1,594 \cdot 10^1 \cdot 8,2 \cdot 10^{-1} = 13,0708 \cdot 10^0 \approx 13,1$$

$$3). \quad x:y = 1,594 \cdot 10^1 : 8,2 \cdot 10^{-1} = 0,19439... \cdot 10^2 \approx$$

$$\approx 1,9439 \cdot 10^{-1} \cdot 10^2 \approx 1,94 \cdot 10 = 19,4$$

Ответ:  $xy \approx 13,1$ ;  $x:y \approx 19,4$ .

$$10^{-1} \cdot 10^1 = 10^0 = 1$$

$$10^1 : 10^{-1} = 10^2$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$



**Вывод.** При сложении и вычитании данные числа записывают в десятичных дробях и ответ округляют по абсолютной точности в менее точном данном, а при умножении и делении числа записывают в стандартном виде и менее точное данное берут по относительной точности.

**Попробуй не реши!**

Найдите периметр и площадь прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$ , если  $a \approx 15,4$  м и  $b \approx 18,7$  м.

Ответ:  $p \approx 68,2$  м;  $S \approx 287,98 \text{ м}^2 \approx 288,0 \text{ м}^2$ .

**Попробуй-ка реши!**

Вычислите площадь кругового кольца, где  $R \approx 32,5$  мм;  $r \approx 20,2$  мм.

Ответ:  $S_{\text{кольца}} \approx 2035,38 \text{ мм}^2 \approx 2035,4 \text{ мм}^2$ .



## Глава VIII. Уравнение

**Определение 1.** Уравнение — это равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой.

Например:  $\underbrace{2x-3}_{\text{левая часть уравнения}} = \underbrace{5+x}_{\text{правая часть уравнения}}$ ;  $2x$ ;  $-3$ ;  $5$ ;  $x$  — члены уравнения

**Определение 2.** Корнем уравнения называется такое значение неизвестного, при котором это уравнение обращается в верное числовое равенство.

Например, число 8 является корнем уравнения  $2x-3=5+x$ , так как  $2 \cdot 8 - 3 = 5 + 8$  — верное равенство.

Уравнение может иметь разное количество корней.

Например,  $2x = 3$  — один корень 1,5;  $(x+1)(x-2)=0$  — два корня  $-1$ ,  $2$ ;  $5x+5=5(x+1)$ , где  $x$  — любое число (множество корней);  $8x+3=8x+15$  — нет корней, при любом значении  $x$  левая часть уравнения меньше правой.

**Определение 3.** Решить уравнение — это значит найти все его корни или установить, что их нет.

При решении уравнений применяют основные свойства уравнения, которые основаны на свойствах верных равенств.

### Свойства верных равенств

1. Если  $a = b$  — верное равенство и  $k$  — любое число, то

$$\left. \begin{array}{l} a+k=b+k \\ a-k=b-k \end{array} \right\} \text{верные равенства}$$

Например:  $21 = 21$ ;  $k = 5$ , то  $21 + 5 = 21 + 5$  или  $21 - 5 = 21 - 5$

2. Если  $a = b$  — верное равенство и  $k \neq 0$  — любое число, то

$$\left. \begin{array}{l} a \cdot k = b \cdot k \\ a : k = b : k \end{array} \right\} \text{верные равенства}$$

Например:  $12 = 12$ ;  $k = 4$ , то  $12 \cdot 4 = 12 \cdot 4$  или  $12 : 4 = 12 : 4$



## Основные свойства уравнений

**Свойство 1.** Любой член уравнения можно перенести из одной части уравнения в другую, изменив его знак на противоположный.

Если  $a + x = b$   $| -a$ , то  $x = b - a$ .

**Свойство 2.** Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

Если  $a \cdot x = b$   $| : a$ , то  $x = \frac{b}{a}$  или: если  $\frac{x}{a} = b$   $| \cdot a$ , то  $x = a \cdot b$ .

*Примеры*

1.  $x - 3 = 9$   $| + 3$ ;  $x = 12$ ;

2.  $\frac{1}{2}x = 2$   $| \cdot 2$ ;  $x = 4$ ;

3.  $5x = 10$   $| : 5$ ;  $x = 2$

### З а м е ч а н и я

1. Удобно справа от уравнения за чертой писать, на какое число надо умножить или разделить обе части уравнения.

2. Если множитель при  $x$  дробь  $\frac{a}{b}$ , то умножайте обе части уравнения на дробь, обратную данной дроби, чтобы получить  $x$ .

Например:  $\frac{a}{b}x = c$   $| \cdot \frac{b}{a}$ ;  $x = \frac{c \cdot b}{a}$   $| \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$

3. Если множитель при  $x$  целое число, то разделите обе части уравнения на это число.

Например:  $ax = b$   $| : a$ ;  $x = \frac{b}{a}$   $| a : a = 1$

### Примеры

Решите уравнения (1–2).

1.  $\frac{2}{3}x = 4$

2.  $4x = -32$

*Решение.*

$\frac{2}{3}x = 4$   $| \cdot \frac{3}{2}$ ;  $x = 4 \cdot \frac{3}{2}$ ;

$x = 6$

Ответ: 6.

*Решение.*

$4x = -32$   $| : 4$ ;  $x = -32 : 4$ ;

$x = -8$ .

Ответ: -8.



**§ 1.****Решение линейных уравнений**

**Определение.** Уравнение вида  $ax = b$  (уравнение I степени относительно  $x$ ) называется линейным, где  $a$  и  $b$  — любые заданные действительные числа,  $x$  — неизвестное.

При решении линейного уравнения  $ax = b$  могут быть следующие случаи:

1. Если  $a \neq 0$ , то  $x = b : a$  — единственный корень, при  $b = 0$   $x = 0$ .
2. Если  $a = 0$  и  $b = 0$ , то  $0 \cdot x = 0$ , тогда  $x$  — любое число, уравнение имеет множество корней.
3. Если  $a = 0$  и  $b \neq 0$ , то  $0 \cdot x = b$  — уравнение не имеет корней.

**Алгоритм****79****Решение линейных уравнений**

1. Если уравнение имеет вид  $ax = b$ , то определите, какой из трех случаев можно применить к решению, и решите его. Если уравнение имеет вид, отличный от  $ax = b$ , то перейдите к п. 2.
2. Если члены уравнения имеют числовые знаменатели, то найдите НОК знаменателей и умножьте обе части уравнения на НОК, затем раскройте скобки и перейдите к п. 3.
3. Если в уравнении есть скобки, то сначала раскройте скобки.
4. Перенесите члены, содержащие неизвестное, в левую часть, а числа в правую часть уравнения, изменив их знаки на противоположные.
5. Приведите подобные члены в левой части и вычислите числовое значение в правой части уравнения, получите уравнение вида  $ax = b$ .
6. Решите уравнение в п. 5 по п. 1.
7. Запишите ответ числом.

**З а м е ч а н и е.** При решении уравнений применяйте свойства уравнений (I и II) и алгоритмы раскрытия скобок и приведения подобных членов уравнения.



# Примеры

Решите уравнения (1–5).

1.  $-\frac{1}{2}x = 3$

Решение.

$$-\frac{1}{2}x = 3 \quad | \cdot (-2); \quad x = -6 \quad \left| \begin{array}{l} \frac{a}{b}x = c \\ \cdot \frac{b}{a} \end{array} \right.$$

Ответ: -6.

2.  $8y - 9 - (4y - 5) = 12y - (4 + 5y)$

Решение.

$$\begin{array}{l} 8y - 9 - 4y + 5 = 12y - 4 - 5y \\ 8y - 4y - 12y + 5y = -4 + 9 - 5 \\ -3y = 0; \quad y = 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} -(a-b) = -a+b \\ -(a+b) = -a-b \\ ax = 0, \quad a \neq 0; \quad x = 0 \end{array} \right.$$

Ответ: 0.

3.  $\frac{4x-51}{3} - \frac{17-3x}{4} = \frac{x+5}{2}$

Решение.

$$\frac{4x-51}{3} - \frac{17-3x}{4} = \frac{x+5}{2} \quad | \cdot 12$$

$$\frac{(4x-51) \cdot 12}{3} - \frac{(17-3x) \cdot 12}{4} = \frac{(x+5) \cdot 12}{2}$$

$$(4x-51) \cdot 4 - (17-3x) \cdot 3 = (x+5) \cdot 6$$

$$16x - 204 - 51 + 9x = 6x + 30$$

$$16x + 9x - 6x = 30 + 204 + 51$$

$$19x = 285 \quad | : 19$$

$$x = 15$$

Ответ: 15.

$$\text{НОК}(3; 4; 2) = 12$$

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$$

$$a(b+c) = ab+ac$$

$$ax = b \quad | : a; \quad x = \frac{b}{a}$$

## Полезные советы

1. В правой части уравнения первым пишите то число, которое там осталось после перенесения членов, содержащих  $x$ , в левую часть.

2. Иногда удобно члены, содержащие  $x$ , перенести вправо, числа — влево, чтобы получить положительный коэффициент  $a$  при  $x$ ;  $b = ax$ , а затем переписать, как принято,  $ax = b$  по свойству равенств: если  $a = b$ , то  $b = a$ .



4.  $25x - 17 = 4x - 5 - 13x + 14 + 34x$

Решение.

$$-17 + 5 - 14 = 4x + 34x - 13x - 25x$$

$$0 \cdot x = -26 \text{ — корней нет}$$

$$a = b, \text{ то } b = a$$

$$0 \cdot x = b, b \neq 0 \text{ — корней нет}$$

Ответ: уравнение корней не имеет.

5. Решите уравнение  $b = a(x - 3)$ , если  $a$  и  $b$  заданные числа, отличные от нуля.

Решение.

I способ (по алгоритму):

$$b = ax - 3a; b + 3a = ax; ax = b + 3a \mid : a$$

$$x = \frac{b + 3a}{a}; x = \frac{b}{a} + 3$$

$$a \cdot (b - c) = ab - ac;$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

II способ (нахождение компонента с неизвестным):

$$b = a(x - 3); x - 3 = \frac{b}{a}; x = \frac{b}{a} + 3$$

Ответ:  $\frac{b}{a} + 3$ .

**Попробуй не реши!**

Решите уравнения.

1.  $0,2 - 2(x + 1) = 0,4x$

2.  $\frac{x}{3} + \frac{x-1}{2} = 4$

Ответ: 1).  $-\frac{3}{4}$ ; 2). 5,4.

**Попробуй-ка реши!**

1. Сумма чисел  $\frac{7}{12}$  и  $2x$  в 3 раза меньше одной четвертой числа  $x$ .

Найдите  $x$ .

2. Решите уравнение, если  $a$  и  $b$  заданные числа, отличные от нуля.

$$4 = a - (bx - 1)$$

Ответ: 1).  $-\frac{7}{23}$ ; 2).  $\frac{a-3}{b}$ .



## § 2.

Решение уравнений I степени,  
содержащих неизвестную под знаком модуля

## Алгоритм

80

Решение уравнений  $|kx + b| = c$ 

1. Запишите за чертой определение модуля:  $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$
2. Составьте и решите два уравнения:
  - 1).  $kx + b = c \quad \left| \quad kx + b \geq 0 \right.$
  - 2).  $kx + b = -c \quad \left| \quad kx + b < 0 \right.$
3. Запишите ответ числами  $x_1$  и  $x_2$ .

## Примеры

Решите уравнения (1–3).

1.  $\left| \underbrace{3x - 5}_a \right| = 4$

Решение.

$$\begin{array}{l|l|l} 1). \quad 3x - 5 = 4; & 3x = 9; & x = 3 \\ 2). \quad 3x - 5 = -4; & 3x = 1; & x = \frac{1}{3} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 3x - 5 \geq 0 \\ 3x - 5 < 0 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} |a| = a, \text{ если } a \geq 0 \\ |a| = -a, \text{ если } a < 0 \end{array} \right.$$

Ответ:  $\frac{1}{3}; 3$ .

2.  $|8 - x| = 1$

Решение.

$|8 - x| = |x - 8|$

Решим уравнение  $|x - 8| = 1$ 

1).  $x - 8 = 1; \quad x = 9$

2).  $x - 8 = -1; \quad x = 7$

Ответ: 7; 9.

3.  $|2 + x| = -3$  — нет решения

Ответ:  $\emptyset$ .



**Полезный совет.** Если под знаком модуля стоит двучлен  $(b - kx)$ , то поменяйте знаки у каждого члена на противоположный, чтобы удобнее было решать с  $(+kx)$ , применив свойство модуля  $|a - b| = |b - a|$ .

### Проверь себя!

Решите уравнения.

$$1. |5 - x| = 2 \qquad 2. |3 + x| = 7 \qquad 3. \left| \frac{2}{5}x - \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{15}$$

Ответ: 1). 3; 7; 2). -10; 4; 3).  $\frac{2}{3}$ ; 1.

**Попробуй не реши!**

Решите примеры из сборника ГИА, используя алгоритмы решения уравнений.

$$1. 4x - 4,5 = 5x - 3(2x - 1,5)$$

$$2. \frac{3}{x} - \frac{2}{x} = 25$$

$$3. 3(2 + 1,5x) = 0,5x + 24$$

$$4. \frac{x+9}{3} - \frac{x-1}{5} = 2$$

Ответ: 1).  $\frac{9}{5}$ ; 2).  $\frac{1}{25}$ ; 3).  $\frac{9}{2}$ ; 4). -9.



## § 3.

## Квадратные уравнения

**Определение 1.** Уравнение вида  $ax^2 + bx + c = 0$ , где  $x$  — переменная,  $a, b, c$  — некоторые числа, причем  $a \neq 0$ , называется **квадратным уравнением**.

$$\underbrace{a}_{\substack{\text{первый} \\ \text{коэффициент}}} \cdot x^2 + \underbrace{b}_{\substack{\text{второй} \\ \text{коэффициент}}} \cdot x + \underbrace{c}_{\substack{\text{свободный} \\ \text{член}}} = 0$$

**Внимание!** Обычно квадратное уравнение (уравнение второй степени) записывают в таком порядке, чтобы на первом месте был член  $ax^2$ , на втором —  $bx$  и на третьем — свободный член  $c$ .

Например:  $\underbrace{3}_{a}x^2 + \underbrace{2}_{b}x - \underbrace{1}_{c} = 0$ ;  $\underbrace{-2}_{a}x^2 - \underbrace{1}_{b}x + \underbrace{1}_{c} = 0$

**Определение 2.** Если первый коэффициент  $a = 1$ , то квадратное уравнение  $x^2 + px + q = 0$  называется **приведенным квадратным уравнением**.

Например,  $x^2 + 3x - 2 = 0$ ;  $x^2 - x + 1 = 0$ .

**Определение 3.** Если в квадратном уравнении  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ ,  $b = 0$ , или  $c = 0$ , или  $b = 0$  и  $c = 0$ , то уравнение называется **неполным квадратным уравнением**:

1.  $a \neq 0$ ;  $b \neq 0$ ;  $c = 0$ , то уравнение (I) примет вид  $ax^2 + bx = 0$
2.  $a \neq 0$ ;  $c \neq 0$ ;  $b = 0$ , то уравнение (I) примет вид  $ax^2 + c = 0$
3.  $a \neq 0$ ;  $b = 0$ ;  $c = 0$ , то уравнение (I) примет вид  $ax^2 = 0$

## Алгоритм

## 81

## Решение неполных квадратных уравнений

1. Упростите уравнение (раскройте скобки, перенесите все члены в левую часть, приведите подобные члены) и приведите его к одному из типов квадратного уравнения:  $ax^2 + bx = 0$  (I);  $ax^2 + c = 0$  (II);  $ax^2 = 0$  (III).
2. Запишите за чертой формулу решения для данного типа уравнения:

I $a \neq 0$ ; $c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0$ ; $x_2 = -\frac{b}{a}$
------------------------	-----------------	----------------------------------



II $a \neq 0; b = 0$	$ax^2 + c = 0$	$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$
III $a \neq 0; b = 0; c = 0$	$ax^2 = 0$	$x_{1,2} = 0$

3. Выпишите значения  $a, b, c$  и подставьте в формулу.

Ответ запишите числом (корни уравнения).

**З а м е ч а н и е.** Формула решения для I типа уравнения получается, если:

$$\begin{array}{l|l} ax^2 + bx = 0; x(ax + b) = 0; & a \cdot b = 0, \text{ если } a = 0 \text{ или } b = 0 \\ x = 0 \text{ или } ax + b = 0; & \\ x_1 = 0; x_2 = -\frac{b}{a} & \end{array}$$

Для II типа уравнений:  $ax^2 + c = 0; ax^2 = -c; x^2 = -\frac{c}{a}; x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ ; при этом

если  $a$  и  $c$  одного знака, то нет корней среди действительных чисел,

если  $a$  и  $c$  разного знака, то получим два корня:  $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}; x_2 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$ .

III тип: если  $ax^2 = 0$  и  $a \neq 0$ , то  $x^2 = 0; x_{1,2} = 0$  (единственный корень).

### Примеры

Решите уравнения.

1.  $-6x^2 + 5x = 0$  (I тип)

Решение.

$$x_1 = 0; x_2 = -\frac{5}{-6} = \frac{5}{6}$$

Ответ: 0;  $\frac{5}{6}$ .

$$ax^2 + bx = 0; a = -6; b = 5$$

$$x_1 = 0; x_2 = -\frac{b}{a}$$

2.  $-0,1x^2 + 10 = 0$  (II тип)

Решение.

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{10}{-0,1}} = \pm \sqrt{100} = \pm 10$$

Ответ: -10; 10.

$$ax^2 + c = 0; a = -0,1; c = 10 \text{ — разных}$$

$$\text{знаков, решение есть } x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$



3.  $-100x^2 = 0$  (III тип)

$x_{1,2} = 0$

Ответ: 0.

$ax^2 = 0; a \neq 0; x = 0$

4. ГИА. Решите уравнение  $9x^2 - 25 = 0$ .

Решение.

$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{-25}{9}}; x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{25}{9}}; x_{1,2} = \pm \frac{5}{3}$

$ax^2 + c = 0; x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$

$a = 9; c = -25$

Ответ:  $-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}$ .

5.  $x^2 - 5 = (x+5)(2x-1)$

Решение.

Упростите уравнение:

$x^2 - 5 = 2x^2 + 10x - x - 5$

$2x^2 + 10x - x - 5 - x^2 + 5 = 0$

$x^2 + 9x = 0$  (I тип)

$ax^2 + bx = 0; a = 1; b = 9$

$x_1 = 0; x_2 = -\frac{b}{a}$

$x_1 = 0; x_2 = -\frac{9}{1} = -9$

Ответ:  $-9; 0$ .

6. Задача. Если от квадрата отрезать треугольник площадью
- $59 \text{ см}^2$
- , то площадь оставшейся части будет
- $85 \text{ см}^2$
- . Найдите сторону квадрата.

Дано:

$S_{\text{треугольника}} = 59 \text{ см}^2$

$S_{\text{остатка}} = 85 \text{ см}^2$

Найти: сторону квадрата.

Формула решения:

$S_{\text{квадрата}} = S_{\text{треугольника}} + S_{\text{остатка}}$

Решение.

1). Пусть  $x \text{ см}$  — сторона квадрата;  $x > 0$ 

2).  $S_{\text{квадрата}} = x^2$

3). Подставьте в формулу решения:  $x^2 = 59 + 85$ 4). Решите уравнение:  $x^2 = 59 + 85; x^2 = 144$  (II тип)

$x_{1,2} = \pm \sqrt{144}; x_{1,2} = \pm 12$

$x_2 = -12$  не подходит,  $x > 0$ .

$ax^2 + c = 0; x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$

Ответ: сторона квадрата равна  $12 \text{ см}$ .

$a = 1; c = 144$



7. ГИА. Решите уравнение  $\frac{16-4x^2}{x-4} = 0$ .

Решение.

$$16-4x^2=0; 16=4x^2 \quad | :4$$

$$x^2=4$$

$$x=\pm 2$$

$$x \neq 4$$

Ответ: -2; 2.

$$\text{ОДЗ: } \frac{a}{b}=0, \text{ если } \begin{cases} a=0 \\ b \neq 0 \end{cases}$$

$$x-4 \neq 0; x \neq 4;$$

$$x^2=c; x=\pm\sqrt{c}$$

Попробуй не реши!

ГИА. Решите уравнение: 1.  $2x^2+x=0$ .

$$2. \frac{2x^2+9x}{x-3}=0$$

$$3. -4x^2=0$$

Ответ: 1). 0;  $-\frac{1}{2}$ ; 2). 0;  $-\frac{9}{2}$ ; 3). 0.

Попробуй-ка реши!

$$1. 1\frac{2}{3}x + (2x+1)\left(\frac{1}{3}x-1\right)=0 \quad 2. (x-1)(x+1)=2(x^2-3)$$

3. Найдите сторону квадрата, имеющего такую же площадь, как круг радиуса  $r$ .

Ответ: 1).  $-\frac{1}{2}\sqrt{6}$ ;  $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ ; 2).  $-\sqrt{5}$ ;  $\sqrt{5}$ ; 3).  $r\sqrt{\pi}$  см.

Алгоритм

82

Выделение полного квадрата  
в трехчлене  $ax^2+bx+c$

1. Запишите формулу квадрата двучлена  $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a+b)^2$  (I).

2. Обозначьте в трехчлене  $x^2+px+q$ :  $x^2=a^2$ ;  $px=2ab$  и найдите

$$a \text{ и } b: a=x, b=\frac{p}{2}.$$

3. Подставьте в формулу (I) значение  $a$  и  $b$ :  $x^2+2 \cdot x \cdot \frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2$

4. Прибавьте  $q$  и отнимите  $\left(\frac{p}{2}\right)^2$  от каждой части равенства (I) п. 3:



$$\underbrace{x^2 + 2x \cdot \frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2}_{x^2 + px + q} + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2, \text{ получите}$$

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \text{ — что и требовалось выполнить.}$$

**Замечание.** Для выделения полного квадрата в трехчлене  $x^2 + px + q$

достаточно разделить  $p$  на два, прибавить и отнять  $\left(\frac{p}{2}\right)^2$  и собрать формулу  $\left(x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$ . Можно сразу

воспользоваться готовой формулой п. 4, выполнив устно п. 1–3.

*Например:* выделить полный квадрат в трехчлене  $x^2 + 4x + 5$

*Решение.*

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 5 &= (x + 2)^2 - 4 + 5 = \\ &= (x + 2)^2 + 1 \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} x^2 + px + q &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \\ p = 4; \frac{p}{2} = 2; \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= 4; q = 5 \end{aligned} \right.$$

**Полезный совет.** Если дан трехчлен  $ax^2 + bx + c$ , то надо выне-

сти  $a$  за скобки  $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$  и применить формулу для

выделения полного квадрата в трехчлене  $x^2 + px + q$ , где  $p = \frac{b}{a}$ ;  $q = \frac{c}{a}$ ;

$$\begin{aligned} \frac{p}{2} &= \frac{b}{2a}, \text{ получим } ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) = \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

*Например,* выделить полный квадрат в трехчлене  $2x^2 - 3x - 4$

*Решение.*

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x - 4 &= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9 + 4 \cdot 2 \cdot 4}{8} = \\ &= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{41}{8} = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - 5\frac{1}{8} \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ a = 2; b = -3; c &= -4 \end{aligned} \right.$$



**Внимание!** Формула выделения полного квадрата в трехчлене

$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$  применяется при построении графика функции  $y = x^2 + px + q$  и при решении уравнений  $x^2 + px + q = 0$ .

**Алгоритм****83****Решение квадратных уравнений  
выделением квадрата двучлена**

1. Приведите уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  к виду  $x^2 + px + q = 0$ ,

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad | : a$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \frac{b}{a} = p; \\ \frac{c}{a} = q \end{array} \right.$$

Например:  $3x^2 + 6x - 2 = 0 \quad | : 3$

$$x^2 + 2x - \frac{2}{3} = 0$$

2. Запишите формулу  $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ .

3. Найдите  $\frac{p}{2}$  и  $q$  из уравнения  $x^2 + px + q = 0$  и вычислите  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ .

Например:

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - (-6) = \frac{25}{4} + 6 = \frac{49}{4} \quad \left| \begin{array}{l} p = 5; \quad q = -6 \\ \frac{p}{2} = \frac{5}{2}; \quad \frac{25}{4} + 6 = \frac{25 + 24}{4} = \frac{49}{4} \end{array} \right.$$

4. Подставьте  $\frac{p}{2}$  и  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$  в формулу  $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ . Если

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ , то перейдите к п. 5; если  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ , то решений нет.

Например:

1). В уравнении  $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$ ;  $\frac{49}{4} > 0$ , получим два корня.



2). В уравнении  $x^2 - 3x + 4 = 0$ ;  $\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 < 0$ , значит, уравнение не имеет решения.

5. Извлеките корень квадратный из обеих частей уравнения:

$$\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}; \quad x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \left| \quad \sqrt{a^2} = |a| \right.$$

$$\text{Найдите } x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Пример п. 5.

$$x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}}; \quad x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{7}{2}; \quad x_1 = -\frac{5}{2} + \frac{7}{2} = 1; \quad x_2 = -\frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -6$$

6. Запишите ответ числами.

### Примеры

Решите уравнения (1–2).

1.  $x^2 + 3x - 10 = 0$

Решение.

$$2). \quad \frac{p}{2} = \frac{3}{2}; \quad \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{9}{4} - (-10) = \frac{49}{4}$$

$$3). \quad \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}; \quad \frac{49}{4} > 0$$

$$4). \quad x + \frac{3}{2} = \pm \sqrt{\frac{49}{4}}; \quad x + \frac{3}{2} = \pm \frac{7}{2}$$

$$5). \quad x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{7}{2}$$

$$x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2} = \frac{4}{2} = 2; \quad x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{7}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

Ответ: -5; 2.

$$1). \quad x^2 + px + q = 0$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$p = 3; \quad q = -10$$

$$\frac{9}{4} + 10 = \frac{9 + 40}{4} = \frac{49}{4}$$



2.  $5x^2 + 3x - 8 = 0$

Решение.

1).  $5x^2 + 3x - 8 = 0 \quad | :5$

$$x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{8}{5} = 0$$

2).  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{3}{10}\right)^2 - \left(-\frac{8}{5}\right) = \frac{9}{100} + \frac{8}{5} = \frac{169}{100}$

3).  $\left(x + \frac{3}{10}\right)^2 = \frac{169}{100}; \quad \frac{169}{100} > 0$

4).  $x + \frac{3}{10} = \pm \sqrt{\frac{169}{100}}; \quad x_{1,2} = -\frac{3}{10} \pm \frac{13}{10}$

5).  $x_1 = -\frac{3}{10} + \frac{13}{10} = \frac{10}{10} = 1; \quad x_2 = -\frac{3}{10} - \frac{13}{10} = -\frac{16}{10} = -1,6$

Ответ: -1,6; 1.

$$x^2 + px + q = 0; \quad p = \frac{3}{5}$$

$$q = -\frac{8}{5}$$

$$\frac{p}{2} = \frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{10}$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\frac{9}{100} + \frac{8}{5} = \frac{9+160}{100} = \frac{169}{100}$$

**З а м е ч а н и е.** Уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  можно решать по формуле:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

**Алгоритм****84****Решение квадратных уравнений  
 $ax^2 + bx + c = 0$  по формуле**

1. Приведите уравнение к виду  $ax^2 + bx + c = 0$  и если  $a < 0$ , то умножьте на  $(-1)$  обе части уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ .
2. Выпишите за чертой  $a=$ ,  $b=$ ,  $c=$ , формулу дискриминанта

$$D = b^2 - 4ac \text{ и формулу корней уравнения: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

3. Найдите дискриминант (различитель):  $D = b^2 - 4ac$   
а) если  $D > 0$ , то найдите два корня уравнения, подставив в формулу корней  $a$ ,  $b$  и  $D$ :  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ ;



б) если  $D = 0$ , то  $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$ ;

в) если  $D < 0$ , то уравнение не имеет действительных корней, решать его дальше не надо.

4. Ответ запишите числами.

### Полезные советы

1. По формуле корней  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$  можно решать все уравнения

вида  $ax^2 + bx + c = 0$  и неполные квадратные уравнения, но рационально решать уравнения разного вида по формулам, которые дают более короткое решение.

Приведем таблицу таких формул.

Вид уравнения	Формулы решения
1. $ax^2 + bx + c = 0$ $b$ — нечетное	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, D = b^2 - 4ac$
2. $ax^2 + bx + c = 0$ $b = 2k$ — четное	$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$ , где $k = \frac{b}{2}$ , $D_1 = k^2 - ac$ ; $D_1 = \frac{D}{4}$
3. $x^2 + px + q = 0$ $p$ — нечетное	$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$
4. $x^2 + px + q = 0$ $p = 2k$ — четное	$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

2. Если  $D$  есть число, являющееся точным квадратом, то полезно его сразу записать в виде квадрата числа (см. таблицу квадратов).

Например:  $D = 49 = 7^2$ ;  $D = 169 = 13^2$

### Примеры

Решите уравнение  $3x^2 - 8x - 3 = 0$ .

Решение.

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{25}}{3} = \frac{4 \pm 5}{3}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a = 3; b = -8 \text{ — четное; } c = -3$$



$$x_1 = \frac{4+5}{3} = 3; x_2 = \frac{4-5}{3} = -\frac{1}{3}$$

Ответ:  $-\frac{1}{3}; 3$ .

$$k = \frac{b}{2} = -4, x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

$$D_1 = k^2 - ac = (-4)^2 - 3(-3) = 16 + 9 = 25 = 5^2 > 0$$

### Полезные советы

1. Если  $c < 0$ , то при нахождении  $D = b^2 - 4ac$  сразу пишите знак «+» перед выражением  $4ac$  или в случае  $D_1 = k^2 - ac$  — перед  $ac$ .
2. Если в уравнениях  $ax^2 + bx + c = 0$ , или  $x^2 + px + q = 0$ ,  $a + b + c = 0$  (I), или  $1 + p + q = 0$  (II), то корни можно найти устно. В случае I:  $x_1 = 1$ ,

$x_2 = \frac{c}{a}$ ; в случае II:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = q$ , поэтому, когда выписываете за чер-

той  $a, b, c$ , проверьте возможность устного решения уравнения.

Например:

$$1). 3x^2 + 5x - 8 = 0$$

$$a = 3; b = 5; c = -8$$

$$3 + 5 - 8 = 0, \text{ значит, } x_1 = 1; x_2 = -\frac{8}{3}$$

$$a + b + c = 0$$

$$x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a}$$

$$2). x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$a = 1; p = -3; q = 2$$

$$1 - 3 + 2 = 0, \text{ значит, } x_1 = 1; x_2 = 2$$

$$x_1 = 1; x_2 = q$$

### Примеры

Решите уравнения.

$$1. \text{ ГИА. } 7x^2 + 9x + 2 = 0$$

$$2). D = 9^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 81 - 56 = 25 = 5^2$$

$$3). x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{25}}{14} = \frac{-9 \pm 5}{14}$$

$$x_1 = \frac{-9+5}{14} = -\frac{4}{14} = -\frac{2}{7}; x_2 = \frac{-9-5}{14} = -1$$

Ответ:  $-1; -\frac{2}{7}$ .

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$1). a = 7; b = 9; c = 2$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$



**Полезный совет.** Прописывайте формулу решения за чертой, следуя алгоритму, тогда не сделаете ошибку.

2. ГИА.  $x^2 - 6x = 4x - 25$

*Решение.* Приведите уравнение к виду  $x^2 + px + q = 0$

2).  $x^2 - 6x - 4x + 25 = 0$  | 1).  $x^2 + px + q = 0$ ;  $p = -10$  — четное;  $q = 25$

$x^2 - 10x + 25 = 0$

$D = 25 - 25 = 0$

3).  $x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{0} = 5$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q; \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Если  $D = 0$ , то левая часть уравнения есть полный квадрат:

$x^2 - 2x \cdot 5 + 25 = (x - 5)^2$ ;  $(x - 5)^2 = 0$ ;  $x = 5$

*Ответ:* 5.

3. ГИА.  $(10x - 4)(3x + 2) = 0$

*Решение.*

Скобки раскрывать не надо, так как если  $a \cdot b = 0$ , то  $a = 0$  или  $b = 0$ .

$10x - 4 = 0$  или  $3x + 2 = 0$

$10x = 4$  | :10 |  $3x = -2$  | :3

$x_1 = 0,4$

$x_2 = -\frac{2}{3}$

**Полезный совет.** Удобно записать оба уравнения как совокупность с квадратной скобкой «[» (скобка [ читается как слово «или», например:  $10x - 4 = 0$  или  $3x + 2 = 0$ ; фигурная скобка { читается как «и», применяется при решении систем).

$$\begin{cases} 10x - 4 = 0 \\ 3x + 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 10x = 4 \mid :10 \\ 3x = -2 \mid :3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0,4 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

*Ответ:*  $-\frac{2}{3}$ ; 0,4.

4. Найдите корни уравнения  $5x^2 - x - 1 = 0$  и укажите их приближенные значения в виде десятичных дробей с точностью до 0,1.

2).  $D = 1 + 20 = 21$

3).  $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{10}$ ;  $x_1 = \frac{1 + \sqrt{21}}{10}$ ;

$x_2 = \frac{1 - \sqrt{21}}{10}$

1).  $ax^2 + bx + c = 0$ ;  $a = 5$ ;  $b = -1$ ;  $c = -1$   
 $D = b^2 - 4ac$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$



Применим извлечение корня из числа «вручную» до 0,01 (на один знак больше):

$\times 85$ $\quad 5$	$\sqrt{21,00'00} = 4,58 \approx 4,6$ $- 16$
$\times 908$ $\quad 8$	$\quad 500$ $\quad - 425$ <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black;"/> $\quad - 7500$ $\quad \quad 7264$ <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black;"/> $\quad \quad \quad 236...$

$$x_1 \approx \frac{1+4,6}{10} = \frac{5,6}{10} = 0,56 \approx 0,6; \quad x_2 \approx \frac{1-4,6}{10} = \frac{-3,6}{10} = -0,36 \approx -0,4$$

Ответ:  $\approx -0,4$ ;  $\approx 0,6$ .

**Полезный совет.** Если коэффициенты уравнения — дробные числа, то умножьте обе части уравнения на НОК их знаменателей, а затем решайте его.

Например:  $0,7x^2 = 1,3x + 2 = 0$

Решение.

$$1). \quad 0,7x^2 = 1,3x + 2 = 0 \quad | \cdot 10$$

$$7x^2 - 13x - 20 = 0$$

$$3). \quad D = 169 + 560 = 729 = 27^2$$

$$4). \quad x_{1,2} = \frac{13 \pm 27}{14}$$

$$x_1 = \frac{13+27}{14} = \frac{40}{14} = \frac{20}{7}; \quad x_2 = \frac{13-27}{14} = -1$$

$$\frac{7}{10} \text{ и } \frac{13}{10} \text{ — общий знаменатель } 10$$

$$2). \quad a = 7; \quad b = -13; \quad c = -20$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Ответ:  $-1$ ;  $\frac{20}{7}$ .

**Замечание.** Неполные квадратные уравнения по общей формуле решать не рационально, но решение получить можно.

Например, решите уравнение  $x^2 - 2x = 0$ :

$$D = k^2 - ac = 1 - 1 \cdot 0 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 1}{1}; \quad x_1 = 2; \quad x_2 = 0$$

$$a = 1; \quad b = -2; \quad c = 0; \quad k = -1$$

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D}}{a}$$

Ответ: 0; 2.



**Проверь себя!**

1. Решите уравнение  $x^2 - 1,6x - 0,36 = 0$ . Ответ дать в обыкновенных дробях.

2. Найдите корни уравнения  $(3x - 1)(x + 3) = x(1 + 6x)$  с точностью до 0,01. Ответ: 1).  $-\frac{1}{5}; \frac{9}{5}$ ; 2).  $\frac{7 - \sqrt{13}}{6} \approx 0,57; \frac{7 + \sqrt{13}}{6} \approx 1,77$ .

**Теорема Виета**

Если дано уравнение:

$$\text{I. } x^2 + px + q = 0, \text{ то } \begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases} \quad \text{II. } ax^2 + bx + c = 0, \text{ то } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

**Теорема, обратная теореме Виета**

Если даны числа  $x_1 = m$  и  $x_2 = n$  такие, что  $m + n = -p$  и  $m \cdot n = q$ , то числа  $m, n$  — корни уравнения  $x^2 + px + q = 0$ .

Прямая и обратная теоремы Виета применяются для решения уравнений и для составления уравнения по его корням.

Для простоты применения теорем будем записывать только формулы Виета:

$$\begin{array}{l} \text{Для уравнения } x^2 + px + q = 0 \\ \begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Для уравнения } ax^2 + bx + c = 0 \\ \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \end{array}$$

**Алгоритм****85****Решение уравнений по формулам Виета**

1. Приведите уравнение к виду  $x^2 + px + q = 0$ .

2. Запишите за чертой формулы Виета:  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$



3. Если  $x_1$  и  $x_2$  — целые числа, то они являются делителями  $q$ ; выпишите все пары делителей  $q$ .

Например:  $q = 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = -2 \cdot (-6) = -3 \cdot (-4)$

Найдите сумму такой пары множителей, которая даст число  $(-p)$ .

Например: в уравнении  $x^2 + 7x + 12 = 0$

$-p = -7$ ;  $q = 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = -2 \cdot (-6) = -3 \cdot (-4)$ , числа  $-3$  и  $-4$  — корни уравнения, так как  $-3 + (-4) = -7$ , т. е.  $(-p)$ .

**Полезный совет.** Подбирайте числа через делители числа  $q$ , причем если  $q > 0$ , то  $x_1$  и  $x_2$  — числа одного знака, если  $q < 0$ , то  $x_1$  и  $x_2$  — числа разного знака, а затем делайте отбор корней через  $x_1 + x_2 = -p$ . При тренировке нахождения корней поймете, какие пары чисел надо испытывать, не перечисляя все пары.

### Примеры

Решите уравнения по формулам Виета (обратная теорема).

1.  $x^2 + 3x - 4 = 0$

Решение.

2)  $q = -4 = -1 \cdot 4 = 1 \cdot (-4) = 2 \cdot (-2)$

3)  $-1 + 4 = 3 \neq -3$ ;  $1 + (-4) = -3 = -p$

$x_1 = -4$ ;  $x_2 = 1$

Ответ:  $-4$ ;  $1$ .

2.  $x^2 - 6x + 5 = 0$

Решение.

2).  $q = 5 = 1 \cdot 5 = (-1) \cdot (-5)$

3).  $1 + 5 = 6 = -p$

значит,  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = 5$

Ответ:  $1$ ;  $5$ .

$p = 3$ ;  $-p = -3$ ;  $q = -4$

1)  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 \cdot x_2 = -4 \end{cases}$

$q < 0$  — корни разного знака

$-p < 0$  — отрицательное число имеет больший модуль

$p = -6$ ;  $-p = 6$ ;  $q = 5$

1).  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = 5 \end{cases}$

$q > 0$  — знаки одинаковые

$-p > 0$  — оба корня положительные



3.  $x^2 + 9x + 8 = 0$

*Решение.*

2)  $q = 8 = 2 \cdot 4 = 1 \cdot 8 =$   
 $= -2 \cdot (-4) = (-1) \cdot (-8)$

3)  $-1 + (-8) = -9 = -p$

значит,  $x_1 = -8; x_2 = -1$

*Ответ:*  $-8; -1$ .

$p = 9; -p = -9; q = 8$

1):  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = -9 \\ x_1 \cdot x_2 = 8 \end{cases}$

 $q > 0$  — знаки одинаковые $-p < 0$  — оба корня отрицательные**Проверь себя!**

Решите уравнения по формулам Виета.

1.  $x^2 - 20x + 19 = 0$

2.  $x^2 + 8x - 9 = 0$

3.  $x^2 + 12x + 20 = 0$

*Ответ:* 1). 1; 19; 2).  $-9; 1$ ; 3).  $-2; -10$ .**Полезный совет.** При решении уравнений  $x^2 + px + q = 0$  проверьте сумму коэффициентов  $1 + p + q$ ; если эта сумма равна нулю, то один корень равен 1, а второй корень равен  $q$ .*Например,*  $x^2 - 7x + 6 = 0$ . Имеем  $1 - 7 + 6 = 0$ , тогда  $x_1 = 1; x_2 = q = 6$ . Проверьте с помощью обратной теоремы Виета:  $x_1 + x_2 = -p = +7$ ;  $x_1 \cdot x_2 = 6$ .**Алгоритм****86****Составление квадратных уравнений по его корням***Применение теоремы, обратной теореме Виета*

1. Запишите квадратное уравнение в общем виде  $x^2 + px + q = 0$ .
2. Найдите  $p$  и  $q$ :  $p = -(x_1 + x_2)$ ;  $q = x_1 \cdot x_2$ .
3. Подставьте в уравнение  $x^2 + px + q = 0$  найденные числа  $p$  и  $q$ .

**Примеры**

1. Запишите приведенное квадратное уравнение, имеющее корни  $x_1 = -1; x_2 = 5$ .



Решение.

1).  $x^2 + px + q = 0$ ;  $p = -(-1 + 5) = -4$

2).  $q = -1 \cdot 5 = -5$

3).  $x^2 - 4x - 5 = 0$

Ответ:  $x^2 - 4x - 5 = 0$ .

$p = -(x_1 + x_2)$

$x_1 \cdot x_2 = q$

$x^2 + px + q = 0$

2. Не вычисляя корней  $x_1$  и  $x_2$  уравнения  $3x^2 - 8x - 15 = 0$ , найдите:

1).  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ ; 2).  $x_1^2 + x_2^2$ ; 3).  $x_1^3 + x_2^3$ .

Решение.

Подставьте  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ;  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$  в полученные выражения.

1).  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_2 \cdot x_1} = \frac{8}{3 \cdot (-5)} = -\frac{8}{15}$

$a = 3$ ;  $b = -8$ ;  $c = -15$

2).  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-8}{3} = \frac{8}{3}$

$x_1^2 + x_2^2 = \frac{64}{9} - 2 \cdot (-5)$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{15}{3} = -5$

$x_1^2 + x_2^2 = 17\frac{1}{9}$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$   
 $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

3).  $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2 \cdot (x_1 + x_2)$

$(x_1 + x_2)^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}$

$x_1^3 + x_2^3 = \left(\frac{8}{3}\right)^3 - 3 \cdot (-5) \cdot \frac{8}{3} =$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= \frac{512}{27} + 40 = 18\frac{26}{27} + 40 = 58\frac{26}{27}$

$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

Ответ: 1).  $-\frac{8}{15}$ ; 2).  $17\frac{1}{9}$ ; 3).  $58\frac{26}{27}$ .

3. Составьте уравнение по его корням:  $x_1 = \sqrt{3}$ ;  $x_2 = \sqrt{2}$  и проверьте, правильно ли оно составлено, решив полученное уравнение.

Решение.

1).  $p = -(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

2).  $q = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$

3).  $x^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$

$p = -(x_1 + x_2)$

$x^2 + px + q = 0$



Проверьте, правильно ли составлено уравнение, решив его, применяя формулы:

$$\begin{aligned}
 x_{1,2} &= \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \pm \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{6}}}{2} = \\
 &= \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \pm \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{6} + (\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{6}}}{2} = \\
 &= \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \pm \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}}{2} = \\
 &= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} \pm |\sqrt{3} - \sqrt{2}|}{2} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} \pm (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{2} \\
 x_1 &= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}; \\
 x_2 &= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$x^2 + px + q = 0; p = -(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

$$q = \sqrt{6}; x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 &(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{6} + (\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{6} = \\
 &= (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6} + (\sqrt{2})^2 = \\
 &= (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2
 \end{aligned}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\sqrt{a^2} = |a|; \sqrt{3} > \sqrt{2}$$

$$|a| = a, \text{ если } a \geq 0$$

Получили заданные числа, значит, уравнение составлено верно.

### Проверь себя!

Решите уравнение, применяя формулу  $a + b + c = 0 \left( x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a} \right)$ .

1.  $2x^2 - 3x + 1 = 0$       2.  $3x^2 + 4x - 7 = 0$       3.  $x^2 - 7x + 6 = 0$

Ответ: 1).  $1; \frac{1}{2}$ ; 2).  $1; -\frac{7}{3}$ ; 3).  $1; 6$ .

Решите уравнение по формулам Виета:

1.  $x^2 + 11x + 10 = 0$       2.  $x^2 - 15x + 56 = 0$

Ответ: 1).  $-10; -1$ ; 2).  $7; 8$ .

Составьте квадратное уравнение по его корням:

1.  $x_1 = -3; x_2 = 7$       2.  $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = \frac{1}{3}$       3.  $x_1 = 2; x_2 = \sqrt{2}$

Ответ:

1).  $x^2 - 4x - 21 = 0$ ; 2).  $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0$ ; 3).  $x^2 - (2 + \sqrt{2})x + 2\sqrt{2} = 0$ .



## Исследование решений квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Исследовать решение квадратного уравнения — значит определить наличие корней и их количество.

Рассмотрим формулу корней квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Решение уравнения зависит от знака дискриминанта  $D = b^2 - 4ac$ .

I	Если $D > 0$ , $a \neq 0$	то $x_1 \neq x_2$	два корня
II	Если $D = 0$ , $a \neq 0$	то $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	один корень
III	Если $D < 0$ , $a \neq 0$	то нет действительных корней	$\emptyset$

### З а м е ч а н и я

1.  $\sqrt{D}$  имеет смысл, если  $D \geq 0$ ; если  $D < 0$ , то  $\sqrt{D}$  не имеет смысла среди чисел  $R$ .

2. Если  $D = 0$  и  $a \neq 0$ , то  $ax^2 + bx + c$  — полный квадрат.

Например:  $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$

## Квадратные уравнения с параметром

**Определение.** Уравнение, которое, кроме неизвестной  $x$ , содержит другие буквы, обозначающие числа, называется уравнением с параметром.

Например, в уравнении  $kx^2 + 2x + k = 0$  буква  $k$  — параметр

Алгоритм

87

Исследование решений квадратного уравнения, содержащего параметр

Исследовать решение квадратного уравнения с параметром — значит установить, при каких значениях параметра уравнение имеет один корень, или два корня, или не имеет решения.

1. Выпишите коэффициенты, заданные числами и буквами:  $a = \dots$ ;

$b = \dots$ ;  $c = \dots$ .



2. Запишите за чертой формулу дискриминанта:

$$D = b^2 - 4ac \text{ (если } b \text{ — нечетное)}$$

$$D_1 = k^2 - ac \text{ (если } b \text{ — четное), } k = \frac{b}{2}$$

3. Если в задании требуется найти такое значение параметра, при котором:

I	уравнение имеет два различных корня, то решите неравенство $D > 0$ ; $a \neq 0$ ; $b^2 - 4ac > 0$
II	уравнение имеет один корень, то а) решите уравнение $D = 0$ ; $a \neq 0$ ; $b^2 - 4ac = 0$ б) если $a = 0$ и $b \neq 0$ , то решите линейное уравнение и найдите $x = -\frac{c}{b}$
III	уравнение не имеет корней, то: 1) решите неравенство $D < 0$ ; $a \neq 0$ ; $b^2 - 4ac < 0$ ; 2) при $a = b = 0$

Ответ запишите полностью.

### Примеры

1. При каких значениях параметра  $m$  уравнение  $mx^2 + 4x - 1 = 0$  имеет два различных корня?

Решение.

$$\begin{array}{l} 1). a = m \neq 0; b = 4; c = -1 \\ 2). D_1 = 4 + 1m, D_1 > 0 \\ 3). \begin{cases} 4 + m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} m > -4 \\ m \neq 0 \end{cases} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0; b = 4 \text{ — четное; } k = \frac{b}{2} = 2 \\ D_1 = k^2 - ac = 2^2 + 1m \\ \text{Если } D > 0, \text{ то } x_1 \neq x_2; a \neq 0 \end{array} \right.$$

Ответ: при  $m \in (-4; 0) \cup (0; +\infty)$  уравнение имеет два корня.

Проверим, так ли это. Возьмем любое значение  $m$  из ответа, например  $m = -3$ , получим  $-3x^2 + 4x - 1 = 0$ .

$-3x^2 + 4x - 1 = 0 \quad | \cdot (-1); 3x^2 - 4x + 1 = 0; D_1 = 4 - 3 = 1; 1 > 0$ , значит, уравнение имеет два корня.

2. ГИА. 1). При каких значениях  $k$  уравнение  $16x^2 + kx + 1 = 0$  не имеет корней? 2). Имеет ли уравнение корни при  $k = 0,03$ ; при  $k = -20,4$ ?



Решение.

1.  $16x^2 + kx + 1 = 0$

1).  $a = 16; b = k; c = 1$

2).  $D = k^2 - 4 \cdot 16 \cdot 1 = k^2 - 64$

3). Решите неравенство  $D < 0$ ;  
 $k^2 - 64 < 0$ ;  $k^2 < 64$  извлеките  
корень из каждой части не-  
равенства  $|k| < 8$ ;  $-8 < k < 8$ 

$ax^2 + bx + c = 0$

$D = b^2 - 4ac$

нет корней  $D < 0$  (III случай)

$\sqrt{a^2} = |a|$

 $|x| < m$ ;  $-m < x < m$  или решите

неравенство  $(k-8)(k+8) < 0$

При  $k \in (-8; 8)$  нет корней.2. При  $k = 0,03$  уравнение не имеет корней, так как  $0,03 \notin (-8; 8)$ .При  $k = -20,4$  уравнение имеет корни, так как  $-20,4 \notin (-8; 8)$ .**Ответ:** при  $k \in (-8; 8)$  уравнение не имеет корней; при  $k = 0,03$  уравнение не имеет корней; при  $k = -20,4$  уравнение имеет два корня.3. При каких значениях  $m$  уравнение  $x^3 + 6x^2 + mx = 0$  имеет два корня?

Решение.

1). Вынесем  $x$  за скобки:  $x(x^2 + 6x + m) = 0$  |  $a \cdot b = 0$ ;  $a = 0$  или  $b = 0$

2).  $x_1 = 0$ , так как требуется найти два корня, то уравнение  $x^2 + 6x + m = 0$  может иметь только один корень.Случай II.  $x^2 + 6x + m = 0$  имеет один корень, если  $a \neq 0$  и  $D = 0$ .

$D_1 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 - m = 3^2 - m = 9 - m$

$a = 1 \neq 0$ ;  $p = 6$ ;  $q = m$

$D_1 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

$9 - m = 0$  |  $D = 0$

$m = 9$

3). Получим уравнение  $x^2 + 6x + 9 = 0$  — это  $(x+3)^2 = 0$ ;  $x = -3$ .**Ответ:**  $m = 9$ ;  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = -3$ .**Проверь себя!**ГИА. При каких значениях  $k$  уравнение  $kx^2 - 5x + \frac{1}{4}k = 0$  имеет два корня? Запишите пример такого уравнения.**Ответ:** если  $k \in (-5; 0) \cup (0; 5)$ , то уравнение имеет два корня.Пример уравнения: пусть  $k = 2$ ;  $2x^2 - 5x + \frac{1}{2} = 0$



**Попробуй-ка реши!**

1. При каких целых значениях  $m$  уравнение  $(m-7)x^2 + 2(m-7)x + 3 = 0$  не имеет действительных корней?
2. Найти все значения  $a$ , при которых корни уравнения  $ax^2 + 2(a+3)x + a + 2 = 0$  неотрицательны.

Ответ: 1).  $m = 7; 8; 9$ ; 2).  $-2\frac{1}{4} \leq a \leq -2$ .

**Алгоритм****88****Разложение трехчлена  $ax^2 + bx + c$  на множители**

- Решите квадратное уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  или  $x^2 + px + q = 0$ :
  - если нет действительных корней ( $D < 0$ ), то трехчлен нельзя разложить на множители
  - если корни равные ( $D = 0$ ), т. е.  $x_1 = x_2 = x_0$ , тогда  $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 = a(x - x_0)(x - x_0)$ ;  $x^2 + px + q = (x - x_0)^2$
  - если корни разные ( $D > 0$ )  $x_1 \neq x_2$ , то перейдите к п. 2
- Подставьте  $x_1$  и  $x_2$  в формулу  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$  (I) или в формулу  $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$  (II).

**Примеры**

1. Разложите на множители трехчлен  $2x^2 - 3x + 1$ .

$$1). D = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4}; x_1 = 1; x_2 = \frac{1}{2}$$

$$2). 2x^2 - 3x + 1 = 2(x - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x - 1)(2x - 1)$$

$$\text{Ответ: } 2x^2 - 3x + 1 = (x - 1)(2x - 1).$$

$$a = 2; b = -3; c = 1$$

Если  $D > 0$ , то  $x_1 \neq x_2$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = 2x - 1$$



**З а м е ч а н и е.** Разложение на множители используется при сокращении дробей и для приведения дробей к общему знаменателю.

2. Сократите дробь  $\frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ .

*Решение.*

Разложите числитель на множители и сократите дробь:

$$\frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x - (-2))}{x - 1} = x + 2$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + x - 2 = 0 \\ \begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 \cdot x_2 = -2 \end{cases} \mid \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{array} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) \end{array}$$

Ответ:  $x + 2$ .

3. ГИА. Сократите дробь  $\frac{3x^2 - 2x}{6 - 7x - 3x^2}$ .

*Решение.*

$$\frac{3x^2 - 2x}{6 - 7x - 3x^2} = \frac{x(3x - 2)}{-3x^2 - 7x + 6} = \frac{x(3x - 2)}{-3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x + 3)} = \frac{x(3x - 2)}{-(3x - 2)(x + 3)} = -\frac{x}{x + 3}$$

$$\left. \begin{array}{l} -3x^2 - 7x + 6 = 0 \mid \cdot (-1) \\ 3x^2 + 7x - 6 = 0 \\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \\ x_{1,2} = \frac{-7 \pm 11}{6} \\ x_1 = \frac{-7 + 11}{6} = \frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{-7 - 11}{6} = -3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 7 \\ c = -6 \\ D = b^2 - 4ac; \\ D = 49 + 72 = \\ = 121 = 11^2 \end{array}$$

**Внимание!** Знак числа  $a$  остается перед скобкой, а число 3 умножаем на

первую скобку  $\left(x - \frac{2}{3}\right)$ .

Ответ:  $-\frac{x}{x + 3}$ .

4. ГИА. Упростите выражение  $\left(\frac{a}{a^2 - 2a + 1} - \frac{a + 2}{a^2 + a - 2}\right) : \frac{1}{(2a - 2)^2}$ .

*Решение.*

1). Разложим на множители знаменатели:

$$\left(\frac{a}{(a - 1)^2} - \frac{a + 2}{(a - 1)(a + 2)}\right) : \frac{1}{(2(a - 1))^2} = \left. \begin{array}{l} a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2 \text{ — } \\ \text{полный квадрат} \end{array} \right\}$$



2). Приведем дроби к общему знаменателю:

$$= \left( \frac{a}{(a-1)(a-1)} - \frac{1}{(a-1)} \right) : \frac{1}{4(a-1)^2} =$$

$$= \frac{a - (a-1)}{(a-1)(a-1)} : \frac{1}{4(a-1)^2} = \frac{1}{(a-1)^2} : \frac{1}{4(a-1)^2} =$$

3). Разделим дроби:  $= \frac{1 \cdot 4(a-1)^2}{(a-1)^2} = 4$

$$a^2 + a - 2 = (a-1)(a+2)$$

$$a^2 + a - 2 = 0$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = -1 \\ a_1 \cdot a_2 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = -2 \end{cases}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

$$a - (a-1) = a - a + 1 = 1$$

Ответ: 4.

### Проверь себя!

Упростите выражение  $\frac{7}{5x^2 + 3x - 2} - \frac{5}{5x - 2}$ .

Ответ:  $-\frac{1}{x+1}$ .

### Алгоритм

89

### Решение биквадратных уравнений

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

1. Введите замену:  $x^2 = t$ ,  $t > 0$ .
2. Подставьте вместо  $x^2 = t$ , а вместо  $x^4 = t^2$  в уравнение и запишите квадратное уравнение относительно  $t$ :  $at^2 + bt + c = 0$ .
3. Решите уравнение  $at^2 + bt + c = 0$ . При решении может получиться:
  - 1)  $t_1 = t_2 > 0$
  - 2)  $t_1 = t_2 < 0$
  - 3)  $t_1 \neq t_2$ ;  $t_1 > 0$  и  $t_2 > 0$
  - 4)  $t_1 \neq t_2$ ;  $t_1 < 0$  и  $t_2 < 0$
  - 5)  $t_1 \neq t_2$ ;  $t_1 > 0$  и  $t_2 < 0$
4. Решите уравнение:  $x^2 = t$ , если  $t > 0$ , то  $x = \pm\sqrt{t}$ . Могут получиться 3 случая решения уравнения  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ :
  - 1) два корня п. 3 (1); п. 3 (5)
  - 2) четыре корня п. 3 (3)
  - 3) нет корней п. 3 (4)
5. Ответ запишите числами или пустым множеством  $\emptyset$ .



### Пример

ГИА. Решите уравнение  $2x^4 - 19x^2 + 9 = 0$ .

Решение.

1). Пусть  $x^2 = t$ ,  $t > 0$ , тогда  $x^4 = t^2$

2). Подставьте  $t$  и  $t^2$  в уравнение вместо  $x^2$  и  $x^4$ :  $2t^2 - 19t + 9 = 0$

3). Решите уравнение  $2t^2 - 19t + 9 = 0$

$$D = (-19)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 361 - 72 = 289 = 17^2$$

$$t_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{289}}{4} = \frac{19 \pm 17}{4}$$

$$t_1 = \frac{19 + 17}{4} = \frac{36}{4} = 9; t_1 > 0$$

$$t_2 = \frac{19 - 17}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; t_2 > 0$$

4 корня

$$at^2 + bt + c = 0$$

$$a = 2; b = -19; c = 9$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

4). Решите уравнения:  $x^2 = 9$ ;  $x^2 = \frac{1}{2}$ .

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{9} = \pm 3; x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \left| \quad \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \right.$$

$$\text{Ответ: } -3; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 3.$$

### Проверь себя!

ГИА. Решите уравнение  $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ .

Ответ:  $-2; 2$ .

Алгоритм

90

Решение уравнений, сводящихся к квадратным уравнениям

1. Обозначьте повторяющееся в уравнении выражение  $f(x)$  буквой  $t$ .
2. Подставьте в исходное уравнение замену  $f(x) = t$  и запишите полученное уравнение относительно  $t$ :  $at^2 + bt + c = 0$ .



3. Решите уравнение и найдите корни  $t_1, t_2$ , если они есть. Если корней нет, то и заданное уравнение не имеет корней.
4. Решите уравнения  $f(x) = t_1$  и  $f(x) = t_2$  (если  $t_1 = t_2 = t_0$ , то решите уравнение  $f(x) = t_0$  и найдите  $x$ ).  
 Ответ запишите числами.

### Примеры

Решите уравнение.

1. ГИА.  $(x^2 - 5x)(x^2 - 5x + 10) + 24 = 0$ .

Решение.

1). Пусть  $x^2 - 5x = t$ , тогда  $(x^2 - 5x + 10) = t + 10$

2). Получим уравнение относительно  $t$ :

$$t(t + 10) + 24 = 0$$

$$t^2 + 10t + 24 = 0$$

3).  $t_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 - 24} = -5 \pm 1$

$$t_1 = -6; t_2 = -4$$

4). Решите уравнения:

а)  $x^2 - 5x = -6$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} =$$

$$= \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = 3; x_2 = 2$$

Ответ: 1; 2; 3; 4.

б)  $x^2 - 5x = -4$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} =$$

$$= \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x_3 = 4; x_4 = 1$$

$$t^2 + pt + q = 0$$

$$p = -10 = t_1 + t_2 \quad t_1 = -6$$

$$q = 24 = t_1 \cdot t_2 \quad t_2 = -4$$

или по формуле:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Можно решать

по формулам Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 & x_1 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = 6 & x_2 = 2 \end{cases}$$

2. ГИА.  $\left(2 - \frac{x^2 + 2x}{3}\right)\left(4 - \frac{x^2 + 2x}{3}\right) = 3$ .

Решение.

1). Пусть  $\frac{x^2 + 2x}{3} = t$

2). Получите уравнение относительно  $t$ :  $(2 - t)(4 - t) = 3$



3). Решите уравнение:

$$8 - 4t - 2t + t^2 - 3 = 0$$

$$t^2 - 6t + 5 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 6 \\ t_1 \cdot t_2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = 5 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

$$t^2 + pt + q = 0$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -p \\ t_1 \cdot t_2 = q \end{cases}$$

4). Решите уравнения  $\frac{x^2 + 2x}{3} = 5$  и  $\frac{x^2 + 2x}{3} = 1$ :

а)  $\frac{x^2 + 2x}{3} = 5 \quad | \cdot 3$

$$x^2 + 2x = 15$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 15} = -1 \pm 4$$

$$x_1 = 3; x_2 = -5$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

б)  $\frac{x^2 + 2x}{3} = 1 \quad | \cdot 3$

$$x^2 + 2x = 3$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = -2 \\ x_3 \cdot x_4 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -3; x_4 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = -p \\ x_3 \cdot x_4 = q \end{cases}$$

Ответ: -5; -3; 3; 1.

3.  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0.$

Решение.

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0 \quad \text{ОО: } x \in \mathbb{R}; x \neq 0$$

1). Обозначьте  $x + \frac{1}{x} = t$ , тогда получите:  $t^2 - 5t + 6 = 0$ 

2). Решите уравнение по теореме, обратной теореме Виета:

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$t^2 + pt + q = 0$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 5 \\ t_1 \cdot t_2 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -p \\ t_1 \cdot t_2 = q \end{cases}$$



3). Решите уравнения  $x + \frac{1}{x} = 2$  и  $x + \frac{1}{x} = 3$ :

а)  $x + \frac{1}{x} = 2 \quad | \cdot x$

$$x + \frac{1}{x} = 2 \quad | \cdot x$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x_1 = 1$$

б)  $x + \frac{1}{x} = 3 \quad | \cdot x$

$$x + \frac{1}{x} = 3 \quad | \cdot x$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}; \quad x_3 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$x^2 + px + q = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

$$p = -3; q = 1$$

Ответ:  $1; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ .

**З а м е ч а н и е.** Введение новой переменной и приведение к квадратному уравнению применимо к решению тригонометрических, логарифмических и показательных уравнений.

**Попробуй не реши!**

$$(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$$

Ответ: 1; 2; 3; 4.

**Попробуй-ка реши!**

$$1. \quad x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$2. \quad (x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 1680$$

**У к а з а н и е.** К заданию 1. Разделите обе части уравнения на  $x^2 \neq 0$

и введите замену  $x + \frac{1}{x} = t$ .

К заданию 2. Перемножьте  $(x-4)(x-7)$  и  $(x-5)(x-6)$ .

Ответ: 1).  $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}; 2 \pm \sqrt{3}; 2).$  -1; 12.



## § 4.

## Дробно-рациональные уравнения

**Определение 1.** Уравнение, в котором левая и правая части являются рациональными целыми выражениями, называется *целым рациональным*.

Условно:  $F(x) = 0$ ;  $F(x) = P(x)$ , где  $F(x)$  и  $P(x)$  — многочлены

$$\text{Например: } \left. \begin{array}{l} 3x - 2 = 2x + 3 \\ x^2 - 2x = 0 \\ \frac{1}{2}x = 1,5x - 2 \end{array} \right\} \text{ целые рациональные уравнения}$$

Целые рациональные выражения содержат числа и переменные, над которыми выполняются действия сложения, вычитания, умножения и возведения в натуральную степень.

$$\text{Например: } 2x^2y; a^2 - b^2; a^5 - \frac{5}{7}b$$

**Определение 2.** Рациональное уравнение, содержащее дробное выражение, знаменатель которого многочлен с неизвестным, называется *дробным*.

Условно:  $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$  — дробно-рациональное уравнение, где  $P(x)$  и  $Q(x)$  — многочлены

$$\text{Например: } \frac{2x-1}{x+7} = \frac{3x+4}{x-1}; \frac{5}{x} = 2x+3; \frac{12}{7-y} = y$$

### Алгоритм

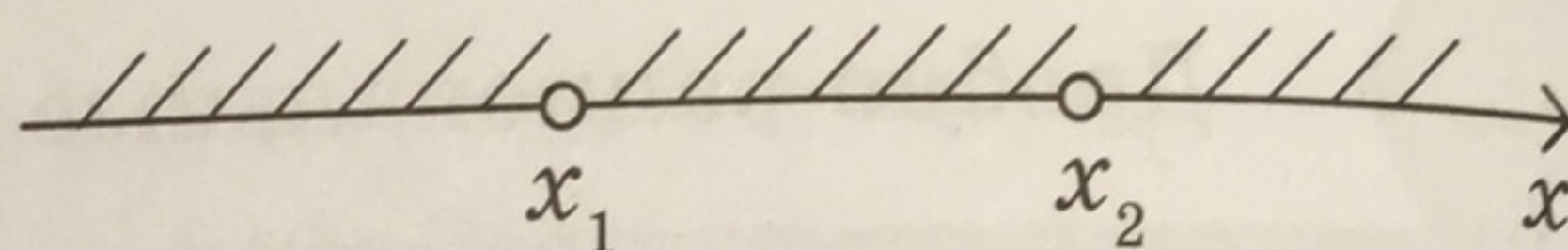
91

### Решение дробно-рациональных уравнений $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$

1. Найдите общий знаменатель дробей (ОЗ) — НОК знаменателей (за чертой).
2. Найдите ОДЗ (область допустимых значений) неизвестной:
  - 1) Решите уравнение  $Q(x) = 0$ .
  - 2) Исключите корни уравнения п. 1 из множества действительных чисел.



3) Изобразите ОДЗ на оси:

4) Запишите ОДЗ промежутками:  $(-\infty; x_1) \cup (x_1; x_2) \cup (x_2; +\infty)$ .

3. Умножьте каждый член уравнения на ОЗ (запишите ОЗ в числитель каждой дроби) и сократите дроби на их знаменатели.
4. Запишите целое уравнение, не раскрывая скобок в числителе (чтобы не сделать ошибку в знаке!).
5. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые.
6. Решите полученное целое уравнение.
7. Согласуйте полученные корни с ОДЗ (наглядно на оси см. п. 3).
8. Запишите в ответ отобранные в п. 7 корни.

**З а м е ч а н и е.** Можно, не находя ОДЗ, сделать проверку всех корней.

### Примеры

Решите уравнения (1–2).

1. ГИА.  $\frac{x}{x-2} - \frac{7}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$ .

*Решение.*

1). ОЗ:  $(x-2)(x+2)$

2). ОДЗ:  $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$

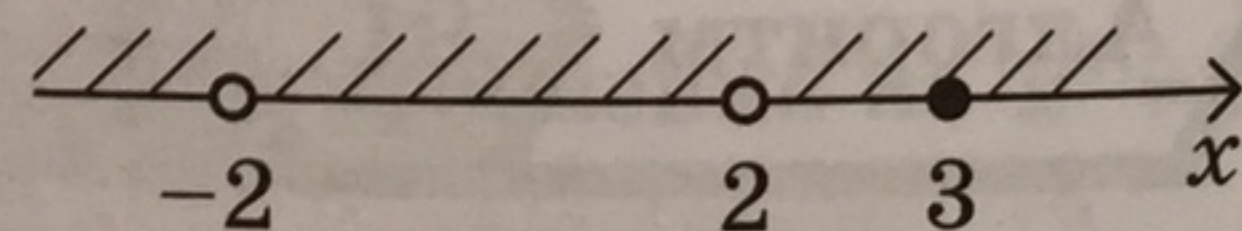
3).  $\frac{x}{x-2} - \frac{7}{x+2} = \frac{8}{x^2-4} \quad | \cdot (x-2)(x+2)$

$$\begin{array}{l|l} x-2 & x+2 \\ x+2 & x-2 \\ x^2-4 & (x-2)(x+2) \end{array}$$

ОЗ:  $(x-2)(x+2)$

ОДЗ:  $(x-2)(x+2) \neq 0$

$x \neq 2$  или  $x \neq -2$



4).  $\frac{x(x-2)(x+2)}{x-2} - \frac{7(x-2)(x+2)}{x+2} = \frac{8(x^2-4)}{x^2-4}$

5).  $x(x+2) - 7(x-2) = 8$

$x^2 + 2x - 7x + 14 - 8 = 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x^2 + px + q = 0$



$$6). \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = 6 \end{cases} \quad x_1 = 2; x_2 = 3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \\ x \neq -2; x \neq 2 \end{cases}$$

7). Согласуйте корни с ОДЗ:

$$2 \notin (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty); \quad 3 \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$$

Ответ: 3.

$$2. \text{ ГИА. } \frac{6}{x^2 - 4x + 3} - \frac{13 - 7x}{1 - x} = \frac{3}{x - 3}.$$

Решение.

$$1). \text{ ОЗ: } (x - 3)(x - 1)$$

$$2). \text{ ОДЗ: } (-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$$

$$3). \frac{6(x-3)(x-1)}{(x-3)(x-1)} + \frac{(13-7x)(x-3)(x-1)}{x-1} = \frac{3(x-3)(x-1)}{x-3}$$

$$4). 6 + (13 - 7x)(x - 3) = 3(x - 1)$$

$$5). 6 + 13x - 7x^2 - 39 + 21x - 3x + 3 = 0 \\ -7x^2 + 31x - 30 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$6). 7x^2 - 31x + 30 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{31 \pm \sqrt{121}}{14} = \frac{31 \pm 11}{14}$$

$$x_1 = \frac{31 + 11}{14} = \frac{42}{14} = 3;$$

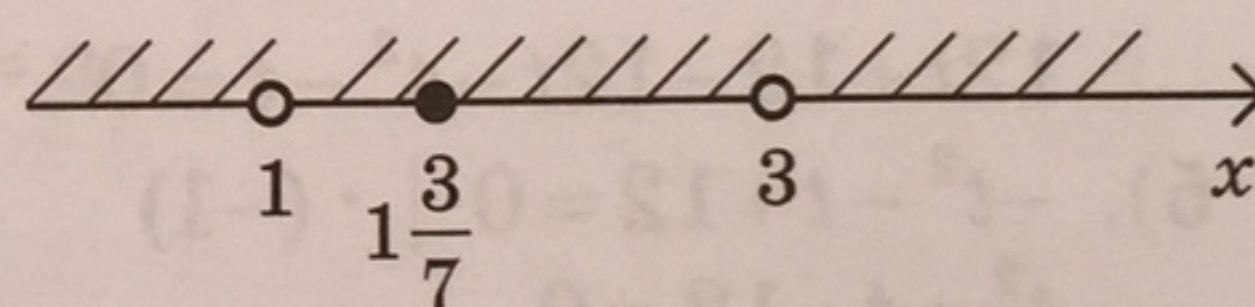
$$x_2 = \frac{31 - 11}{14} = \frac{20}{14} = 1\frac{3}{7}$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 - 4x + 3 = & x^2 - px + q = \\ = (x-3)(x-1) & = (x-x_1)(x-x_2) \\ \hline \begin{cases} x_1 + x_2 = -p = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = q = 3 \end{cases} & \begin{cases} x_1 = 3; x_2 = 1 \\ -(x-3) \\ x-1 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{ОЗ: } (x-3)(x-1)$$

$$\text{ОДЗ: } (x-3)(x-1) = 0$$

$$x = 3 \text{ или } x = 1$$



$$x \neq 3; x \neq 1$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 961 - 840 = 121;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

7). Согласуйте корни с ОДЗ:

$$3 \notin (-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty); \quad 1\frac{3}{7} \in (-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$$

Ответ:  $1\frac{3}{7}$ .

**Полезные советы.** 1. Чтобы в знаменателе или числителе дроби

поменять знак, надо изменить знак и перед дробью:  $+\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} = +\frac{-a}{b}$ .



2. Если один из членов уравнения число или целое выражение, то на него также умножается ОЗ.

3. ГИА.  $\frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{12}$ .

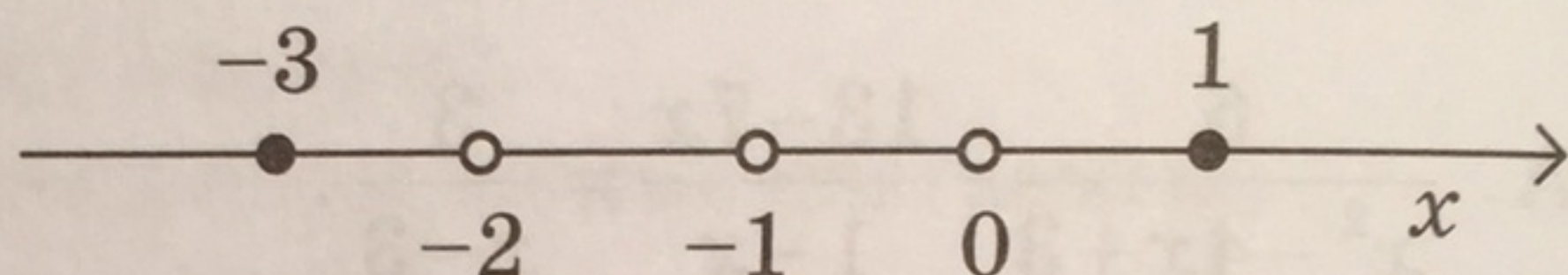
Решение.

1). ОДЗ:

$$x(x+2) \neq 0$$

$$(x+1)^2 \neq 0$$

$$x \neq 0; x \neq -2; x \neq -1$$



$$(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$$

2) Раскроем скобки в знаменателях:  $x(x+2)$  и  $(x+1)^2$

3).  $\frac{1}{x^2+2x} - \frac{1}{x^2+2x+1} = \frac{1}{12}$

Примем  $x^2+2x=t$

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} = \frac{1}{12} \quad | \cdot 12t \cdot (t+1) \neq 0$$

4).  $\frac{12t(t+1)}{t} - \frac{12t(t+1)}{t+1} = \frac{12t(t+1)}{12}; \quad 12(t+1) - 12t = t(t+1);$

$$12t+12-12t-t^2-t=0$$

5).  $-t^2-t+12=0 \quad | \cdot (-1)$   
 $t^2+t-12=0$

$$\begin{cases} t_1+t_2=-1 \\ t_1 \cdot t_2=-12 \end{cases} \quad t_1=-4; \quad t_2=3$$

6). Подставим значение  $t_{1,2}$  в замену:

а)  $x^2+2x=-4; x^2+2x+4=0; D=1-4<0$  — корней нет

б)  $x^2+2x=3; x^2+2x-3=0$

$x_1=-3; x_2=1$ . Проверка на оси

$$\begin{cases} x_1+x_2=-2 \\ x_1 \cdot x_2=-3 \end{cases} \quad x_1=-3; \quad x_2=1$$

Ответ: -3; 1.

**Проверь себя!**

1. ГИА. Решите уравнение  $\frac{1}{x+6} + \frac{7}{x-3} = \frac{5}{x-6}$ .

2. ГИА. Решите уравнение  $\frac{1}{2-x} - 1 = \frac{1}{x-2} - \frac{6-x}{3x^2-12}$ .

Ответ: 1). 12; -4; 2). -3;  $\frac{2}{3}$ .



## § 5.

## Решение иррациональных уравнений

**Определение.** Уравнение, в котором неизвестная стоит под знаком корня или возведена в дробную степень, называется иррациональным.

Например:  $\sqrt{x} = 5 - x$ ;  $\sqrt{10 - x} = x - 4$ ;  $x^{\frac{2}{3}} = 4$  — иррациональные уравнения

## Алгоритм

## 92

## Решение иррациональных уравнений

## I способ решения иррациональных уравнений

1. Перенесите корень (если он один) в ту часть уравнения, где он будет с плюсом, а остальные члены уравнения перенесите в другую часть, изменив их знак на противоположный.

Например:  $x - \sqrt{x - 2} = 4$ ;  $x - 4 = +\sqrt{x - 2}$

2. Если уравнение имеет более двух корней, то см. Полезный совет. Возведите обе части уравнения в квадрат.

Например:  $(x - 4)^2 = (\sqrt{x - 2})^2 \mid (\sqrt{a})^2 = a$   
 $(x - 4)^2 = x - 2$

3. Раскройте скобки, перенесите члены в левую часть, приведите подобные слагаемые и решите полученное уравнение (квадратное или линейное).

Например:  $x^2 - 8x + 16 - x + 2 = 0$

$$\begin{array}{l} x^2 - 9x + 18 = 0 \\ x_1 = 3; x_2 = 6 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 9 \\ x_1 \cdot x_2 = 18 \end{array} \right.$$

4. Сделайте проверку всех корней уравнения п. 3 (подставьте каждый корень в заданное уравнение).

Например, в уравнении  $x - \sqrt{x - 2} = 4$  проверим корни  $x_1 = 3$  и  $x_2 = 6$ :

1)  $x_1 = 3$ ;  $3 - \sqrt{3 - 2} = 4$ ;  $3 - 1 = 4$  — неверно;  $x_1 = 3$  — не является корнем уравнения

2)  $x_2 = 6$ ;  $6 - \sqrt{6 - 2} = 4$ ;  $6 - 2 = 4$  — верно;  $x_2 = 6$  — является корнем

5. В ответ запишите те корни п. 4, при которых получили верное равенство.

Например, ответ: 6.



# Примеры

1. ГИА. Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения  $\sqrt{x^2 - 24} = 5$ .

1).  $(-8; 8)$     2).  $(5; +\infty)$     3).  $(-\infty; -5)$     4).  $(-6; -6)$

*Решение.* Начинаем с п. 2 алгоритма.

- 1). Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$(\sqrt{x^2 - 24}) = 5^2 \quad | \quad (\sqrt{a})^2 = a; \quad x^2 - 24 = 25$$

- 2). Решите уравнение  $x^2 = 49$ :

$$|x| = 7; x_1 = -7; x_2 = 7 \quad | \quad \sqrt{x^2} = |x|$$

- 3). Проверка:

$$\sqrt{(\pm 7)^2 - 24} = \sqrt{49 - 24} = \sqrt{25} = 5$$

Получили  $5 = 5$  — истина,  $-7$  и  $7$  — корни уравнения.

- 4). Корни  $-7$  и  $7$  входят в промежуток  $(-8; 8)$ .

*Ответ:* верный ответ 1).

2. Решите уравнение  $x^{\frac{2}{3}} = 4$ .

*Решение.*

$$\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 4^3$$

$$x^2 = 2^6; x = \pm \sqrt{2^6}$$

$$x_1 = 2^3 = 8; x > 0$$

$$x_2 = -2^3 = -8$$

*Ответ:* 8.

$$\text{ОДЗ: } x > 0$$

Возведем в куб обе части уравнения:

$$\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3 = x^{\frac{2 \cdot 3}{3}} = x^2$$

$$4^3 = (2^2)^3 = 2^6; a^{mn} > 0; a > 0$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$x^2 = a; x = \pm \sqrt{a}$$

*Внимание!* При решении уравнения  $x^{\frac{m}{n}} = a$  учтите, что и  $x^{\frac{m}{n}} > 0$ .

3. Решите уравнение  $x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 4 = 0$ .

*Решение.*

$$\text{Пусть } x^{\frac{1}{3}} = y > 0; x^{\frac{2}{3}} = y^2$$

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

$$y_1 = 4;$$

$$y_2 = -1 \text{ — не может быть}$$

$$x^{\frac{m}{n}} > 0; x > 0$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 3 \\ y_1 \cdot y_2 = -4 \end{cases} \quad \left| \quad y_1 = 4; y_2 = -1 \right.$$



$$x^{\frac{1}{3}} = 4$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3} = 4^{-3}; \quad x = \frac{1}{4^3}$$

Ответ:  $\frac{1}{64}$ .

Возведем в степень  $(-3)$  обе части уравнения:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$-\frac{1}{3} \cdot (-3) = 1; \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

4. Найдите сумму корней уравнения  $(2x-6) \cdot \sqrt{-x^2+2x} = 0$ .

Решение.

1).  $\begin{cases} (2x-6) = 0 \\ \sqrt{-x^2+2x} \end{cases}$  — имеет смысл

или

2).  $\begin{cases} \sqrt{-x^2+2x} = 0 \\ (2x-6) \end{cases}$  — имеет смысл при любых  $x$

$$a \cdot b = 0,$$

если  $\begin{cases} a = 0 \\ b \end{cases}$  — имеет смысл

или  $\begin{cases} b = 0 \\ a \end{cases}$  — имеет смысл

а)  $\begin{cases} x = 3 \\ \sqrt{-9+6} = \sqrt{-3} \end{cases}$  — не имеет смысла, значит,  $x = 3$  не является корнем

б)  $\sqrt{-x^2+2x} = 0$ , если  $-x^2+2x = 0$ ;  $x(-x+2) = 0$ ;  $x = 0$  или  $x = 2$

Проверка:

$x_1 = 0$ ;  $(2 \cdot 0 - 6) \cdot \sqrt{0+0} = -6 \cdot 0 = 0$  — истина

$x_2 = 2$ ;  $(2 \cdot 2 - 6) \cdot \sqrt{-4+4} = -2 \cdot 0 = 0$  — истина

с)  $x_1 + x_2 = 0 + 2 = 2$

Ответ: 2.

**Попробуй не реши!** Решите уравнения.

1.  $\sqrt{23-x} = x-3$

2.  $\sqrt{8-4x} \cdot (3x-7) = 0$

Ответ: 1). 7; 2). 2.

**Попробуй-ка реши!**

1. Найдите сумму корней уравнения  $(x^2-36)\sqrt{4-x} = 0$ .

2. Решите уравнение  $\frac{5x-28}{\sqrt{-x^2+5x+6}} = 0$ .

Ответ: 1). -2; 2). 5,6.



**Полезный совет.** Если в уравнении два корня, то распределите их так, чтобы при возведении в квадрат в одной части уравнения получить выражение, не содержащее корня, и повторите второй раз возведение в квадрат. Покажем это на примере.

### Пример

Решите уравнение  $\sqrt{3x+4} - \sqrt{x+9} = 1$ .

*Решение.*

1). Перенесем корень с минусом вправо:  $\sqrt{3x+4} = 1 + \sqrt{x+9}$

2). Возведем в квадрат обе части:

$$\begin{array}{l|l} 3x+4 = (1+\sqrt{x+9})^2 & (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ 3x+4 = 1+2\sqrt{x+9}+x+9 & (\sqrt{a})^2 = a \end{array}$$

3). Уединим корень в правой части:

$$3x+4-1-x-9 = 2\sqrt{x+9}$$

$$2x-6 = 2\sqrt{x+9} \quad | :2 \quad x-3 = \sqrt{x+9}$$

4). Опять возведем в квадрат обе части уравнения:

$$(x-3)^2 = (\sqrt{x+9})^2; \quad x^2 - 6x + 9 = x + 9; \quad x^2 - 7x = 0; \quad x(x-7) = 0;$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 7$$

5). Проверка:  $x_1 = 0; \quad \sqrt{0+4} - \sqrt{0+9} = 1;$

$$2-3 \neq 1 \text{ — ложно, значит, } x \neq 0$$

$$x_2 = 7; \quad \sqrt{7 \cdot 3 + 4} - \sqrt{7+9} = 1; \quad \sqrt{25} - \sqrt{16} = 1;$$

$$5-4 = 1 \text{ — истина, значит, } x = 7 \text{ — корень}$$

*Ответ:* 7.

## II способ решения иррациональных уравнений

1. Перенесите корень в ту часть уравнения, где он будет с плюсом, чтобы получить уравнение вида  $\sqrt{f(x)} = y(x)$ , где  $y(x)$  — число или многочлен.

2. Решите систему неравенств:  $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ y(x) \geq 0 \end{cases}$ , используя определение

арифметического корня ( $\sqrt{a} = b$  — арифметический корень, если  $a \geq 0; b \geq 0$  и  $b^2 = a$ ).



3. Решите уравнение  $y^2(x) = f(x)$ .
4. Согласуйте полученные корни уравнения п. 3 с решением системы п. 2 на оси.
5. В ответ запишите те корни п. 4, которые удовлетворяют п. 2.

**З а м е ч а н и е.** При II способе решения проверка не нужна.

### Пример

Решите уравнение  $x = 4 - \sqrt{x-2}$ .

*Решение.*

$$1). \sqrt{x-2} = 4-x$$

$$2). \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 4 \end{cases} [2; 4]$$

$$3). \begin{aligned} (4-x)^2 &= x-2 \\ 16-8x+x^2 &= x-2 \\ x^2-9x+18 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = 6$$

$$4). 3 \in [2; 4]; \quad 6 \notin [2; 4]$$

Ответ: 3.

$\sqrt{f(x)} = y(x)$  — арифметический корень

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ y(x) \geq 0 \end{cases} \text{ и } y^2(x) = f(x)$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \\ x_1 \cdot x_2 = 18 \end{cases} \mid x_1 = 3; \quad x_2 = 6$$

### Проверь себя!

Решите уравнение  $\sqrt{x^2 + x - 6} = x - 1$ .

Ответ:  $\frac{7}{3}$ .

**Попробуй-ка реши!**

Решите уравнения.

$$1. \sqrt{7-x} + \sqrt{3x-5} = 4$$

$$2. \sqrt{x-4} - \sqrt{1-x} = 1$$

$$3. \sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = \sqrt{4x-7}$$

Ответ: 1). 3; 7; 2).  $\emptyset$ ; 3). 2.



## § 6.

Алгебраические уравнения  $n$ -й степени

$P_n(x) = \underbrace{a_0 x^n}_{\text{старший член}} + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + \underbrace{a_n}_{\text{свободный член}}$  — многочлен  $n$ -й степени  $n \in \mathbb{N}$

$P_0(x) = a_0$  ( $a_0 \neq 0$ ) — многочлен нулевой степени

0 — нулевой многочлен

$a_0; a_1; a_2 \dots a_n$  — известные числа

Если  $a_0 = 1$ , то многочлен называется приведенным:

$$Q_n(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n = 0$$

Например:

$P_5(x) = a_0 x^5 + a_1 x^4 + \dots + a_4 x^1 + a_5$  — многочлен 5-й степени

$Q_3(x) = x^3 + b_1 x^2 + \dots + b_2 x + b_3$  — многочлен 3-й степени

## Деление многочлена на двучлен и многочлен уголко

## Алгоритм

93

Деление многочлена  $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$  на двучлен  $(x - a)$

1. Разделите старший член многочлена  $a_0 x^n$  на  $x$ , получите  $a_0 x^{n-1}$ .
2. Умножьте одночлен  $a_0 x^{n-1}$  на  $(x - a)$  и запишите под многочленом.

Например:

$\begin{array}{r} -x^3 + x - 2 \\ x^3 - x^2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} x - 1 \\ \hline x^2 \end{array}$	$x^3 : x = x^2; \quad x^2(x - 1) = x^3 - x^2$
--	--	---

**З а м е ч а н и е.** При вычитании двучлена для удобства вычисления подписывайте у второго члена второй знак, полученный при вычитании:

Например: 
$$\begin{array}{r} -x^3 + x \\ x^3 \pm x^2 \end{array}$$

3. Вычтите из многочлена двучлен  $x^3 - x^2$ :

$\begin{array}{r} -x^3 + x - 2 \\ x^3 \pm x^2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} x - 1 \\ \hline x^2 \end{array}$	$(x^3 + x) - (x^3 - x^2) = x^3 + x - x^3 + x^2 = x^2 + x$
$\underbrace{x^2 + x}_{\text{первый остаток}}$	$x^2$	



4. Повторите п. 1, 2, 3 для остатка  $x^2 + x$ :

$$\begin{array}{r|l} x^2 + x & x - 1 \\ - x^2 \pm x & \\ \hline \underbrace{2x}_{\text{второй остаток}} & x \end{array} \quad \left| \quad x^2 : x = x; (x^2 + x) - (x^2 - x) = 2x \right.$$

5. Снесите ко второму остатку следующий член  $(-2)$  и снова примените п. 1, 2, 3:

$$\begin{array}{r|l} 2x - 2 & x - 1 \\ - 2x - 2 & \\ \hline 0 & 2 \end{array} \quad \left| \quad 2x : x = 2; 2(x - 1) = 2x - 2 \right.$$

Запишем решение примера целиком:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x - 2 & x - 1 \\ - x^3 \pm x^2 & \\ \hline - x^2 + x & x^2 + x + 2 \\ - x^2 \pm x & \\ \hline - 2x - 2 & \\ - 2x \pm 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

**З а м е ч а н и е.** Если последний остаток имеет степень больше, чем делитель, то повторяйте операцию деления до тех пор, пока последний остаток не будет нулем или числом (при делении на  $(x - a)$ ).

### Пример

Выполните деление  $P_3(x) = x^3 - 3x - 2$  на двучлен  $(x + 1)$ .

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x - 2 & x + 1 \\ - x^3 \mp x^2 & \\ \hline - x^2 - 3x & x^2 - x - 2 \\ - x^2 \pm x & \\ \hline - 2x - 2 & \\ - 2x \pm 2 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 1). x^3 : x = x^2 \\ 2). -x^2 : x = -x \\ 3). -2x : x = -2 \end{array}$$

Ответ:  $P_3(x) : (x + 1) = x^2 - x - 2$ .



## Формула деления многочлена на двучлен нацело

$$P_n(x) : (x - \alpha) = M_{n-1}(x),$$

$$\text{если } M_{n-1}(x) \cdot (x - \alpha) = P_n(x)$$

$P_n(x)$  и  $M_{n-1}(x)$  — многочлены

Как для чисел:  $a : b = c$ , если  $c \cdot b = a$

**Полезный совет.** Деление многочлена  $P_n(x)$  на многочлен  $Q_m(x)$  выполняется по алгоритму «Деление многочлена на двучлен», и формула деления  $P_n(x) : Q_k(x) = M_m(x)$  аналогична  $M_m(x) \cdot Q_k(x) = P_n(x)$ , причем  $m + k = n$ .

### Пример

Выполните деление  $(6x^3 + 7x^2 - 6x + 1) : (3x - 1)$  и проверьте результат умножением.

*Решение.*

$\begin{array}{r} 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 \\ \underline{6x^3 + 2x^2} \\ 9x^2 - 6x \\ \underline{9x^2 + 3x} \\ -3x + 1 \\ \underline{-3x + 1} \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3x - 1 \\ \hline 2x^2 + 3x - 1 \end{array}$	$\begin{array}{l} 6x^3 : 3x = 2x^2 \\ 9x^2 : 3x = 3x \\ -3x : 3x = -1 \end{array}$
---	---	--

*Проверка:*

$$M_{n-1}(x) \cdot (x - a) = P_n(x)$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 3x - 1 \\ \times \quad 3x - 1 \\ \hline 6x^3 + 9x^2 - 3x \\ + \quad -2x^2 - 3x + 1 \\ \hline 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = P_n(x) \end{array}$$

ответ верный

Ответ:  $M(x) = 2x^2 + 3x - 1$ .

### Проверь себя!

Разделите многочлены уголком и проверьте результат умножением.

1.  $(36x^4 - 6x^3 + 30x^2 - 6x - 6) : (6x^2 - x - 1)$

2.  $(-4x^5 + 3x^3 + 2x - 1) : (x - 1)$

Ответ: 1).  $6x^2 + 6$ ; 2).  $-4x^4 - 4x^3 - x^2 - x + 1$ .



## Формула деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $(x - a)$ с остатком

$$P_n(x) : (x - a) = M_{n-1}(x) + R,$$

если  $M_{n-1}(x) \cdot (x - a) + R = P_n(x)$

Как для чисел:  $a : b = c + r$  (ост),  
если  $c \cdot b + r = a$

**Теорема 1 (Безу).** При делении многочлена  $P_n(x)$  на двучлен  $(x - a)$  остаток от деления  $R = P(a)$ .

Например, найти остаток от деления  $P_3(x)$  на двучлен  $(x - a)$ :

$$P_3(x) = x^3 + 5x^2 - 6x - 6; \quad x - a = x - 2$$

Решение.

$$1). a = 2 \quad 2). R = P(2) = 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - 6 = 8 + 20 - 12 - 6 = 10$$

Ответ:  $R = 10$ .

### Алгоритм

94

### Нахождение остатка от деления многочлена $P_n(x)$ на $(x - a)$

1. Определите, чему равно  $a$ .

Например: если  $x + 1$ , то  $a = -1$ ;

$$\text{если } 3x - 2, \text{ то } a = \frac{2}{3};$$

$$\text{если } x - 3, \text{ то } a = 3$$

$$x + 1 = x - a$$

$$3\left(x - \frac{2}{3}\right) = x - a$$

$$x - 3 = x - a$$

2. Подставьте вместо  $x$  значение  $a$  в  $P_n(x)$  и вычислите  $P_n(a) = R$ .  
Если  $R = 0$ , то деление выполняется нацело и  $a$  — корень; если  $R \neq 0$ , то  $R$  равно числу — остатку от деления.
3. Запишите ответ.

### Примеры

1. Найдите остаток от деления  $(3x^3 + 4x^2 + 1) : (x + 2)$  и проверьте результат.

Решение.

$$1). \text{ Найдите } a: x + 2 = x - a; a = -2$$

$$2). R = P(-2) = 3 \cdot (-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 + 1 = -24 + 16 + 1 = -7$$



3). Выполните деление:

$$\begin{array}{r}
 3x^3 + 4x^2 + 1 \quad | \quad x + 2 \\
 \underline{3x^3 + 6x^2} \phantom{+ 1} \quad \underline{3x^2 - 2x + 4} \\
 -2x^2 + 1 \phantom{+ 1} \phantom{+ 1} \quad \phantom{+ 1} \\
 \underline{-2x^2 + 4x} \phantom{+ 1} \phantom{+ 1} \quad \phantom{+ 1} \\
 4x + 1 \phantom{+ 1} \phantom{+ 1} \phantom{+ 1} \quad \phantom{+ 1} \\
 \underline{4x + 8} \\
 -7 = R
 \end{array}$$

Ответ:  $R = -7$ .

Проверка:

$$M(x) \cdot (x+2) + R = P(x)$$

$$\begin{aligned}
 (3x^2 - 2x + 4) \cdot (x+2) + (-7) &= \\
 = 3x^3 - 2x^2 + 4x + 6x^2 - 4x + 8 - 7 &= \\
 = 3x^3 + 4x^2 + 1 = P(x) &\text{ — верно}
 \end{aligned}$$

2. Найдите остаток от деления  $(3x^3 + 4x^2) : (3x + 2)$ .

Решение.

$$1). \text{ Найдите } a: x - a = 3 \left( x + \frac{2}{3} \right); a = -\frac{2}{3}$$

$$2). R = P \left( -\frac{2}{3} \right) = 3 \cdot \left( -\frac{2}{3} \right)^3 + 4 \cdot \left( -\frac{2}{3} \right)^2 = 3 \cdot \left( -\frac{8}{27} \right) + 4 \cdot \frac{4}{9} = -\frac{8}{9} + \frac{16}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\text{Ответ: } R = \frac{8}{9}.$$

**Попробуй не реши!**Найдите остаток от деления  $(4x^3 - 3x^2 + 2x - 1) : (x + 2)$  и сделайте проверку по формуле деления с остатком.

$$\text{Ответ: } R = -49.$$

**Попробуй-ка реши!**1. Найдите остаток от деления  $(2x^4 + 3x^3 - x) : (x^2 + x + 1)$  и сделайте проверку.

$$\text{Ответ: } R(x) = x + 3; M(x) = 2x^2 + x - 3.$$

2. Найдите значение  $a$ , при котором деление выполнено нацело, и проверьте:  $(3x^5 - 3x^4 + ax^2 - ax) : (3x^3 + 2)$ .

$$\text{Ответ: } a = 2.$$

**Решение уравнений  $n$ -й степени**Рассмотрим теоремы, с помощью которых можно решать уравнения вида  $P_n(x) = 0$ .



**Теорема 2.** Если несократимая дробь  $\frac{p}{q}$  является корнем многочлена (или его нулем)  $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$  с целыми коэффициентами, то ее числитель  $p$  является делителем свободного члена  $a_n$ , а знаменатель  $q$  — делителем  $a_0$ .

**Алгоритм****95****Решение уравнения**

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

1. Найдите делители  $a_n: p_1, p_2, \dots, p_n$  и  $a_0: q_1, q_2, \dots, q_n$ .
2. Составьте отношения:  $\frac{p}{q} : \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_1}{q_2}, \dots, \frac{p_1}{q_n}; \frac{p_2}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_2}{q_n} \dots$
3. Подставьте полученные числа  $\frac{p}{q}$  в уравнение. Если получится

$$R = P_n\left(\frac{p_k}{q_k}\right) = 0, \text{ то } x = \frac{p_k}{q_k} \text{ — корень уравнения.}$$

4. Ответ запишите числами.

**Пример**

Решите уравнение  $2x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ .

*Решение.*

1). Делители  $a_n = -1: p_1 = 1; p_2 = -1$   
Делители  $a_0 = 2: q_1 = 1; q_2 = 2 \mid a_0 > 0$

$$2). x_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{1} = 1; x_2 = \frac{p_1}{q_2} = \frac{1}{2}; x_3 = \frac{p_2}{q_1} = \frac{-1}{1} = -1; x_4 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{-1}{2}$$

3). Подставьте  $x_1, x_2, x_3, x_4$  в многочлен  $P_3(x)$ :

$$x_1 = 1; P(1) = 2 + 1 + 1 - 1 = 3 \neq 0, \text{ то } x \neq 1$$

$$x_2 = \frac{1}{2}; P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0; x = \frac{1}{2} \text{ — корень}$$

$$x_3 = -1; P(-1) = -2 + 1 - 1 - 1 = -3 \neq 0; x \neq -1$$



$$x_4 = -\frac{1}{2}; P\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2} \neq 0; x \neq -\frac{1}{2}$$

Ответ:  $\frac{1}{2}$ .

**Теорема 3.** Если многочлен  $P(x)$  делится на  $(x - a)$  без остатка, то  $a$  — корень уравнения  $P(x) = 0$  ( $R = P(a) = 0$ ).

Например:  $(5x^3 + 2x^2 - 7) : (x - 1) = 5x^2 + 7x - 7$ , то  $x = 1$  — корень,  $R = P(1) = 5 + 2 - 7 = 0$

**Теорема 4.** Если целое число  $a$  является корнем многочлена  $P(x) = x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n$ , то  $a$  будет делителем свободного члена  $b_n$ . Если делители  $b_n$  не являются корнями  $P(x)$ , то уравнение не имеет ни одного целого корня и ни одного дробного корня (иррациональные или мнимые).

### Пример

Найдите целые корни уравнения  $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x + 1 = 0$ .

Решение.

1).  $b_n = 1$ ; делители  $b_n$ :  $-1$ ;  $+1$

2). Найдем  $R = P(-1) = 1 + 4 - 2 - 4 + 1 = 0$ ;  $x = -1$  — корень

$R = P(1) = 1 - 4 - 2 + 4 + 1 = 0$ ;  $x = 1$  — корень

Ответ:  $-1$ ;  $+1$ .

**З а м е ч а н и е.** Целые корни уравнения  $P(x) = 0$  мы можем найти по теореме 4, но, чтобы найти иррациональные корни, надо научиться раскладывать на множители  $P_n(x)$ , чтобы понизить степень многочлена.

### Алгоритм

96

### Разложение на множители

многочлена  $P_n(x) = x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n$

1. Найдите целые делители свободного члена  $b_n$ :  $a_1$ ;  $a_2$ ; ...  $a_n$ .
2. Найдите хотя бы один корень по теореме 4 (подставьте  $a_k$  в  $P_n(x)$  и найдите  $R = P_n(a_k)$ ; если  $R = 0$ , то  $a_k$  — корень).
3. Разделите уголком  $P_n(x)$  на  $(x - a_k)$ , получите многочлен  $M_{n-1}(x)$  (степень многочлена понизилась).



4. Проверьте остальные делители  $b_n$ . Если  $R = M_{n-1}(a_m) = 0$ , то разделите  $M(x)$  на  $(x - a_m)$  и получите многочлен  $S(x)$ , который не имеет целых корней.
5. Решите полученный многочлен известным способом (как квадратное или линейное уравнение).
6. Запишите  $P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots$

### Пример

Сократите дробь  $\frac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^3 - 2x^2 + 4x - 3}$ .

Решение.

$$x^3 + 2x^2 + 9$$

1). Делители 9:  $\pm 1; \pm 3; \pm 9$

$\pm 1$  и 3 не подойдут,

испытаем:  $x = -3$ :

$$P(-3) = -27 + 18 + 9 = 0$$

$x = -3$  — корень

$$2). \quad \begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 + 9 & x + 3 \\ x^3 + 3x^2 & x^2 - x + 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\quad \begin{array}{r} -x^2 + 9 \\ -x^2 - 3x \\ \hline \end{array}$$

$$\quad \begin{array}{r} 3x - 9 \\ 3x - 9 \\ \hline \end{array}$$

$$\quad \begin{array}{r} 0 \end{array}$$

$$3). \quad x^3 + 2x^2 + 9 = (x + 3)(x^2 - x + 3)$$

$$4). \quad \frac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^3 - 2x^2 + 4x - 3} = \frac{(x + 3)(x^2 - x + 3)}{(x - 1)(x^2 - x + 3)} = \frac{x + 3}{x - 1}$$

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 3$$

Делители  $-3$ :  $\pm 1; \pm 3$

$$x = 1: P(1) = 1 - 2 + 4 - 3 = 0$$

$x = 1$  — корень

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 + 4x - 3 & x - 1 \\ x^3 \pm x^2 & x^2 - x + 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\quad \begin{array}{r} -x^2 + 4x \\ -x^2 \pm x \\ \hline \end{array}$$

$$\quad \begin{array}{r} 3x - 3 \\ 3x - 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\quad \begin{array}{r} 0 \end{array}$$

$$\quad \begin{array}{r} 0 \end{array}$$

$$\quad \begin{array}{r} 0 \end{array}$$

$$\quad \begin{array}{r} 0 \end{array}$$

$$\quad \begin{array}{r} 0 \end{array}$$

$$\quad \begin{array}{r} 0 \end{array}$$

$$\quad \begin{array}{r} 0 \end{array}$$

$$\quad \begin{array}{r} 0 \end{array}$$

$$\quad \begin{array}{r} 0 \end{array}$$

$$\quad \begin{array}{r} 0 \end{array}$$

$$\quad \begin{array}{r} 0 \end{array}$$

$$\quad \begin{array}{r} 0 \end{array}$$

$$\quad \begin{array}{r} 0 \end{array}$$

$$\quad \begin{array}{r} 0 \end{array}$$

$$\quad \begin{array}{r} 0 \end{array}$$

$$\quad \begin{array}{r} 0 \end{array}$$

$$\quad \begin{array}{r} 0 \end{array}$$

**Проверь себя!**

1. Разложите на множители многочлен  $P_n(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6$ .

2. Сократите дробь  $\frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{2x^3 + x^2 + 1}$ .



Ответ: 1.  $(x-3)(x^2-2x+2)$ ; 2.  $\frac{x^2+x+1}{2x^2-x+1}$ .

### Алгоритм

97

### Решение уравнений

$$x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n = 0$$

1. Найдите хотя бы один корень  $x_1$  уравнения через делители  $b_n$  по теоремам 3, 4.
2. Поделите многочлен  $P(x)$  на  $(x - x_1)$ , получите многочлен  $M_{n-1}(x)$ .
3. Проверьте делители  $b_n$  для многочлена  $M_{n-1}(x)$ . Если  $R = M_{n-1}(x_k)$ , то повторите деление многочлена  $M_{n-1}(x)$  на  $(x - x_k)$ , пока не получите квадратное или линейное уравнение, и найдите все корни  $P(x) = 0$ .

Решите полученное уравнение и найдите все корни  $P(x) = 0$ .

### Примеры

1. Решите уравнение  $x^3 + x^2 - 3x - 2 = 0$ .

Решение.

- 1).  $R = P(1) = 1 + 1 - 3 - 2 \neq 0$
- 2).  $R = P(-1) = 1 + 1 + 3 - 2 \neq 0$
- 3).  $R = P(2) = 8 + 4 - 6 - 2 \neq 0$
- 4).  $R = P(-2) = -8 + 4 + 6 - 2 = 0$   
 $x = -2$  — корень

Делители  $b_n = -2: \pm 1; \pm 2; \pm 4$   
 $R = P(a_0)$ , если  $R = 0$ ,  
то  $a_0$  — корень

$x^3 + x^2 - 3x - 2$	$x + 2$
$x^3 + 2x^2$	
$-x^2 - 3x$	$x^2 - x - 1$
$-x^2 + 2x$	
$-x - 2$	
$-x - 2$	
0	

$$P_3(x) : (x - a); a = -2$$

- 5). Решим уравнение  $x^2 - x - 1 = 0$ :



$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Ответ: } -2; \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

$$x^2 + px + 0; \quad p = -1; \quad q = -1$$

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}; \quad D = p^2 - 4q = 1 + 4 + 5$$

2. Найдите действительные корни уравнения  $9x^3 + 12x^2 - 10x + 4 = 0$ .  
Решение.

1).  $a_0 = 9 = q$ ; делители: 1; 3; 9

$a_n = 4 = p$ ; делители:  $\pm 1$ ;  $\pm 2$ ;  $\pm 4$

2).  $\frac{p}{q} = \pm 1; \pm \frac{1}{3}; \pm \frac{1}{9}; \pm 2; \pm \frac{2}{3}; \pm \frac{2}{9}; \pm 4; \pm \frac{4}{3}; \pm \frac{4}{9}$

- 3). Проверим  $x = -2$  («прикидка» других чисел ясна без проверки):

$$R = 9 \cdot (-8) + 12 \cdot 4 + 20 + 4 = -72 + 72 = 0; \quad x = -2 \text{ — корень}$$

$$\begin{array}{r} 4). \quad -9x^3 + 12x^2 - 10x + 4 \quad | \quad x - 2 \\ \underline{9x^3 \pm 18x^2} \quad \quad \quad 9x^2 + 6x + 2 \\ \quad \quad \quad -6x^2 - 10x \quad \quad \quad \\ \quad \quad \quad \underline{-6x^2 \pm 12x} \quad \quad \quad \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad -2x + 4 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{2x + 4} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

5).  $9x^2 - 6x + 2 = 0$

Нет действительных корней

Ответ: -2.

$$a = 9; \quad b = -6 \text{ — четное, } c = 2$$

$$D = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a \cdot c = 9 - 18 < 0$$

3. Уравнение  $ax^3 - 2x^2 - 5x + b = 0$  имеет корни  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = -2$ .

Найдите  $a$ ,  $b$ ,  $x$ .

Решение.

- 1). Подставим в уравнение  $x_1 = 1$  и  $x_2 = -2$ .

$$x_1 = 1; \quad a - 2 - 5 + b = 0$$

$$x_2 = -2; \quad a \cdot (-8) - 8 + 10 + b = 0$$

$$\begin{cases} a + b = 7 \\ -8a + b = -2 \end{cases} \quad | \cdot (-1) \quad + \quad \begin{cases} a + b = 7 \\ 8a - b = 2 \end{cases}$$

$$1 + b = 7; \quad b = 6$$

$$9a = 9; \quad a = 1$$

2).  $1 \cdot x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

$$R = P(3) = 27 - 18 - 15 + 6 = 0$$

$x = 3$  — корень

Ответ:  $a = 1$ ;  $b = 6$ ;  $x = 3$ .

$$6: \pm 1; \pm 2; \pm 3;$$

$x_1 = 1$  и  $x_2 = -2$  по условию,  
проверим  $x = 3$



## §7.

## Возвратные или симметричные уравнения

**Определение.** Уравнение вида  $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_1x + a_0 = 0$  называется возвратным, если его коэффициенты, равноудаленные от начала и конца, равны между собой.

Например:  $3x^3 + 2x^2 + 2x + 3 = 0$  или  $2x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 2 = 0$

### Алгоритм

98

### Решение возвратного уравнения III степени $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$

1. Сгруппируйте члены с одинаковыми коэффициентами:

$$(ax^3 + a) + (bx^2 + bx) = 0$$

2. Разложите на множители многочлен:

$$a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = 0$$

$$a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)(ax^2 - ax + a + bx) = 0$$

$$(x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a) = 0$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

3. Решите уравнения:

$$1). x + 1 = 0$$

$$x_1 = -1$$

$$2). ax^2 - (b - a)x + a = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{-(b - a) \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$a \cdot b = 0, \text{ если } a = 0$$

$$\text{или } b = 0 \text{ на ОДЗ}$$

4. Запишите ответ.

**З а м е ч а н и е.** При решении возвратных уравнений III степени один корень всегда равен  $(-1)$ .

### Пример

Решите уравнение  $2x^3 - 11x^2 - 11x + 2 = 0$ .

**Решение.**

$$1). (x + 1)(2x^2 - 13x + 2) = 0$$

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$$

$$a = 2; b = -11$$

$$(x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a) = 0$$



$$2). \quad x + 1 = 0; \quad x = -1 \text{ или} \\ 2x^2 - 13x + 2 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{13 \pm \sqrt{153}}{4}$$

$$x_2 = \frac{13 + \sqrt{153}}{4}; \quad x_3 = \frac{13 - \sqrt{153}}{4}$$

$$b - a = -11 - 2 = -13$$

$$2x^2 - 13x + 2 = 0; \quad a = 2; \quad b = -13$$

$$x_{1,2} = \frac{-(b-a) \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$D = b^2 - 4ac = 169 - 16 = 153$$

$$\text{Ответ: } -1; \quad \frac{13 + \sqrt{153}}{4}; \quad \frac{13 - \sqrt{153}}{4}.$$

### Проверь себя!

Решите уравнение  $3x^3 + 5x^2 + 5x + 3 = 0$ .

Ответ:  $-1$ .

#### Алгоритм

99

#### Решение возвратного уравнения IV степени

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

1. Разделите обе части уравнения на  $x^2 \neq 0$ :

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

2. Сгруппируйте члены с равными коэффициентами:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

3. Обозначьте  $x + \frac{1}{x} = t$ , тогда  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2$ ,

$$\text{т. е. } x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2.$$

4. Решите квадратное уравнение  $a(t^2 - 2) + bt + c = 0$ ,  
пусть  $t_1$  и  $t_2$  — корни.

5. Решите уравнения  $x + \frac{1}{x} = t_1$  и  $x + \frac{1}{x} = t_2$ .

6. Запишите ответ.



**Пример**

Решите уравнение  $x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$ .

Решение.

$$1). x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0 \quad | :x^2 \neq 0; \quad x^2 - 10x + 26 - \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$2). \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 26 = 0. \text{ Пусть } x + \frac{1}{x} = t; \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2,$$

получим уравнение:  $t^2 - 2 - 10t + 26 = 0$

$$3). t^2 - 10t + 24 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} t_1 + t_2 = 10 \\ t_1 \cdot t_2 = 24 \end{array} \right. \quad t_1 = 6; \quad t_2 = 4$$

4). Решите два уравнения:

$$1). x + \frac{1}{x} = 6 \quad | \cdot x$$

$$x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$3 + \sqrt{8}; \quad x_2 = 3 - \sqrt{8}$$

$$2). x + \frac{1}{x} = 4 \quad | \cdot x$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x_3 = 2 + \sqrt{3}$$

$$x_4 = 2 - \sqrt{3}$$

$$x_{1,2} = -p \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Ответ:  $3 - \sqrt{8}; 2 - \sqrt{3}; 3 + \sqrt{8}; 2 + \sqrt{3}$ .

**Проверь себя!**

Решите уравнение  $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$ .

Ответ:  $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}; 2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}$ .

**Полезный совет.** Если дано симметричное уравнение нечетной степени ( $n \geq 5$ ), то оно имеет один корень; чтобы найти остальные корни, разделите уголком многочлен на  $(x + 1)$  и решите симметричное уравнение IV степени.

**Попробуй-ка реши!**

Решите уравнение  $2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0$ .

Ответ:  $-1; -2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}; \frac{1}{2}; 2$ .



## Глава IX. Решение систем уравнений

### § 1.

### Системы двух уравнений I степени с двумя неизвестными

**Определение 1.** Два уравнения  $a_1x + b_1y = c_1$  и  $a_2x + b_2y = c_2$ , в которых одноименные неизвестные  $x$  и  $y$ , обозначающие одну и ту же величину, образуют систему двух уравнений: 
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

где  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  — постоянные числа;  $x, y$  — неизвестные.

**Определение 2.** Решением системы двух уравнений I степени с двумя неизвестными называют такую пару чисел  $(x_0; y_0)$ , которая при подстановке в эту систему обращает каждое ее уравнение в верное числовое равенство.

Например, решением системы  $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$  является пара чисел  $(3; 1)$ , так как  $\begin{cases} 3 + 1 = 4 \text{ — верное равенство} \\ 6 - 1 = 5 \text{ — верное равенство} \end{cases}$

**Определение 3.** Решить систему уравнений — значит найти все ее решения или установить, что решений нет.



## Решение системы двух уравнений I степени с двумя неизвестными

При решении системы двух уравнений возможны три случая:

1. Решением системы является единственная пара чисел  $(x_0; y_0)$ .
2. Система имеет множество решений.
3. Система не имеет решения.

Можно, не решая систему, через отношения коэффициентов узнать, какому из трех случаев соответствует система. Это называется исследованием решения.

### Исследование решений системы уравнений I степени

Составьте отношения:  $\frac{a_1}{a_2}; \frac{b_1}{b_2}; \frac{c_1}{c_2}$ .

1. Если  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ , то система имеет множество решений.
2. Если  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ , то система не имеет решений.
3. Если  $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ , то система имеет единственное решение  $(x_0; y_0)$ .

Прежде чем решать систему, убедитесь в том, что она имеет решение.

Например, решить систему:

$$1. \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 6y = -2 \end{cases}$$

$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{4}{-2}$ , значит, нет решений, решать систему не надо!

$$2. \begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

$\frac{5}{2} \neq \frac{-4}{3} \neq \frac{3}{5}$ , значит, система имеет единственное решение

$$3. \begin{cases} 4x + 3y = -7 \\ -8x - 6y = 14 \end{cases}$$

$\frac{4}{-8} = \frac{3}{-6} = \frac{-7}{14}$ , значит, решений бесчисленное множество



## Алгоритм

100

Решение систем уравнений  
способом подстановки

1. Проверьте наличие решения системы. Для этого запишите за чертой отношения  $\frac{a_1}{a_2}; \frac{b_1}{b_2}; \frac{c_1}{c_2}$ . Если  $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ , то система имеет единственное решение, переходите к п. 2.
2. Выразите одну неизвестную через другую в одном из уравнений системы. (Удобнее выбирать уравнение, в котором при одной из неизвестных коэффициент равен единице.)

Например: 
$$\begin{cases} x + 2y = 5 & \text{(I)} \\ 2x + 3y = 7 & \text{(II)} \end{cases}$$

В уравнении (I)  $a = 1$  при  $x$ , решите это уравнение относительно  $x$ :  $x + 2y = 5$ ;  $x = 5 - 2y$ .

3. Подставьте выражение, найденное для  $x$ , в другое уравнение (II), получите уравнение с одной неизвестной.

Например:  $2 \cdot (5 - 2y) + 3y = 7$

4. Решите уравнение (п. 3) относительно  $y$ .

Например:  $10 - 4y + 3y = 7$ ;  $10 - 7 = y$   $\left| \begin{array}{l} 10 - 7 = 3 \\ y = 3 \end{array} \right.$

5. Подставьте найденное значение  $y$  в выражение для  $x$  (п. 2).

Например:  $x = 5 - 2y$ ;  $x = 5 - 6$ ;  $x = -1$

6. Запишите ответ парой чисел  $(x_0; y_0)$ .

Например:  $(-1; 3)$

**З а м е ч а н и е.** Если коэффициент при неизвестных отличен от единицы, то не имеет значения, из какого уравнения выражать одну неизвестную через другую.

## Примеры

Решите систему уравнений.

1. ГИА. 
$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$



Решение.

$$2). 3x + y = 7; y = 7 - 3x$$

$$3). 2x - 3(7 - 3x) = 1$$

$$4). 2x - 21 + 9x = 1$$

$$11x = 22 \quad | :11$$

$$x = 2$$

$$5). y = 7 - 3 \cdot 2; y = 1$$

Ответ: (2; 1).

1).  $\frac{2}{3} \neq -\frac{3}{1} \neq \frac{1}{7}$  — система имеет единственное решение

**Полезный совет.** Можно решение записывать системой, постепенно упрощая решение уравнений; при этом не имеет значения порядок уравнений в записи системы.

$$2. \quad \begin{cases} x - 2y = 11 \\ y = 2x - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 11 \\ -2x + y = -5 \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} x - 2y = 11 \\ y = 2x - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x - 5 \\ x - 2(2x - 5) = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x - 5 \\ x - 4x + 10 = 11 \end{cases} \quad \frac{1}{-2} \neq \frac{-2}{+1} \neq \frac{11}{-5};$$

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -5\frac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{система имеет} \\ \text{единственное} \\ \text{решение} \\ 10 - 11 = 3x \\ x = -\frac{1}{3} \end{array}$$

Ответ:  $\left(-\frac{1}{3}; -5\frac{2}{3}\right)$ .

$$3. \quad \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 6x - 4y = 10 \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} x_0 \text{ — любое число} \\ y_0 = \frac{3x_0 - 5}{2} \end{cases} \quad 1). \frac{3}{6} = \frac{-2}{-4} = \frac{5}{10} \text{ — система имеет множество решений}$$

Ответ:  $\left(x_0; \frac{3x_0 - 5}{2}\right)$ .



$$4. \begin{cases} 5x - y = 2 \\ 10x - 2y = 3 \end{cases}$$

Решение.

Ответ: система не имеет решений.

$$1). \frac{5}{10} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{2}{3} \text{ — система не имеет решений}$$

$$5. \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 5y = 16 \end{cases}$$

Решение.

$$2). 2x + 5y = 16$$

$$2x = 16 - 5y \quad | :2$$

$$x = 8 - \frac{5}{2}y$$

$$3). 3 \cdot \left(8 - \frac{5}{2}y\right) - 2y = 5$$

$$4). 24 - \frac{15}{2}y - 2y = 5; y = 2$$

$$5). x = 8 - \frac{5}{2} \cdot 2; x = 8 - 5; \\ x = 3$$

$$1). \frac{3}{2} \neq -\frac{2}{5} \neq \frac{5}{16} \text{ — система имеет единственное решение}$$

$$a(b - c) = ab - ac; a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c};$$

$$24 - \frac{15}{2}y - 2y = 5; 24 - 5 = \frac{19}{2}y;$$

$$19 = \frac{19}{2}y \quad | \cdot \frac{2}{19}; \frac{19 \cdot 2}{19} = y; y = 2$$

Ответ: (3; 2).

**З а м е ч а н и е.** Способ подстановки удобно использовать при решении системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, когда одно из уравнений системы имеет неизвестную с коэффициентом, равным единице.

**Проверь себя!**

Решите систему уравнений.

$$1. \text{ ГИА. } \begin{cases} 2x - 6y = 5 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$$

$$2. \text{ ГИА. } \begin{cases} 3x - 2y = 16 \\ 4x + y = 3 \end{cases}$$

$$3. \text{ ГИА. } \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x + 6y = 10 \end{cases}$$

Ответ: 1).  $\emptyset$ ; 2). (2; -5); 3). (2; 1).



## Алгоритм

101

Решение систем уравнений  
способом сложения

1. Запишите систему в виде:  $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$  и проверьте наличие решения за чертой  $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ .

2. Уравняйте модули коэффициентов при одном из неизвестных (удобно при неизвестных с разными знаками). Для этого найдите их НОК и умножьте обе части уравнения на дополнительный множитель при неизвестном.

Например:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 5y = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \mid \cdot 5 \\ 2x + 5y = 16 \mid \cdot 2 \end{cases}$$

$$1). \frac{3}{2} \neq \frac{-2}{5} \neq \frac{5}{16} \text{ — единственное решение}$$

$$2). \text{НОК}(|-2|; 5) = 10$$

3. Сложите или вычтите почленно обе части уравнений, чтобы получить уравнение с одним неизвестным.

Например:

$$\begin{cases} + 15x - 10y = 25 \\ 4x + 10y = 32 \end{cases}$$

$$19x + 0 \cdot y = 57$$

4. Найдите неизвестное из полученного уравнения (п. 3).

$$\text{Например: } 19x = 57 \mid :19; x = 3$$

5. Подставьте найденное значение неизвестного в одно из уравнений, где удобнее вычислять, и найдите второе неизвестное.

Например: подставьте  $x = 3$  в (I) уравнение:

$$3 \cdot 3 - 2y = 5; 2y = 9 - 5; y = 2$$

6. Ответ запишите парой чисел  $(x_0; y_0)$ . Например:  $(3; 2)$ .

**Полезный совет.** Если сомневаетесь в правильности ответа, проверьте подстановкой значений  $x_0$  и  $y_0$  в каждое уравнение.

$$\text{Например: } \begin{cases} 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 9 - 4 \\ 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 6 + 10 \end{cases} \text{ — верные равенства, значит, ответ найден верно}$$



## Примеры

Решите систему уравнений.

$$1. \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 2 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 2 \end{cases}$$

Решение.

$$2). \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 2 \mid \cdot 4 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 2 \mid \cdot 6 \end{cases} \quad - \begin{cases} x + y = 8 \\ x + 2y = 12 \\ \hline -y = -4 \end{cases}$$

$$1). \frac{1}{1} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{8}{12} \quad \text{— система имеет единственное решение}$$

$$\text{НОК } (6 : 3) = 6$$

$$3). -y = -4 \mid \cdot (-1); y = 4$$

$$4). x + 4 = 8; x = 4$$

Ответ: (4; 4).

$$2. \begin{cases} x - 3y - 4 = 0 \\ 5x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

Решение.

$$2). + \begin{cases} x - 3y = 4 \\ 5x + 3y = -1 \\ \hline 6x = 3 \end{cases}$$

$$1). \frac{1}{5} \neq \frac{-3}{3} \neq \frac{4}{-1} \quad \text{— система имеет единственное решение}$$

$$3). 6x = 3 \mid : 6; x = \frac{1}{2}$$

$$-4 + \frac{1}{2} = -3 \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}; \frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c};$$

$$4). \frac{1}{2} - 3y = 4; 3y = \frac{1}{2} - 4$$

$$a = b, \text{ то } b = a$$

$$3y = -\frac{7}{2} \mid : 3; y = -\frac{7}{6}$$

Ответ:  $\left(\frac{1}{2}; -\frac{7}{6}\right)$ .



3.  $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ 2x - 4y = -5 \end{cases} \quad \left| \quad \frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{7}{-5} \right. \text{ — система не имеет решений}$

Ответ: нет решений.

### Проверь себя!

Решите систему уравнений.

1.  $\begin{cases} 7a - 15b = -129 \\ -3a - 11b = 3 \end{cases}$

2.  $\begin{cases} \frac{2x}{9} + \frac{y}{4} = 11 \\ \frac{5x}{12} + \frac{y}{3} = 19 \end{cases}$

Ответ: 1).  $(-12; 3)$ ; 2).  $(36; 12)$ .

Попробуй не реши!

ГИА. Решите систему уравнений (любым способом).

1.  $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

2.  $\begin{cases} x + y = 7 \\ 5x - 7y = 11 \end{cases}$

3.  $\begin{cases} 7x + 3y = 1 \\ 2x - 6y = -10 \end{cases}$

Ответ: 1).  $(2; 3)$ ; 2).  $(5; 2)$ ; 3).  $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ .

Попробуй-ка реши!

1.  $\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{5}{8} \\ \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = \frac{3}{8} \end{cases}$

2.  $\begin{cases} \frac{5x-4y}{4} - 1 = 2x + 2 \\ \frac{3x-2y}{3} + 2 = 3x - 2 \end{cases}$

3.  $\begin{cases} ax + by = \frac{a^2 + b^2}{a+b} \\ bx + ay = \frac{2ab}{a+b} \end{cases}$

Ответ: 1).  $(5; 3)$ ; 2).  $(4; -6)$ ; 3).  $\left(\frac{a}{a+b}; \frac{b}{a+b}\right)$ ,  $a \neq 0$ ;  $b \neq -a$ .



## § 2.

## Графический способ решения систем уравнений

Каждое уравнение  $ax + by = c$  можно решить относительно  $y$ :

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \text{ или в привычном виде: } y = kx + b; \text{ получим линейную}$$

функцию, графиком которой является прямая.

Если построить график каждого уравнения системы в одной координатной плоскости, то возможны три случая:

1. Прямые пересекутся в одной точке, координаты которой и будут решением системы.
2. Прямые параллельны ( $k_1 = k_2$ ), тогда система не имеет решения.
3. Прямые совпадают, тогда система имеет множество решений (координаты любой точки прямой).

### Алгоритм

102

### Графический способ решения систем уравнений

1. Приведите каждое уравнение к виду  $y = kx + b$ . Перенесите  $y$  влево, а остальные члены вправо, изменив знак на противоположный.
2. Постройте график каждого уравнения системы (см. функции):

$x$	0	$x_0$
$y$	$b$	0

$$x_0 = -\frac{b}{k}$$

3. Найдите координаты точки пересечения графиков (если графики пересекутся). Опустите перпендикуляры на оси и найдите  $x_0$  и  $y_0$ .
4. Ответ запишите, согласно полученному решению.

### Примеры

Решите систему уравнений графически.

$$1. \begin{cases} x + y = 5 \text{ (I)} \\ x - y = 1 \text{ (II)} \end{cases} \text{ (рис. 24)}$$



1).  $\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = x - 1 \end{cases}$

2). Построим графики уравнений:

I уравнение

$$y = -x + 5$$

$x$	0	5
$y$	5	0

II уравнение

$$y = x - 1$$

$x$	0	1
$y$	-1	0

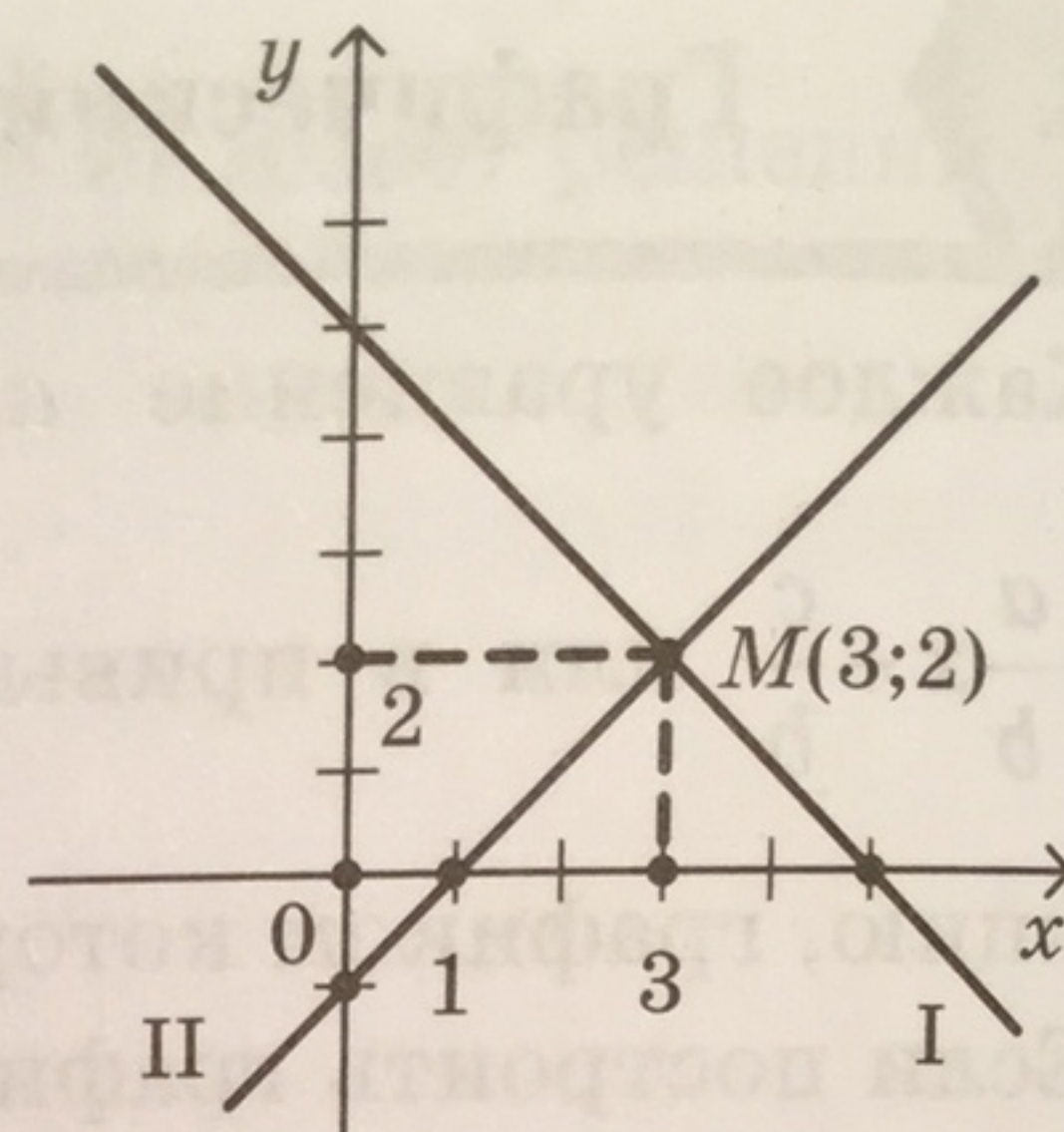


Рис. 24

3). Найдем координаты точки  $M$ .

$$x_0 = 3; y_0 = 2$$

Ответ: (3; 2).

2.  $\begin{cases} x + y = 6 \text{ (I)} \\ 2x = 1 - 2y \text{ (II)} \end{cases}$  (рис. 25)

Найдем  $y$  (II)  $2x = 1 - 2y$

$$2y = 1 - 2x \quad | : 2; y = -x + 0,5$$

1). I уравнение

$$y = -x + 6$$

II уравнение

$$y = -x + 0,5$$

2). Построим графики уравнений:

$x$	0	6
$y$	6	0

$x$	0	0,5
$y$	0,5	0

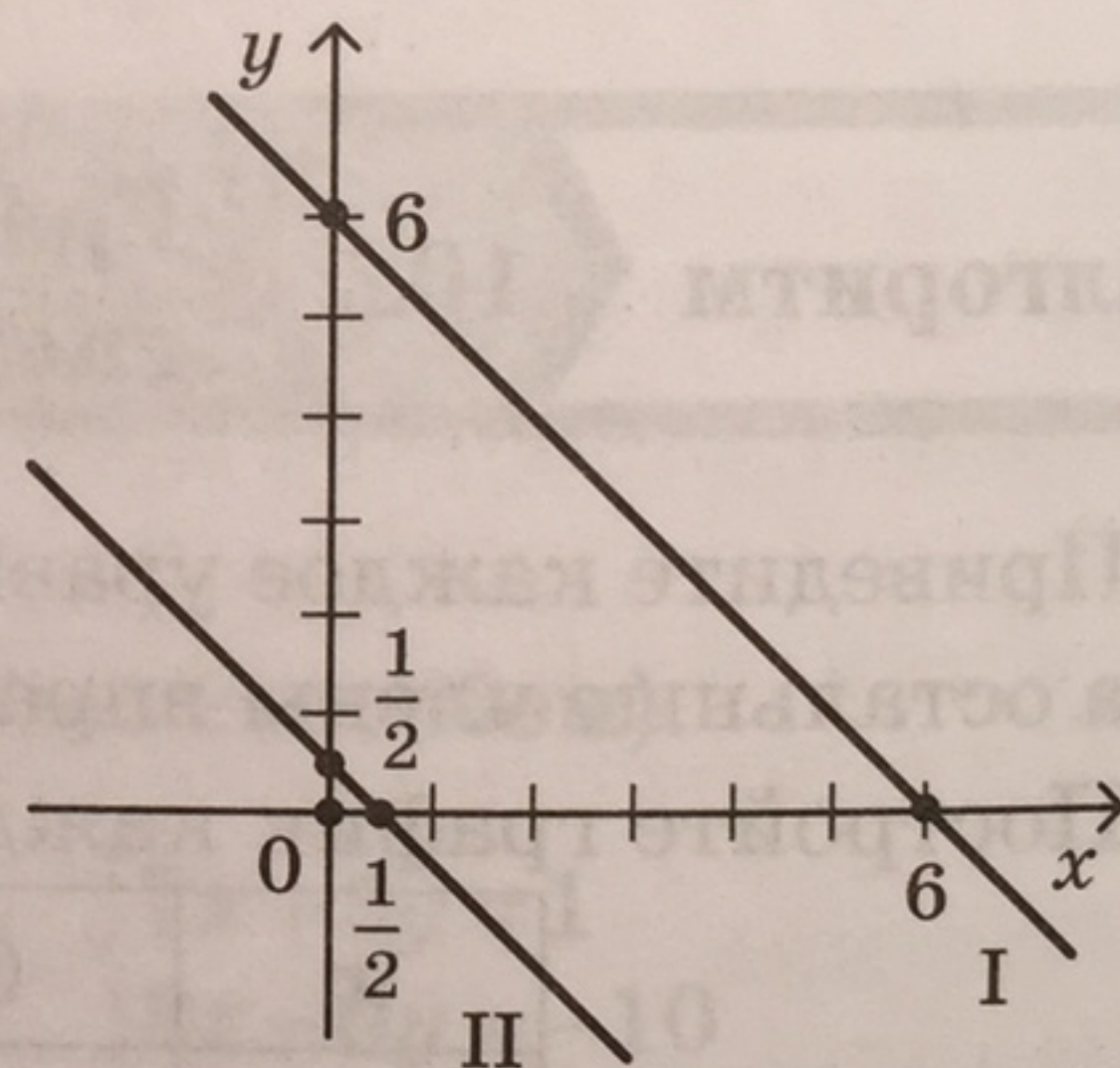


Рис. 25

3). Прямые параллельны, система не имеет решений

Ответ: нет решений.

3.  $\begin{cases} x - y = 3 \text{ (I)} \\ 2x - 2y = 6 \text{ (II)} \end{cases}$  (рис. 26)

1). I уравнение

$$y = x - 3$$

II уравнение

$$y = x - 3$$

2). Построим графики уравнений:

$x$	0	3
$y$	-3	0

$x$	0	3
$y$	-3	0

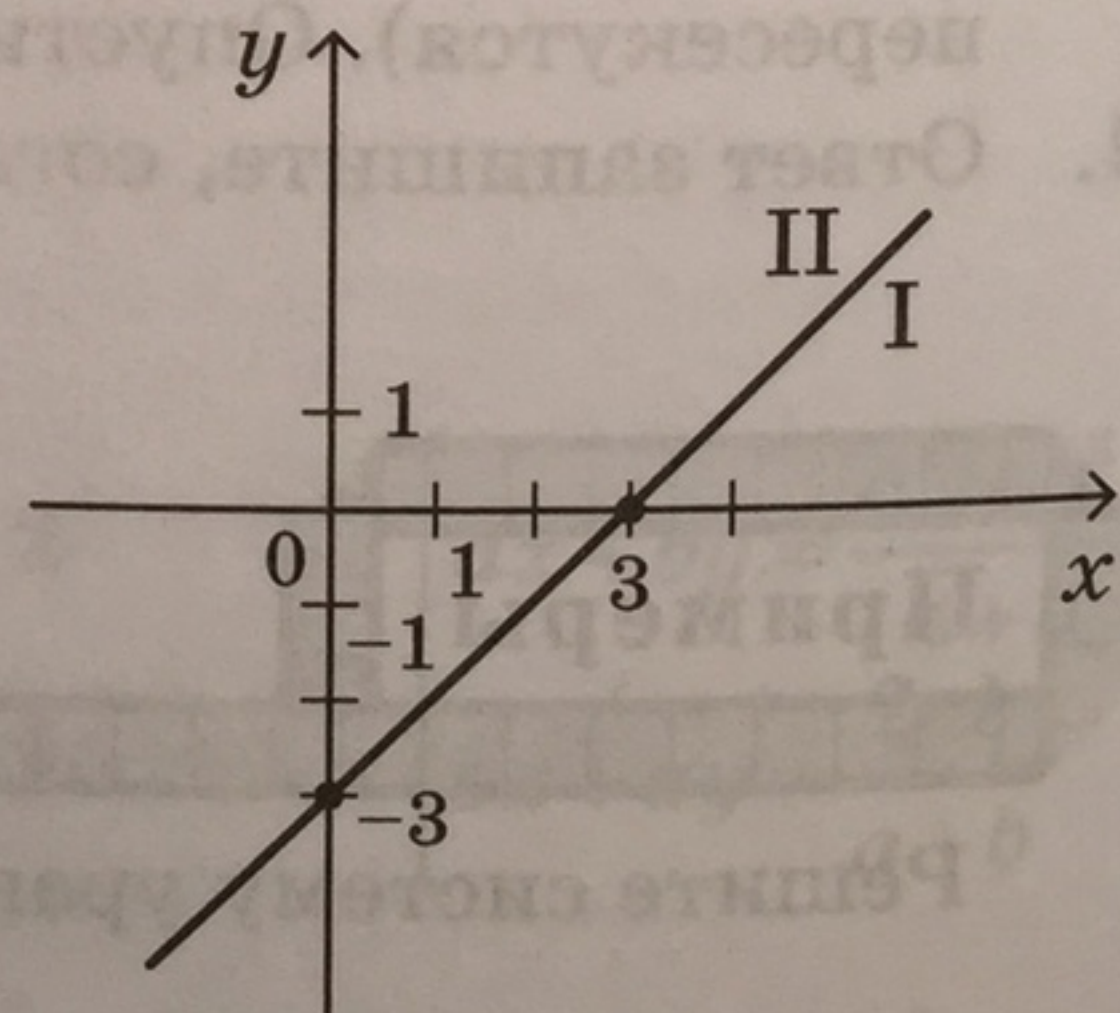


Рис. 26

3). Прямые совпали, система имеет множество решений, координаты любой точки прямой  $x - y = 3$

Ответ: множество решений  $(x_0; x_0 - 3)$  является решением системы.



4. Прямые  $y = 0,5x - 3$ ,  $y = -0,5x + 6$  и  $y = -x + 6$ , попарно пересекаясь, образуют треугольник. Постройте треугольник. Вычислите координаты вершин.

Решение.

(I)  $y = 0,5x - 3$

$x$	0	6
$y$	-3	0

(II)  $y = -0,5x + 6$

$x$	0	2
$y$	6	5

(III)  $y = -x + 6$

$x$	0	6
$y$	6	0

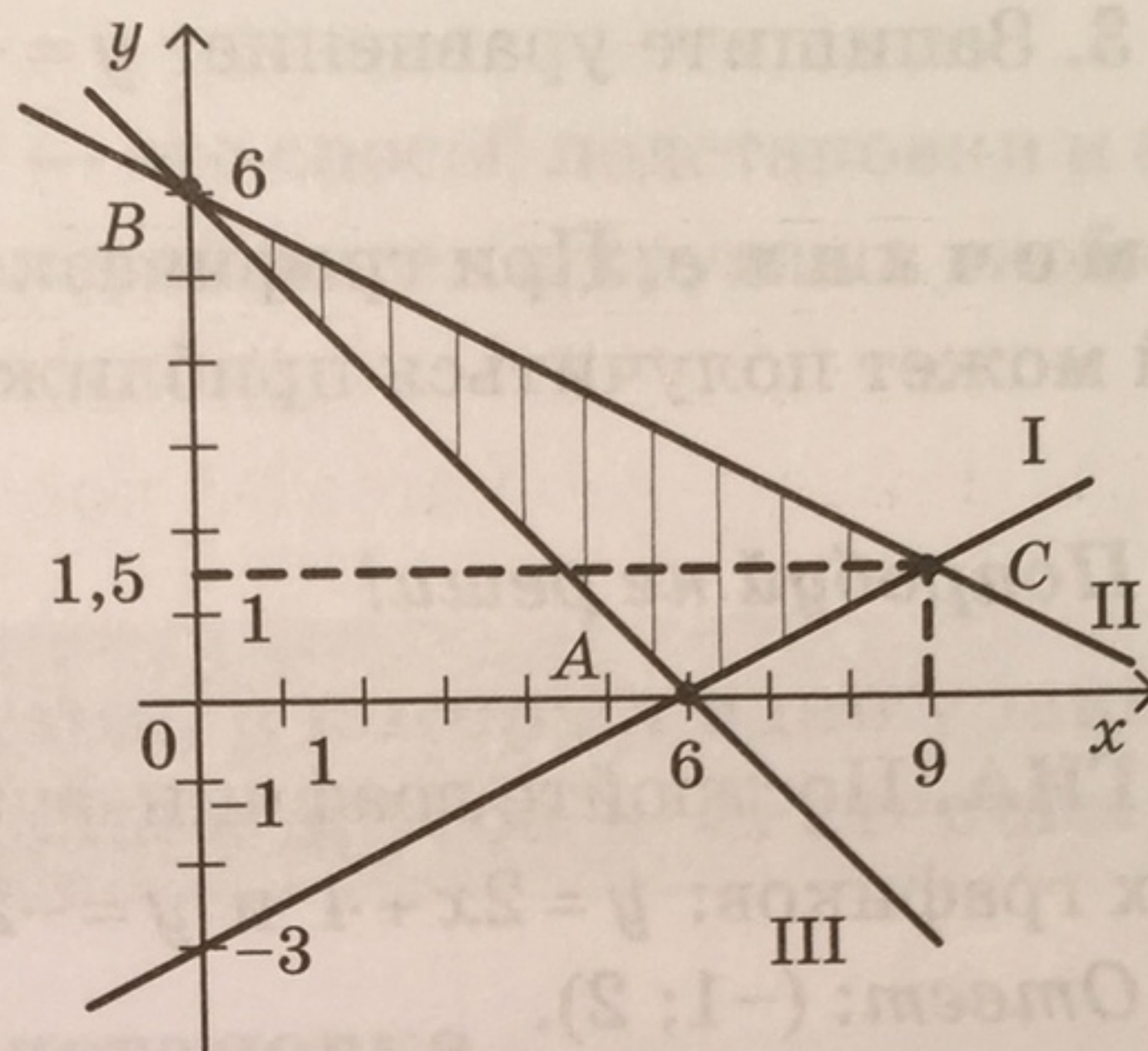


Рис. 27

- 1). Найдите точку пересечения (I) и (II) графиков (рис. 27):  $C(9; 1,5)$  по графику.

- 2). Точку пересечения (II) и (III) графиков:  $B(0; 6)$  (рис. 27).

- 3). Точку пересечения (I) и (III) графиков:  $A(6; 0)$  (рис. 27).

Ответ:  $(9; 1,5)$ ;  $(0; 6)$ ;  $(6; 0)$  — координаты вершин треугольника.

5. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку  $C(8; 3)$  и пересекающей ось  $Ox$  в точке с абсциссой, равной 12.

Дано:  $C(8; 3)$ ;  $D(12; 0)$

Найти:  $y = kx + b$

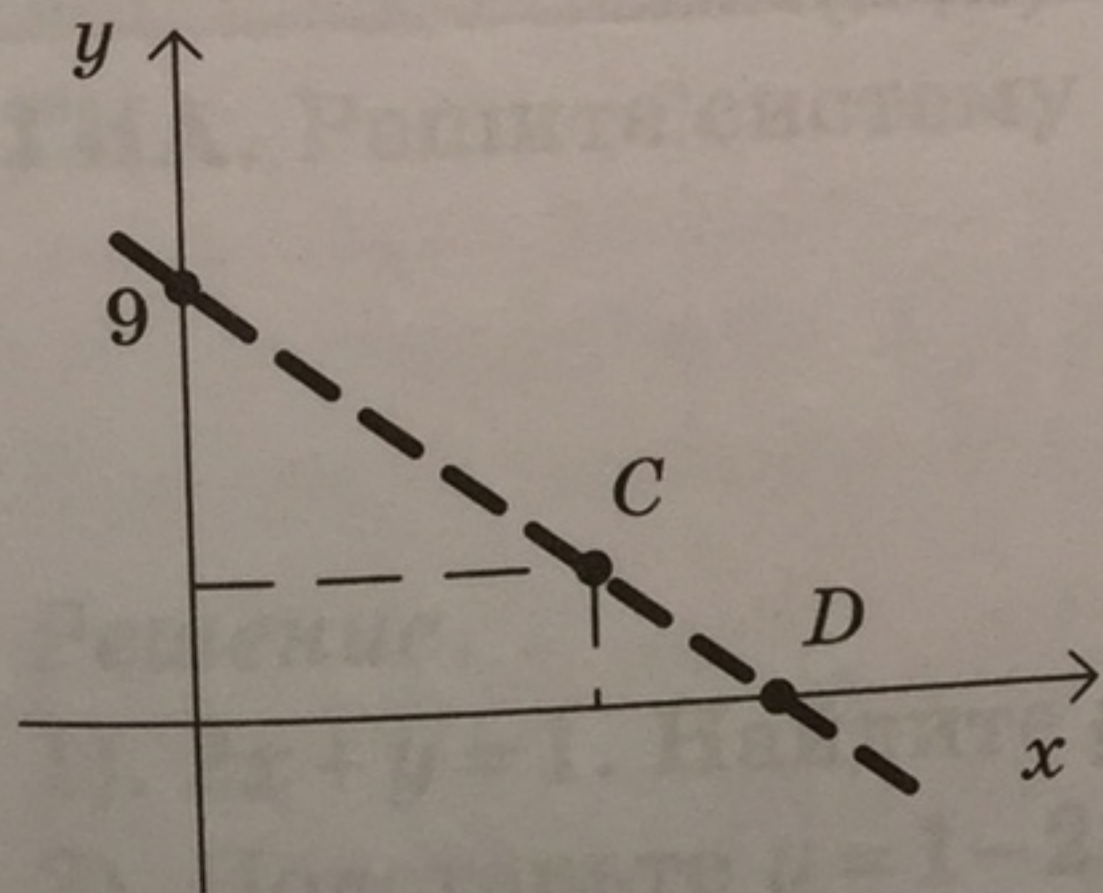


Рис. 28

Решение.

1. Найдем  $k$  и  $b$  в уравнении  $y = kx + b$ . Подставим координаты точек  $C$  и  $D$  в уравнение  $y = kx + b$ :

$$x_c = 8; y_c = 3: 3 = k \cdot 8 + b \text{ (I)}$$

$$x_D = 12; y_D = 0: 0 = k \cdot 12 + b \text{ (II)}$$

$$2. \text{ Решим систему } \begin{cases} 8k + b = 3 \\ 12k + b = 0 \end{cases}$$

$$1). -12k = b; b = -12k$$



$$2). 8k - 12k = 3; -4k = 3 \quad | : (-4); k = -\frac{3}{4}$$

$$3). b = -12 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 9$$

$$3. \text{ Запишите уравнение: } y = -\frac{3}{4}x + 9 \text{ (рис. 28)}$$

**З а м е ч а н и е.** При графическом способе решения системы уравнений может получиться приближенное решение.

*Попробуй не реши!*

**ГИА.** Постройте графики функций и укажите точки пересечения этих графиков:  $y = 2x + 4$  и  $y = -2x$ .

*Ответ:*  $(-1; 2)$ .

*Попробуй-ка реши!*

1. **ГИА.** Запишите уравнение прямой, которая проходит через начало координат и через точку пересечения прямых:  $2x + 3y = -4$  и  $x - y = -7$ .

2. **ГИА.** Прямая  $y = kx + b$  пересекает ось  $Ox$  в точке  $(18; 0)$ , а ось  $Oy$  в точке  $(0; 9)$ . Запишите уравнение этой прямой.

3. **ГИА.** Докажите, что прямые  $y = 3x - 4$ ,  $y = 6 - 2x$  и  $y = 2x - 2$  имеют общую точку.

*Ответ:* 1).  $y = -\frac{2}{5}x$ ; 2).  $y = -\frac{1}{2}x + 9$ ; 3).  $(2; 2)$ .



## § 3.

## Решение систем уравнений II степени

**Определение.** Система двух уравнений с двумя неизвестными называется системой II степени, если хотя бы одно из уравнений имеет II степень.

Общепринятые способы решения — это способ подстановки и сложения. Ответ в системе записывают парой чисел в круглых скобках:  $(x_0; y_0)$ .

## Алгоритм

103

Решение систем, в которых одно уравнение имеет I степень, а другое — II степень

## I способ — подстановка

1. Из уравнения I степени выразите одну переменную через другую (удобно находить переменную с коэффициентом, равным единице).
2. Подставьте полученное выражение п. 1 во второе уравнение и приведите уравнение к квадратному:  $ax^2 + bx + c = 0$ .
3. Решите уравнение п. 2.
4. Каждый корень уравнения п. 3 подставьте в выражение п. 1 и найдите значение второй переменной.
5. Ответ запишите парами:  $(x_1; y_1); (x_2; y_2)$ .

## Пример

ГИА. Решите систему уравнений.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

Решение.

1).  $2x + y = 1$ . Найдите  $y$ :  $y = 1 - 2x$

2). Подставьте  $y = 1 - 2x$  во II уравнение:  $2x^2 + x(1 - 2x) + (1 - 2x)^2 = 1$

3). Решите уравнение с неизвестной  $x$ :  $2x^2 + x - 2x^2 + 1 - 4x + 4x^2 - 1 = 0$



$$4x^2 - 3x = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = -\frac{b}{a}; a = 4; b = -3$$

4). Подставьте  $x_1$  и  $x_2$  в п. 1:  $y = 1 - 2x$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$m \cdot \frac{a}{b} = \frac{m \cdot a}{b}$$

$$2 \cdot \frac{3}{4} + y = 1; y = 1 - \frac{3}{2}; y = -\frac{1}{2}$$

Ответ:  $(0; 1); \left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right)$ .

## II способ — сложение

Алгоритм

104

Решение систем уравнений II степени  
способом сложения

1. Уравняйте коэффициенты у переменной первой степени в обоих уравнениях.
2. Сложите (или вычтите) полученные уравнения, чтобы получилось уравнение с одной переменной.
3. Решите уравнение п. 2.
4. Подставьте корни уравнения п. 3 в уравнение I степени и найдите вторую переменную.
5. Ответ запишите парами:  $(x_1; y_1); (x_2; y_2)$ .

### Пример

ГИА. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x^2 + 3y = 12 \end{cases}$$

Решение.

$$1). \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x^2 + 3y = 12 \end{cases} \quad \begin{matrix} -3 \\ \cdot 2 \end{matrix}$$

$$3). 4x^2 - 9x - 9 = 0$$

$$2). + \begin{cases} -9x - 6y = -15 \\ 4x^2 + 6y = 24 \end{cases}$$

$$4x^2 - 9x = 9$$



$$x_{1,2} = \frac{9 \pm 15}{8};$$

$$x_1 = \frac{9+15}{8} = \frac{24}{8} = 3;$$

$$x_2 = \frac{9-15}{8} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \quad a = 4; \quad b = -9; \quad c = -9;$$

$$D = b^2 - 4ac;$$

$$D = 81 + 144 = 225; \quad \sqrt{225} = 15$$

$$4). \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$3x + 2y = 5; \quad 3 \cdot 3 + 2y = 5; \quad 2y = 5 - 9; \quad y = -2$$

$$5). \begin{cases} x = -\frac{3}{4} \\ y = \frac{29}{8} \end{cases}$$

$$3x + 2y = 5; \quad 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 2y = 5; \quad 2y = 5 + \frac{9}{4};$$

$$2y = \frac{29}{4}; \quad y = \frac{29}{8}$$

Ответ:  $(3; -2); \left(-\frac{3}{4}; \frac{29}{8}\right)$ .

## Проверь себя!

Решите систему уравнений.

$$1. \begin{cases} x^2 + x + y = 6 \\ y - x = 3 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 - xy = 5 \end{cases}$$

Ответ: 1).  $(-3; 0); (1; 4);$  2).  $(2,5; 0,5); (-1; 4)$ .

## Алгоритм

105

Решение систем уравнений вида  $\begin{cases} x + y = b \\ xy = c \end{cases}$  по формулам Виета

1. Примените теорему, обратную теореме Виета, и составьте квадратное уравнение  $z^2 + pz + q = 0$ , где  $p = -(x + y); q = xy$ .
2. Подберите корни  $z_1$  и  $z_2$ .
3. Примите  $\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_2 = y_1 \end{cases}$  или  $\begin{cases} z_2 = x_2 \\ z_1 = y_2 \end{cases}$
4. Ответ запишите парами:  $(x_1; y_1); (x_2; y_2)$ .



### Примеры

Решите систему уравнений.

1. 
$$\begin{cases} xy = 12 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

Решение.

$$1). \quad z^2 - 7z + 12 = 0 \quad \left| \quad z^2 + pz + q = 0 \quad \begin{cases} z_1 + z_2 = -7 \\ z_1 \cdot z_2 = 12 \end{cases} \right.$$

2). Корни:  $z_1 = 3; z_2 = 4$

3). 
$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 4 \end{cases}; \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

Ответ: (3; 4); (4; 3).

2. 
$$\begin{cases} xy = -30 \\ x - y = 11 \end{cases}$$

Решение. Можно решать такую систему и способом подстановки, и по формулам Виета.

1).  $x - y = x + (-y) = 11; p = -11$

$x(-y) = -30; q = xy = 30$

2).  $z^2 - 11z + 30 = 0$  | вместо  $y$  берите  $(-y)$

3).  $z_1 = 5; z_2 = 6.$

4). 
$$\begin{cases} z_1 = x_1 = 5 \\ z_2 = -y_1 = -6 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} z_2 = x_2 = 6 \\ z_1 = -y_2 = -5 \end{cases}$$

Ответ: (5; -6); (6; -5).

3. ГИА. 
$$\begin{cases} x + y = 8 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Решение.

1). 
$$\begin{cases} x + y = 8 \\ \frac{y + x}{xy} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

ОДЗ:  $x \neq 0; y \neq 0$

Подставьте вместо  $x + y$  число 8 в числитель дроби



$$2). \begin{cases} x+y=8 \\ \frac{8}{xy}=\frac{2}{3} \end{cases}; \begin{cases} x+y=8 \\ 2xy=24 \end{cases}; \begin{cases} x+y=8 \\ xy=12 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} p=-(x+y)=-8; q=xy=12; \\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}; bc=ad \end{array} \right.$$

$$3). z^2 - 8z + 12 = 0 \\ z_1 = 2; z_2 = 6$$

$$4). \begin{cases} z_1 = x_1 = 2 \\ z_2 = y_1 = 6 \end{cases}; \begin{cases} z_2 = x_2 = 6 \\ z_1 = y_2 = 2 \end{cases}$$

Ответ: (2; 6); (6; 2).

$$4. \begin{cases} x+y=3a \\ xy=2a^2 \end{cases}$$

Решение.

$$z^2 - 3az + 2a^2 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} x+y=-p=-3a; xy=q=2a^2 \\ z_1=2a; z_2=a \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} z_1 = x_1 = 2a \\ z_2 = y_1 = a \end{cases}; \begin{cases} z_2 = x_2 = a \\ z_1 = y_2 = 2a \end{cases}$$

Ответ: (2a; a); (a; 2a).

Единого алгоритма решения систем уравнений II степени нет, поэтому рассмотрим отдельные случаи их решения.

### Примеры

Решите систему уравнений.

$$1. \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Решение.

Можно удвоить  $xy$  и сложить левые и правые части уравнений.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases} \quad \left| \cdot 2 \right. \quad + \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 2xy = 4 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} (x+y)^2 = 9 \\ xy = 2 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \\ \sqrt{a^2} = |a| \end{array} \right.$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 9$$



$$\begin{cases} \sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{9}; \\ xy = 2 \end{cases}; \begin{cases} |x+y| = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

$$1). \begin{cases} x+y=3; \\ xy=2 \end{cases}; z^2 - 3z + 2 = 0; \begin{cases} x_1=2; \\ y_1=1 \end{cases}; \begin{cases} x_2=1 \\ y_2=2 \end{cases}$$

$$z^2 - 3z + 2 = 0$$

$$2). \begin{cases} x+y=-3; \\ xy=2 \end{cases}; z^2 + 3z + 2 = 0; \begin{cases} x_3=-2; \\ y_3=-1 \end{cases}; \begin{cases} x_4=-1 \\ y_4=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1+z_2=3; \\ z_1 \cdot z_2=2 \end{cases}; \begin{cases} z_1=1 \\ z_2=2 \end{cases}$$

$$z^2 + 3z + 2 = 0$$

Ответ:  $(-2; -1); (-1; -2); (1; 2); (2; 1)$ .

$$z_1 = -1; z_2 = 2$$

$$2. \begin{cases} x^2 + 2y + 1 = 0 \\ y^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

Решение. Сложите почленно левые и правые части уравнений:

$$1). \begin{cases} x^2 + 2y + 1 = 0 \\ y^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \\ \hline x^2 + 2y + 1 + y^2 + 2x + 1 = 0$$

2). Сгруппируем члены:

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) = 0$$

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0; x = -1$$

$$(y+1)^2 = 0; y = -1$$

Ответ:  $(-1; -1)$ .

$$a^2 + b^2 = 0,$$

$$\text{если } a^2 = 0 \text{ и } b^2 = 0$$

### Решение систем уравнений, сводящихся к квадратным

$$3. \begin{cases} xy^3 + x^3y = -10 \\ x^2y^4 + x^4y^2 = 20 \end{cases}$$

Решение.

$$1). \begin{cases} xy(y^2 + x^2) = -10 \\ x^2y^2(x^2 + y^2) = 20 \end{cases}$$

Вынесите за скобки общие множители

$$2). \frac{x^2y^2(x^2 + y^2)}{xy(y^2 + x^2)} = \frac{20}{-10}; xy = -2; x = -\frac{2}{y}$$

Почленно разделите II уравнение на I уравнение, если  $x \neq 0; y \neq 0$



3).  $x = -\frac{2}{y}$  подставьте в I уравнение

4).  $-\frac{2 \cdot y^3}{y} + \left(-\frac{2}{y}\right)^3 \cdot y = -10; \quad -2y^2 - \frac{8}{y^2} = -10 \quad | :(-2)$

5).  $\begin{cases} y^2 + \frac{4}{y^2} - 5 = 0 \\ y^2 = t; \quad t > 0 \end{cases}$

6).  $t + \frac{4}{t} - 5 = 0; \quad t^2 - 5t + 4 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} t_1 + t_2 = -p = 5 \\ t_1 \cdot t_2 = q = 4 \end{array} \right.$   
 $t_1 = 1; \quad t_2 = 4$

7).  $\begin{cases} t = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases}$  или  $\begin{cases} t = 4 \\ y^2 = 4 \end{cases}$

8).  $y_1 = 1; \quad y_2 = -1; \quad y_3 = 2; \quad y_4 = -2$

9).  $\begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_3 = -1 \\ y_3 = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_4 = 1 \\ y_4 = -2 \end{cases} \quad \left| \quad x = -\frac{2}{y} \right.$

Ответ: (2; -1); (-2; 1); (1; -2); (-1; 2).

4.  $\begin{cases} x^4 + y^4 = 82 \\ xy = 3 \end{cases}$

Решение.

1). Возведем в квадрат обе части уравнения  $xy = 3$ :  $x^2y^2 = 9$   
 и удвоим:  $2x^2y^2 = 18$

2).  $\begin{cases} x^4 + y^4 = 82 \\ 2x^2y^2 = 18 \end{cases} \quad \begin{array}{r} x^4 + y^4 = 82 \\ 2x^2y^2 = 18 \\ \hline x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 100 \end{array}$

3).  $\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 = 100 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = 6 \end{cases} \quad \begin{array}{r} (x^2 + y^2)^2 = 100 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = 6 \\ \hline (x + y)^2 = 16 \end{array}$

$\begin{cases} \sqrt{a^2} = a; \quad a \geq 0 \\ |x + y| = 4 \end{cases}$

4).  $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$  или  $\begin{cases} x + y = -4 \\ xy = 3 \end{cases}$

$t^2 - 4t + 3 = 0; \quad t_1 = 3; \quad t_2 = 1 \quad \left| \quad z^2 + 4z + 3 = 0; \quad z_1 = -3; \quad z_2 = -1 \right.$



$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ y_1 = 1 \end{array} \right. \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 1 \\ y_2 = 3 \end{array} \right. \quad \left| \quad \left\{ \begin{array}{l} x_3 = -3 \\ y_3 = -1 \end{array} \right. \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} x_4 = -1 \\ y_4 = -3 \end{array} \right.$$

Ответ: (3; 1); (1; 3); (-3; -1); (-1; -3).

**Попробуй-ка реши!**

1. 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} x^2 + xy + x = 14 \\ y^2 + xy + y = 28 \end{cases}$$

3. При каких значениях  $a$  система  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ xy = a \end{cases}$  имеет два решения?

Ответ: 1). (2; 3); (3; 2);  $\left( \frac{2 - \sqrt{22}}{2}; \frac{2 + \sqrt{22}}{2} \right); \left( \frac{2 + \sqrt{22}}{2}; \frac{2 - \sqrt{22}}{2} \right);$

2). (2; 4);  $\left( -\frac{7}{3}; -\frac{14}{3} \right);$  3).  $a = \pm 0,5.$



## Глава X. Решение задач (моделирование)

1. Решение задач с помощью уравнений I степени.
2. Решение задач с помощью систем уравнений I степени.
3. Решение задач с помощью систем уравнений II степени.
4. Решение задач на движение, работу и стоимость товара с помощью дробно-рациональных уравнений.
5. Решение задач на проценты.
6. Решение задач на прогрессии см. в главе XI «Прогрессии».

При решении всех типов задач главное внимание уделите записи условия задачи через  $a, b, c, \dots, x$  и составлению основной формулы решения, т. е. модели решения задачи, используя данные и вопрос задачи, без использования числовых значений. Алгоритмы задач разных типов имеют только детальное отличие. Задачи разбиты на темы, изучаемые в 7, 8, 9-м классах, поэтому необходимо найти нужную тему и изучить ее. Такое расположение удобно при повторении в 9-м классе при подготовке к экзамену.

### Решение задач по курсу математики 7–9-го классов

Модель решения задачи — это общая формула решения, составленная, как правило, по основной мысли задачи. Например, если в задаче дано общее количество, то модель решения задачи из суммы объектов:  $a + b + c = Q$ ; если один объект больше другого, то модель решения  $a - b = c$ ; если объекты равны, то  $a = b$ .

Поэтому практически все базовые задачи решаются по одному алгоритму, с помощью модели решения.



## Общий алгоритм решения задач

1. Запишите кратко условие задачи «Дано» и «Найти», обозначив все данные задачи  $a, b, c...$  (Удобно все данные занести в таблицу.)
2. Составьте модель (общую формулу) решения по основному условию.
3. Меньшую величину обозначьте  $x$  и найдите ОДЗ  $x$ .
4. Выразите через  $x$  условные обозначения  $a, b, c$ .
5. Подставьте в общую формулу величины п. 4 и запишите уравнение.
6. Решите уравнение п. 5.
7. Найдите величину, согласно условию задачи и ОДЗ.
8. Ответ запишите полностью.



## § 1.

## Решение задач с помощью уравнений I степени

## Алгоритм

106

## Решение задач с помощью уравнений I степени

- Запишите «дано» и «найти», обозначив данные задачи буквами  $a, b, c$ .
- Составьте (модель) основную формулу решения задачи:
  - если сказано, сколько было «всего» или «вместе», то формула решения будет  $a + b + c = Q$ ;
  - если сказано, что величины равны, то  $a = b$ ;
  - если одна величина больше другой, то  $a - b = c$ ;
  - если задача на движение, то обозначьте  $S$  — путь,  $v$  — скорость и  $t$  — время; формулу составляйте относительно пути:
 
$$S = S_1 + S_2 \text{ — если весь путь}$$

$$S = S_2 - S_1 \text{ — если сравнивают путь}$$

$$S_1 = S_2 \text{ — если пути равны}$$
- Обозначьте меньшую величину буквой  $x$  и остальные величины выразите через  $x$ .
- Подставьте величины п. 3 в формулу решения п. 2 и решите уравнение.
- Найдите величину по условию задачи.
- Ответ запишите полностью.

## Примеры

- ГИА. Во время путешествия Николай проделал путь в 1100 км на самолете и в автобусе. На самолете он пролетел расстояние в 4,5 раза больше, чем проехал в автобусе. Какое расстояние Николай пролетел на самолете?

Дано:

Самолет	$S_1$	$> S_2$ в 4,5 раза
Автобус	$S_2$	

Всего 1100 км



**Найти:** какое расстояние Николай пролетел на самолете?

**Решение.**

Модель решения:  $S_1 + S_2 = 1100$

Пусть  $S_2 = x$  км, тогда  $S_1 = 4,5x$  км. Получим уравнение:

$$\begin{array}{l|l} x + 4,5x = 1100; 5,5x = 1100 & : 5,5 \\ \hline x = 1100 : 5,5; x = 200 & \end{array} \quad \begin{array}{l} S_1 + S_2 = 1100 \\ 1100 : 5,5 = 11000 : 55 = 200 \end{array}$$

$S_2 = 200$  (км) проехал в автобусе,  $a = 1100 - 200 = 900$  (км) пролетел на самолете

**Ответ:** на самолете Николай пролетел 900 км.

2. Поезд имеет в своем составе цистерны, платформы и товарные вагоны. Цистерн на 4 меньше, чем платформ, и в 2 раза меньше, чем товарных вагонов. Сколько в составе поезда отдельно цистерн, платформ и товарных вагонов, если их общее число равно 68?

**Дано:**

Платформы	$a$	$> b$ на 4
Цистерны	$b$	— меньшее
Вагоны	$c$	$> b$ в 2 раза

Всего 68

**Найти:** сколько в составе поезда цистерн, платформ и товарных вагонов?

**Решение.**

Модель решения:  $a + b + c = 68$  | По условию задачи «всего» было 68

Пусть  $b = x$  ( $b$  — меньшее), тогда  $a = x + 4$ ,  $c = 2x$

Подставьте  $a$ ,  $b$ ,  $c$  в формулу решения  $a + b + c = 68$ :

$$x + 4 + x + 2x = 68; 4x = 68 - 4;$$

$$4x = 64 \quad | : 4; x = 16$$

$b = x$ , значит, цистерн было 16

$a = b + 4$  — платформ было  $16 + 4 = 20$

$c = 2b$  — вагонов было  $16 \cdot 2 = 32$

**Ответ:** в составе поезда было 16 цистерн, 20 платформ и 32 товарных вагонов.

3. ГИА. Для распечатки 340 страниц были использованы две копировальные машины. Первая машина работала 10 минут, а вторая — 15 минут. Сколько страниц в минуту печатает каждая машина, если первая в минуту печатает на 4 страницы больше, чем вторая?



Дано:	$v$		$Q = 340$ стр.	$t$ , мин
I машина	$a$ страниц в минуту	$> b$ на 4 стр.	$Q_1$	10
II машина	$b$ страниц в минуту		$Q_2$	15

Всего 340 страниц

**Найти:** сколько страниц в минуту печатает каждая машина?**Решение.**Модель решения:  $Q_1 + Q_2 = 340$ 

$$10a + 15b = 340 \quad | \quad Q_1 = 10a; \quad Q_2 = 15b$$

Пусть  $b = x$  страниц в минуту печатает II машина, тогда  $a = x + 4$  страниц в минуту печатает I машина. Подставив  $a$  и  $b$  в формулу решения, получим уравнение:

$$10 \cdot (x + 4) + 15x = 340; \quad 10x + 40 + 15x = 340 \quad | \quad 10 \cdot a + 15 \cdot b = 340$$

$$25x = 340 - 40; \quad 25x = 300; \quad x = 12$$

 $b = 12$  страниц в минуту печатает II машина $a = 12 + 4 = 16$  страниц в минуту печатает I машина**Ответ:** первая машина печатает 16 страниц в минуту, а вторая — 12 страниц в минуту.

**Полезный совет.** Задачи такого типа похожи на задачи на движение, где количество страниц в минуту — скорость ( $v$ ), количество всех страниц — путь ( $Q$ ) и время печати — время движения ( $t$ ).

4. Расстояние между двумя пунктами катер прошел по течению реки за 3 часа 30 минут, а против течения за 6 часов 18 минут. Определить расстояние между пунктами, если скорость течения реки равна 2,4 км/ч.

Дано:	$S$	$v_{\text{катера}}$ , км/ч	$t$ , ч
По течению	$S_1$	$v_k + 2,4$	3,5
Против течения	$S_2$	$v_k - 2,4$	6,3

$$3 \text{ ч } 30 \text{ мин} = 3\frac{1}{2} = 3,5 \text{ ч}$$

$$6 \text{ ч } 18 \text{ мин} = 6\frac{18}{60} = 6\frac{3}{10} = 6,3 \text{ ч}$$

$$v_{\text{реки}} = 2,4 \text{ км/ч}$$

**Найти:**  $S$  — расстояние между пунктами.



**Решение.**

Основная формула (модель) решения:  $S_1 = S_2$

Пусть  $v_{\text{катера}} = x$  км/ч, тогда:

$$v_{\text{по течению}} = x + 2,4 \text{ (км/ч)}$$

$$v_{\text{против течения}} = x - 2,4 \text{ (км/ч)}$$

$$S_1 \text{ по течению} = (x + 2,4) \cdot 3,5 \text{ (км)}$$

$$S_2 \text{ против течения} = (x - 2,4) \cdot 6,3 \text{ (км)}$$

Подставьте  $S_1$  и  $S_2$  в формулу решения:

$$(x + 2,4) \cdot 3,5 = (x - 2,4) \cdot 6,3 \quad | \quad S_1 = S_2$$

Решение уравнения:

$$3,5x + 2,4 \cdot 3,5 = 6,3x - 2,4 \cdot 6,3$$

$$2,4 \cdot 3,5 + 2,4 \cdot 6,3 = 6,3x - 3,5x$$

$$2,8x = 2,4 \cdot (3,5 + 6,3)$$

$$2,8x = 2,4 \cdot 9,8 \quad | : 2,8$$

$$x = 2,4 \cdot 3,5$$

$$x = 8,4$$

$$v_{\text{катера}} = 8,4 \text{ км/ч,}$$

$$\text{тогда } S = (8,4 - 2,4) \cdot 6,3 = 6 \cdot 6,3 = 37,8 \approx 40 \text{ км}$$

**Ответ:** расстояние между пунктами равно  $37,8 \approx 40$  км.

5. ГИА. Для приготовления мороженого надо взять воду, сливки и сахар. Воды требуется в 2,5 раза больше, чем сливок, а сахара на 0,1 кг больше, чем сливок. Сколько воды, сливок и сахара требуется для приготовления 1 кг мороженого?

**Дано:**

Вода	$a > b$ в 2,5 раза
Сливки	$b$
Сахар	$c > b$ на 0,1 кг

Всего 1 кг

**Найти:** сколько воды, сливок и сахара требуется для приготовления 1 кг мороженого?

**Решение.**

Модель решения:  $a + b + c = 1$

Пусть  $b = x$  кг взяли сливок ( $b$  — наименьшее),

тогда  $a = 2,5x$  кг взяли воды,  $c = x + 0,1$  кг взяли сахара

Подставьте  $a$ ,  $b$ ,  $c$  в формулу решения:  $2,5x + x + x + 0,1 = 1$

$$4,5x = 1 - 0,1; 4,5x = 0,9 \quad | : 4,5 \quad | \quad 0,9 : 4,5 = 9 : 45 = 0,2$$

$$x = 0,2$$



$b = 0,2$  кг взяли сливок;  $a = 2,5 \cdot 0,2 = 0,5$  кг воды;  
 $c = 0,2 + 0,1 = 0,3$  кг взяли сахара

Ответ: для приготовления 1 кг мороженого взяли 0,2 кг сливок, 0,5 кг воды и 0,3 кг сахара.

6. Расстояние между двумя поселками 9 км. Дорога имеет подъем, равнинный участок и спуск. Скорость пешехода на подъеме равна 4 км/ч, на равнинном участке 5 км/ч, а на спуске 6 км/ч. Сколько километров составляет равнинный участок, если пешеход проходит расстояние от одного поселка до другого и обратно за 3 часа 41 минуту?

Дано:	$S$	$v$	$t$
Подъем	$S_1$	4 км/ч	Всего 3 ч 41 мин туда и обратно
Равнина	$S_2$	5 км/ч	
Спуск	$S_3$	6 км/ч	
	Весь путь $S = 9$ км		

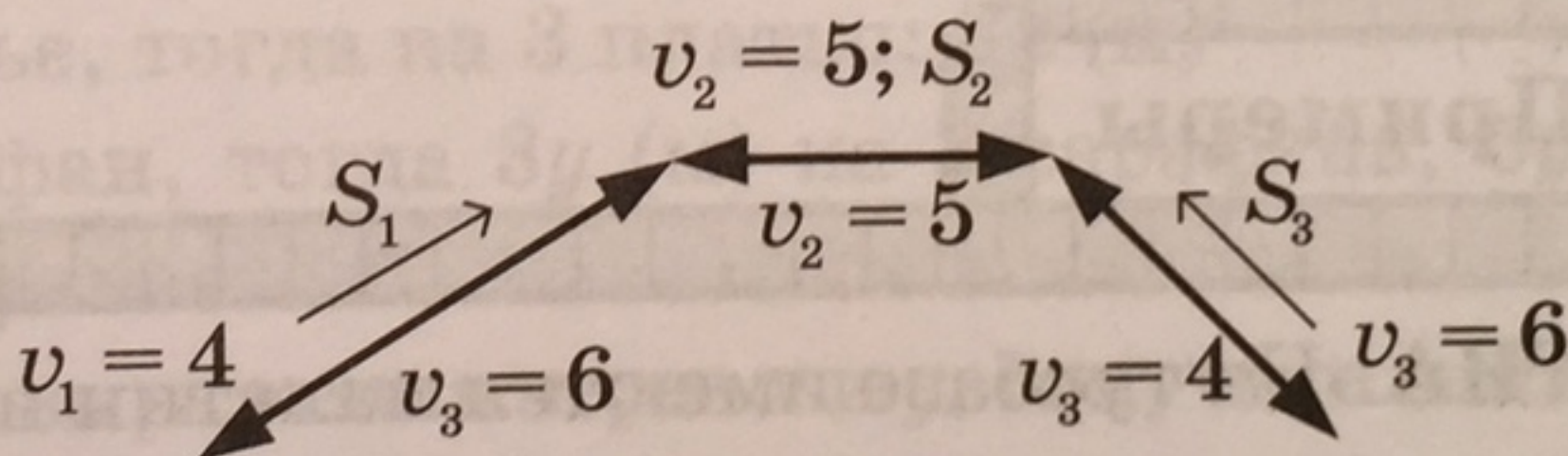
Найти: сколько километров составляет равнинный участок  $S_2$ ?

Решение.

Модель решения:  $t_{\text{туда}} + t_{\text{обратно}} = 3 \text{ ч } 41 \text{ мин}$

$$t_{\text{туда}} = \frac{S_1}{4} + \frac{S_2}{5} + \frac{S_3}{6}$$

$$t_{\text{обратно}} = \frac{S_3}{4} + \frac{S_2}{5} + \frac{S_1}{6}$$



Подставьте в формулу решения  $t_{\text{туда}}$  и  $t_{\text{обратно}}$ :

$$\frac{^{15)}S_1}{4} + \frac{^{12)}S_2}{5} + \frac{^{10)}S_3}{6} + \frac{^{15)}S_3}{4} + \frac{^{12)}S_2}{5} + \frac{^{10)}S_1}{6} = 3 \frac{41}{60}$$

$$\frac{25S_1 + 24S_2 + 25S_3}{60} = \frac{221}{60} \quad | \cdot 60$$

$$\text{НОК}(4; 5; 6) = 60$$

$$3 \text{ ч } 41 \text{ мин} = 3 \frac{41}{60} =$$

$$= \frac{3 \cdot 60 + 41}{60} = \frac{221}{60}$$

$$25S_1 + 24S_2 + 25S_3 = 221 \quad | + S_2; \quad 25S_1 + 25S_2 + 25S_3 = 221 + S_2$$

$$25 \left( \underbrace{S_1 + S_2 + S_3}_9 \right) = 221 + S_2 \quad \left| \begin{array}{l} S_1 + S_2 + S_3 = 9 \end{array} \right.$$

$$225 = 221 + S_2; \quad S_2 = 225 - 221 = 4 \text{ (км)}$$

Ответ: равнинный участок равен 4 км.



## § 2.

Решение задач с помощью систем уравнений  
I степени

## Алгоритм

107

Решение задач с помощью  
систем уравнений I степени

1. Запишите кратко условие задачи: «Дано» и «Найти» через условные обозначения  $a, b, c, v, S, t...$
2. Составьте две формулы решения через условные обозначения по условию задачи.
3. Обозначьте неизвестные  $x$  и  $y$ .
4. Выразите через  $x$  и  $y$  условные обозначения.
5. Подставьте в формулы решения данные п. 4 и запишите систему двух уравнений.
6. Решите систему.
7. Ответ запишите, согласно смыслу задачи.

## Примеры

1. ГИА. На турбазе имеются палатки и домики, всего их 25. В каждом домике живут 4 человека, а в каждой палатке по 2 человека. Сколько на турбазе палаток и домиков, если на турбазе отдыхают 70 человек.

1). Дано:

Палатки	$a$	В одной 2 человека	$2a$ человек
Домики	$b$	В одном 4 человека	$4b$ человек
Всего	25		Всего 70 человек

Найти: сколько палаток и домиков на турбазе?

Решение.

2). Формулы (модель) решения:

$$1. a + b = 25; 2. 2a + 4b = 70 \mid : 2; \quad a + 2b = 35$$

3). Пусть  $a = x$  палаток,  $2x$  человек в палатках  
 $b = y$  домиков,  $4y$  человек в домиках



4). Составим систему: 
$$\begin{cases} x + y = 25 \\ x + 2y = 35 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} a + b = 25 \\ a + 2b = 35 \end{cases} \right.$$

5). 1).  $x = 25 - y$

2).  $25 - y + 2y = 35$ ;  $25 + y = 35$

3).  $y = 35 - 25$ ;  $y = 10$ ;  $b = 10$  домиков

4).  $x = 25 - 10$ ;  $x = 15$ ;  $a = 15$  палаток

Ответ: на турбазе было 10 домиков и 15 палаток.

2. ГИА. На одно платье и три сарафана пошло 9 м ткани, а на три таких же платья и пять таких же сарафанов — 19 м ткани. Сколько ткани требуется на одно платье и сколько — на один сарафан?

Дано:

Платья	$a$ м на 1	1	3
Сарафаны	$b$ м на 1	3	5
Ткань	всего	9 м	19 м

Найти: сколько метров ткани требуется на одно платье и сколько — на один сарафан?

Решение.

Формулы (модель) решения: 1.  $a \cdot 1 + b \cdot 3 = 9$ ; 2.  $a \cdot 3 + b \cdot 5 = 19$

Пусть  $a = x$  (м) на 1 платье, тогда на 3 платья:  $3x$  (м)

$b = y$  (м) на 1 сарафан, тогда  $3y$  (м) на 3 сарафана,  $5y$  (м) на 5 сарафанов

Подставьте вместо  $a$  и  $b$  их выражения через  $x$  и  $y$ , получите систему:

$$\begin{cases} x + 3y = 9 \\ 3x + 5y = 19 \end{cases} \quad \left| \cdot (-3) \right. + \begin{cases} -3x - 9y = -27 \\ 3x + 5y = 19 \end{cases}$$

$$\hline -4y = -8 \quad | : (-4)$$

$y = 2$ , значит,  $b = 2$  м ткани пошло на 1 сарафан

$x + 3 \cdot 2 = 9$ ;  $x + 6 = 9$ ;  $x = 3$ ;  $a = 3$  м ткани пошло на 1 платье

Ответ: на одно платье требуется 3 м ткани, а на один сарафан требуется 2 м ткани.

3. ГИА. У мальчика было 15 монет: пятикопеечные и десятикопеечные, всего на сумму 95 копеек. Сколько было пятикопеечных и сколько было десятикопеечных монет?

Дано:

Монеты по 5 коп.	$a$	Всего 95 коп.
Монеты по 10 коп.	$b$	
Всего монет	15	



**Найти:** сколько было пятикопеечных и сколько было десятикопеечных монет?

**Решение.**

Формулы (модель) решения: 1.  $a + b = 15$ ; 2.  $5a + 10b = 95$

Пусть  $a = x$  монет по 5 коп.,  $5x$  копеек в пятикопеечных монетах;  
 $b = y$  монет по 10 копеек, тогда  $10y$  копеек в десятикопеечных монетах.

Подставьте в модель решения  $a$  и  $b$ , выраженные через  $x$  и  $y$ , и составьте систему:

$$1). \begin{cases} x + y = 15 \\ 5x + 10y = 95 \end{cases} : 5 \quad 2). \begin{cases} x + y = 15 \\ x + 2y = 19 \end{cases} \quad | \cdot (-1)$$

$$3). + \begin{cases} -x - y = -15 \\ x + 2y = 19 \end{cases} \quad 4). \begin{cases} y = 4 \\ x = 15 - 4 \end{cases} \quad 5). \begin{cases} y = 4 \\ x = 11 \end{cases}$$

$$\underline{\hspace{1.5cm}} \quad y = 4$$

$b = 4$  — монеты по 10 копеек

$a = 11$  — монеты по 5 копеек

**Ответ:** у мальчика было 4 десятикопеечных монеты и 11 пятикопеечных монет.

**Попробуй не реши!**

**Задача.** За три пары лыж и четыре пары коньков уплатили 4700 рублей. Сколько стоит пара лыж и сколько стоит пара коньков, если две пары коньков дороже одной пары лыж на 100 рублей.

**Ответ:** 900 руб. и 500 руб.

**Попробуй-ка реши!**

**Задача.** По окружности, длина которой 999 м, движутся два тела по одному и тому же направлению и встречаются через каждые 37 минут. Определите скорость каждого тела, если известно, что скорость первого в 4 раза больше скорости второго.

**Ответ:** 36 м/мин; 9 м/мин.



## §3.

## Задачи на движение, работу и стоимость товара

Во всех задачах данного типа присутствуют три величины:

Движение	Работа	Стоимость
$S$ — путь (км; м)	$A$ — работа (1)	$C$ — стоимость
$v$ — скорость (км/ч; м/с)	$p$ — производитель- ность (скорость за ед. времени)	товара
$t$ — время (ч; мин; с)	$t$ — время (ч; мин; с)	$q$ — стоимость единицы товара
$S = v \cdot t$	$A = p \cdot t$	$r$ — количество товара
$v = S : t$	$p = A : t$	$C = q \cdot r$
$t = S : v$	$t = A : p$	$q = C : r$
		$r = C : q$

Принцип решения задач на движение, работу и стоимость товара можно записать одним алгоритмом.

## Алгоритм

108

## Решение задач на движение, работу и стоимость товара

1. Запишите кратко условие задачи через условные обозначения:  $S, v, t$ , или  $A, p, t$ , или  $C, q, r$ .
2. Составьте модель решения задачи, обычно относительно времени (или стоимости единицы товара).

Например, составление модели для задач на движение:

- 1). Движение одновременное навстречу друг другу до встречи:

$$t_1 = t_2$$

- 2). Движение туда и обратно с остановкой:

$$t_{\text{общее}} = t_{\text{туда}} + t_{\text{обратно}} + t_{\text{остановка}}$$

- 3). Движение одновременное в одном направлении:

$$t_2 = t_1 + t_0, t_0 — \text{число}$$

- 4). Движение по течению и против течения:

$$t_{\text{общее}} = t_{\text{по течению}} + t_{\text{против течения}} \text{ или } t_{\text{общее}} = t_{\text{против течения}} + t_0, t_0 — \text{число}$$

Для задач на работу:

- 1). Работа по плану и сверх плана:

$$t_{\text{по плану}} = t_{\text{реальное (сверх плана)}} + t_0, t_0 — \text{число}$$



2). Совместная работа (например, две трубы):

$$t_2 - t_1 = t_0, t_0 \text{ — число}$$

3. Меньшую величину примите за  $x$  (обычно скорость или производительность).
4. Выразите через  $x$  другую скорость.
5. Выразите  $t_1$  и  $t_2$  через  $S$  и  $v$ :  $t_1 = \frac{S_1}{v_1}$ ;  $t_2 = \frac{S_2}{v_2}$  или  $t_1 = \frac{A}{p}$  и т. д.
6. Подставьте  $t, t_1, t_2$  в модель решения.
7. Решите уравнение относительно  $x$ , учитывая ОДЗ ( $S, v, t, A, p, t, C, q, r$  — положительные величины).
8. Найдите величину, которую требуется найти по условию задачи.
9. Ответ запишите полностью.

### Примеры

1. ГИА. Из города А в город В, расстояние между которыми 120 км, выехали одновременно два велосипедиста. Скорость первого на 3 км/ч больше скорости второго, поэтому он прибыл в город В на 2 часа раньше. Определите скорости велосипедистов.

Дано:

I велосипедист	$t_1$	$v_1 > v_2$ на 3 км/ч	$S = 120$ км
II велосипедист	$t_2 > t_1$ на 2 ч	$v_2$ — меньшее	$S = 120$ км

Найти:  $v_1, v_2$

Модель решения задачи:  $t_2 - t_1 = 2$

Решение.

1). Пусть  $v_2 = x$  км/ч, тогда  $v_1 = x + 3$  (км/ч)

$$2). t_1 = \frac{S_1}{v_1} = \frac{120}{x+3} \text{ час}; t_2 = \frac{S_2}{v_2} = \frac{120}{x} \text{ час}$$

3). Подставьте  $t_1$  и  $t_2$  в формулу решения  $t_2 - t_1 = 2$ :

$$\frac{120}{x} - \frac{120}{x+3} = 2 \quad | \cdot x(x+3) \quad \left| \begin{array}{l} \text{ОДЗ: } x > 0 \\ \text{ОЗ: } x(x+3) \end{array} \right.$$



4). Решите уравнение:

$$\frac{120x(x+3)}{x} - \frac{120x(x+3)}{x+3} = 2x(x+3)$$

$$120(x+3) - 120x = 2x^2 + 6x$$

$$120x + 360 - 120x = 2x^2 + 6x$$

$$2x^2 + 6x - 360 = 0 \quad | :2$$

$$x^2 + 3x - 180 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{729}}{2} = \frac{-3 \pm 27}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 27}{2} = 12 \text{ — удовлетворяет ОДЗ}$$

$$x_2 = \frac{-3 - 27}{2} = -15 \text{ — не подходит } x > 0$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

$$D = p^2 - 4q$$

$$D = 3^2 + 4 \cdot 180 = 729 = 27^2$$

$$v_2 = 12 \text{ км/ч; } v_1 = 12 + 3 = 15 \text{ км/ч}$$

Ответ: скорость первого велосипедиста 15 км/ч, второго — 12 км/ч.

**З а м е ч а н и е.** При решении задач на движение можно пользоваться условными обозначениями, заменяющими слова. Например, путь —  $S$ , скорость —  $v$ , время —  $t$ .

2. ЭМ. Катер проплывает 8 км против течения реки и еще 30 км по течению за то же время, за которое плот может проплыть по этой реке 4 км. Скорость катера в стоячей воде равна 18 км/ч. Найдите скорость течения реки.

Дано:

Катер	$S_{\text{к. по теч.}} = 30 \text{ км}$	$v_{\text{к.}} = 18 \text{ км/ч}$	$t_{\text{к. по теч.}}$
	$S_{\text{к. против теч.}} = 8 \text{ км}$	$v_{\text{к. по теч.}} = 18 + v_{\text{реки}} \text{ км/ч}$	$t_{\text{к. против теч.}}$
Плот	$S_{\text{пл. по теч.}} = 4 \text{ км}$	$v_{\text{к. против теч.}} = 18 - v_{\text{реки}} \text{ км/ч}$	$t_{\text{плота}}$
		$v_{\text{плота}} = v_{\text{реки}}$	

Найти:  $v_{\text{реки}}$

Модель решения:  $t_{\text{к. по теч.}} + t_{\text{к. против теч.}} = t_{\text{плота}}$

Решение.

1). Пусть  $v_{\text{реки}} = x \text{ км/ч}$ ,  $0 < x < 18$

2).  $v_{\text{к. по теч.}} = 18 + x \text{ км/ч}$ ;  $v_{\text{к. против теч.}} = 18 - x \text{ км/ч}$



$$3). t_{\text{к. по теч.}} = \frac{30}{18+x} \text{ час}$$

$$t_{\text{к. против теч.}} = \frac{8}{18-x} \text{ час}$$

$$t_{\text{плота}} = \frac{4}{x} \text{ час}$$

$$t_{\text{к. по теч.}} = \frac{S_{\text{по теч.}}}{v_{\text{по теч.}}}$$

$$t_{\text{к. против теч.}} = \frac{S_{\text{против теч.}}}{v_{\text{против теч.}}}$$

$$t_{\text{плота}} = \frac{S_{\text{плота}}}{v_{\text{реки}}}$$

4). Подставьте  $t_{\text{к. по теч.}}$ ,  $t_{\text{к. против теч.}}$ ,  $t_{\text{плота}}$  в формулу решения:

$$\frac{30}{18+x} + \frac{8}{18-x} = \frac{4}{x} \quad | \cdot x(18+x)(18-x)$$

$$\text{ОДЗ: } 0 < x < 18$$

$$t_{\text{к. по теч.}} + t_{\text{к. против теч.}} = t_{\text{плота}}$$

5). Решите уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{30x(18+x)(18-x)}{18+x} + \frac{8x(18+x)(18-x)}{18-x} &= \\ = \frac{4x(18+x)(18-x)}{x} \end{aligned}$$

$18+x$	$(18-x)x$
$18-x$	$(18+x)x$
$x$	$(18+x)(18-x)$

$$\text{ОЗ: } x(18+x)(18-x)$$

$$\begin{aligned} 30x(18-x) + 8x(18+x) &= 4(18+x)(18-x) \\ 540x - 30x^2 + 144x + 8x^2 &= 1296 - 4x^2 \\ 18x^2 - 684x + 1296 &= 0 \quad | :18 \\ x^2 - 38x + 72 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4(18+x)(18-x) &= \\ = 4(324 - x^2) \\ x^2 + px + q &= 0 \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = 19 \pm \sqrt{19^2 - 72} = 19 \pm \sqrt{289} = 19 \pm 17$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_1 = 19 + 17 = 36 \text{ — не подходит}$$

$$0 < x < 18$$

$$p = -38; q = 72$$

$$x_2 = 19 - 17 = 2 \text{ — подходит по усло-}$$

$$\text{вию задачи}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= 19^2 - 72 = \\ &= 361 - 72 = 289 = 17^2 \end{aligned}$$

$$v_{\text{реки}} = 2 \text{ км/ч}$$

Ответ: скорость реки 2 км/ч.

3. ГИА. Один завод может выполнить заказ на 4 дня быстрее, чем другой. За какое время может выполнить этот заказ каждый завод, если известно, что при совместной работе за 24 дня они выполнили заказ в 5 раз больший?



Дано:

I завод	$t_1$		} за 24 дня заказ в 5 раз больший
II завод	$t_2 > t_1$	на 4 дня	

Найти: за какое время может выполнить заказ каждый завод?

Решение. I способ

Модель решения:  $A_1 + A_2 = 5A$ Заказ  $A$  примем за 1, тогда  $A_1 + A_2 = 5$  $A_1$  и  $A_2$  — это работа, которую выполнят заводы за 24 дняПусть  $t = x$  дней — время выполнения заказа  $A$  I завода $t_2 = x + 4$  дней — время выполнения заказа  $A$  II завода

Производительность заводов (часть работы за 1 день):

$$p_1 = \frac{1}{x}; \quad p_2 = \frac{1}{x+4}$$

$$\text{За 24 дня: } A_1 = \frac{24}{x}; \quad A_2 = \frac{24}{x+4}$$

Подставим  $A_1$  и  $A_2$  в модель решения:

$$\frac{24}{x} + \frac{24}{x+4} = 5 \quad | \cdot x(x+4) \quad \left| \begin{array}{l} A_1 + A_2 = 5 \end{array} \right.$$

$$\frac{24x(x+4)}{x} + \frac{24x(x+4)}{x+4} = 5x(x+4)$$

$$24(x+4) + 24x = 5x^2 + 20x$$

$$24x + 96 + 24x = 5x^2 + 20x$$

$$5x^2 - 28x - 96 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{26^2}}{5} = \frac{14 \pm 26}{5}$$

$$x_1 = \frac{14+26}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

$$x_2 = \frac{14-26}{5} = -\frac{12}{5} < 0 \quad \text{— не подходит по ОДЗ}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a = 5; \quad b = -28 \quad \text{— четное}$$

$$k = \frac{b}{2} = -14; \quad c = -96$$

$$D_1 = k^2 - ac = (-14)^2 + 96 \cdot 5 = 196 + 480 = 676 = 26^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$$

8 дней работал I завод,  $8 + 4 = 12$  дней работал II завод  
 Ответ: I завод выполнит заказ за 8 дней, II завод — за 12 дней.



**З а м е ч а н и е.** Можно провести сравнение с решением задачи на движение, где производительность труда — это скорость; заказ, принятый за единицу, — путь в задаче на движение.

4. ГИА. Два каменщика выложили стену за 14 дней, причем второй присоединился к первому через 3 дня после начала работы. Известно, что первому каменщику на выполнение всей работы потребовалось бы на 6 дней больше, чем второму. За сколько дней мог бы выложить эту стену каждый каменщик, работая отдельно?

*Решение. II способ*

*Дано:*

I каменщик	$t_1 > t_2$ на 6 дней	14 дней	Вместе 11 дней
II каменщик	$t_2$	11 дней	

*Найти:* за сколько дней мог бы выложить стену каждый каменщик?

Модель решения:  $t_1 - t_2 = 6$ . Примем кладку стены  $A$  за 1.

*Решение.*

- 1). Пусть  $p_1 = x$  — производительность (скорость работы) I каменщика

$3x$  — часть работы за 3 дня, выполненная I каменщиком, когда он работал один

$1 - 3x$  — часть работы, которую выполнили каменщики, работая вместе

- 2).  $p_{\text{общая}} = \frac{1-3x}{11}$  — при совместной работе

$$p_2 = \frac{1-3x}{11} - x = \frac{1-3x-11x}{11} = \frac{1-14x}{11} \quad \left| \quad p_2 = p_{\text{общая}} - p_1 \right.$$

- 3). Найдите  $t_1$  и  $t_2$  по формуле  $t = \frac{A}{p}$ ,  $A = 1$ :

$$t_1 = \frac{A}{p_1} = \frac{1}{x}; \quad t_2 = \frac{1}{p_2} = 1 : \frac{1-14x}{11} = \frac{11}{1-14x}$$

- 4). Подставьте  $t_1$  и  $t_2$  в формулу решения:

$$\frac{1}{x} - \frac{11}{1-14x} = 6 \quad \left| \quad t_1 - t_2 = 6 \right.$$



5). Решите уравнение:

$$\frac{1}{x} - \frac{11}{1-14x} = 6 \quad | \cdot x(1-14x)$$

$$1-14x-11x=6x-84x^2$$

$$84x^2-31x+1=0$$

$$x_{1,2} = \frac{31 \pm \sqrt{625}}{168} = \frac{31 \pm 25}{168}$$

$$x_1 = \frac{31+25}{168} = \frac{56}{168} = \frac{1}{3} \quad \text{— не подходит } 0 < x < \frac{1}{14}$$

$$x_2 = \frac{31-25}{168} = \frac{6}{168} = \frac{1}{28} \quad \text{— подходит по ОДЗ}$$

$$p_1 = \frac{1}{28}, \text{ тогда } t_1 = 1 : \frac{1}{28} = 28 \text{ дней; } t_2 = 28 - 6 = 22 \text{ дня}$$

$$\text{ОДЗ: } 0 < x < \frac{1}{14}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 31^2 - 4 \cdot 84 =$$

$$= 961 - 336 =$$

$$= 625 = 25^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Ответ: I каменщик может выложить стену за 28 дней, а II каменщик — за 22 дня.

## Проверь себя!

1. ГИА. Из пунктов А и В одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода. Скорость первого на 1 км/ч больше скорости второго, поэтому он прибыл в пункт В на 1 ч раньше, чем второй в пункт А. Найдите скорости пешеходов, если расстояние между пунктами А и В равно 20 км.

2. Бассейн наполняется двумя трубами, действующими одновременно в течение 2 часов. Первая труба, действуя одна, наполняет бассейн на 3 часа быстрее, чем вторая. За сколько времени может наполнить бассейн первая труба?

Ответ: 1). 4 км/ч; 5 км/ч; 2). 3 часа.

Попробуй не реши!

Задача. Два экскаватора, работая совместно, могут вырыть котлован за 48 часов. За какое время каждый из них может вырыть котлован, работая в отдельности, если первому нужно для этого на 40 часов больше, чем второму?

Ответ: 120 ч; 80 ч.



## § 4.

## Решение задач с помощью квадратного уравнения или системы уравнений II степени

## Алгоритм

109

## Решение задач с помощью квадратного уравнения или системы уравнений II степени

1. Запишите кратко условие задачи.
2. Составьте модели решения относительно двух переменных.
3. Введите неизвестные величины  $x$  и  $y$  и ОДЗ.
4. Выразите через  $x$  и  $y$  остальные величины.
5. Подставьте в формулы решения все величины, выраженные через  $x$  и  $y$ .
6. Решите систему двух уравнений и отберите ответ по ОДЗ.
7. Запишите ответ по требованию задачи.

## Примеры

1. ГИА. Прямоугольный газон обнесен изгородью, длина которой 30 м. Площадь газона  $56 \text{ м}^2$ . Найдите длину сторон газона.

1). Дано:

Периметр	$P = 30 \text{ м}$	$P = (a + b) \cdot 2$
Площадь	$S = 56 \text{ м}^2$	$S = ab$

Найти: длину и ширину газона

2). Модель решения:  $\begin{cases} (a+b) \cdot 2 = 30 \\ a \cdot b = 56 \end{cases}$ , где  $a$  — длина;  $b$  — ширина3). Пусть  $a = x \text{ м}$ ,  $0 < x < 15$ ;  $b = y \text{ м}$ ,  $0 < y < 15$ ,  
тогда  $P = (x + y) \cdot 2 = 30 \text{ м}$ 4). Составьте систему по модели решения:  $\begin{cases} (x+y) \cdot 2 = 30 \\ x \cdot y = 56 \end{cases}$ 5). Решите систему:  $\begin{cases} (x+y) \cdot 2 = 30 \quad | :2 \\ x \cdot y = 56 \end{cases}$ 

$$\begin{cases} x+y=15 \\ x \cdot y=56 \end{cases}; z^2 - 15z + 56 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Примените обратную теорему Виета} \\ x+y = -p = -15; xy = q = 56 \end{array} \right.$$



$$z_1 = 7; z_2 = 8$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 8 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 8 \\ y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 15 \\ z_1 \cdot z_2 = 56; z_1 = 7; z_2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} z_1 = x = 7 \\ z_2 = y = 8 \end{matrix} \text{ или } \begin{matrix} z_2 = x = 8 \\ z_1 = y = 7 \end{matrix}$$

Ответ: длина сторон газона равна 7 м и 8 м.

**З а м е ч а н и е.** Задачу можно решить, применив квадратное уравнение:  $a = x$ ;  $b = 15 - x$ , тогда  $S = ab$ ,  $x(15 - x) = 56$ ;  $x^2 - 15x + 56 = 0$ .

2. ГИА. Произведение двух положительных чисел равно 72. Найдите эти числа, если известно, что одно из них на 6 больше другого.

Дано:

I число	$a$	$a > b$ на 6	$a \cdot b = 72$
II число	$b$		

Найти: числа  $a$  и  $b$

Эту задачу можно решать с одной неизвестной с помощью квадратного уравнения или системой с двумя неизвестными.

1). Модель решения:  $a \cdot b = 72$

2). Пусть  $b = x$  (меньшее),  $x > 0$ , тогда  $a = x + 6$

3).  $x(x + 6) = 72$

$$x^2 + 6x - 72 = 0$$

$$a \cdot b = 72$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -6 \\ x_1 \cdot x_2 = -72 \end{cases}; x_1 = -12; x_2 = 6$$

4).  $b = -12$ , то  $a = -12 + 6 = -6$  — не подходит,  $a > b$  и  $b > 0$

$b = 6$ , то  $a = 6 + 6 = 12$

Ответ:  $a = 6$ ;  $b = 12$  или  $a = 12$ ;  $b = 6$ .

3. В кинотеатре число мест в ряду на 8 больше числа рядов. Сколько рядов в кинотеатре, если всего в нем 884 места?

Дано:

Число мест	$a$	$> b$ на 8
Число рядов	$b$	меньшее
Всего	884 места	

Найти: сколько рядов в кинотеатре?

Решение.

1). Модель решения:  $a \cdot b = 884$



2). Пусть  $b = x$ ,  $x > 0$

3). Тогда  $a = x + 8$

4). Подставим величины  $a$  и  $b$  в формулу решения, получим уравнение:

$$x(x+8) = 884 \quad | \quad a \cdot b = 884$$

5). Решим уравнение:

$$x^2 + 8x - 884 = 0$$

$$x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 + 884} = -4 \pm \sqrt{900} = -4 \pm 30$$

$$x_1 = -4 + 30 = 26$$

$$x_2 = -4 - 30 = -34$$

$-34 < 0$  — не подходит

$$x^2 + px + q = 0$$

$$p = 8 \text{ — четное; } q = -884$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$16 + 884 = 900 = 30^2$$

6). Число рядов 26

Ответ: в кинотеатре 26 рядов.

4. ГИА. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см, а один из катетов на 2 см больше другого. Найдите длину катетов треугольника.

Дано:

Катет $a$	$a > b$ на 2 см
Катет $b$	Меньшее
Гипотенуза $c$	10 см

Найти: катеты  $a$ ,  $b$

Решение.

1). Модель решения:  $a^2 + b^2 = c^2$  (теорема Пифагора)

2). Пусть  $b = x$ ,  $0 < x < 10$ , тогда  $a = x + 2$  (см)

3). Подставьте  $a$ ,  $b$  в формулу решения

$$x^2 + (x+2)^2 = 10^2 \quad | \quad a^2 + b^2 = c^2$$

4). Решите уравнение:  $x^2 + x^2 + 4x + 4 - 100 = 0$

$$2x^2 + 4x - 96 = 0 \quad | :2$$

$$x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 48} = -1 \pm 7$$

$$x_1 = -1 + 7 = 6;$$

$$x_2 = -1 - 7 = -8, \text{ не подходит } x > 0$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$p = 2 \text{ — четное; } q = -48$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$b = 6, a = 6 + 2 = 8$$

Ответ: катеты имеют длину 6 см и 8 см.



5. ГИА. В прямоугольной крышке, размеры которой 15 см и 30 см, надо вырезать прямоугольное отверстие площадью  $100 \text{ см}^2$  так, чтобы его края были на одинаковом расстоянии от краев крышки. На каком расстоянии от края крышки должен быть край отверстия?

Дано:

$a = 30 \text{ см}$	$a_1$	$a - 2h$
$b = 15 \text{ см}$	$b_1$	$b - 2h$
$S = 100 \text{ см}^2$		

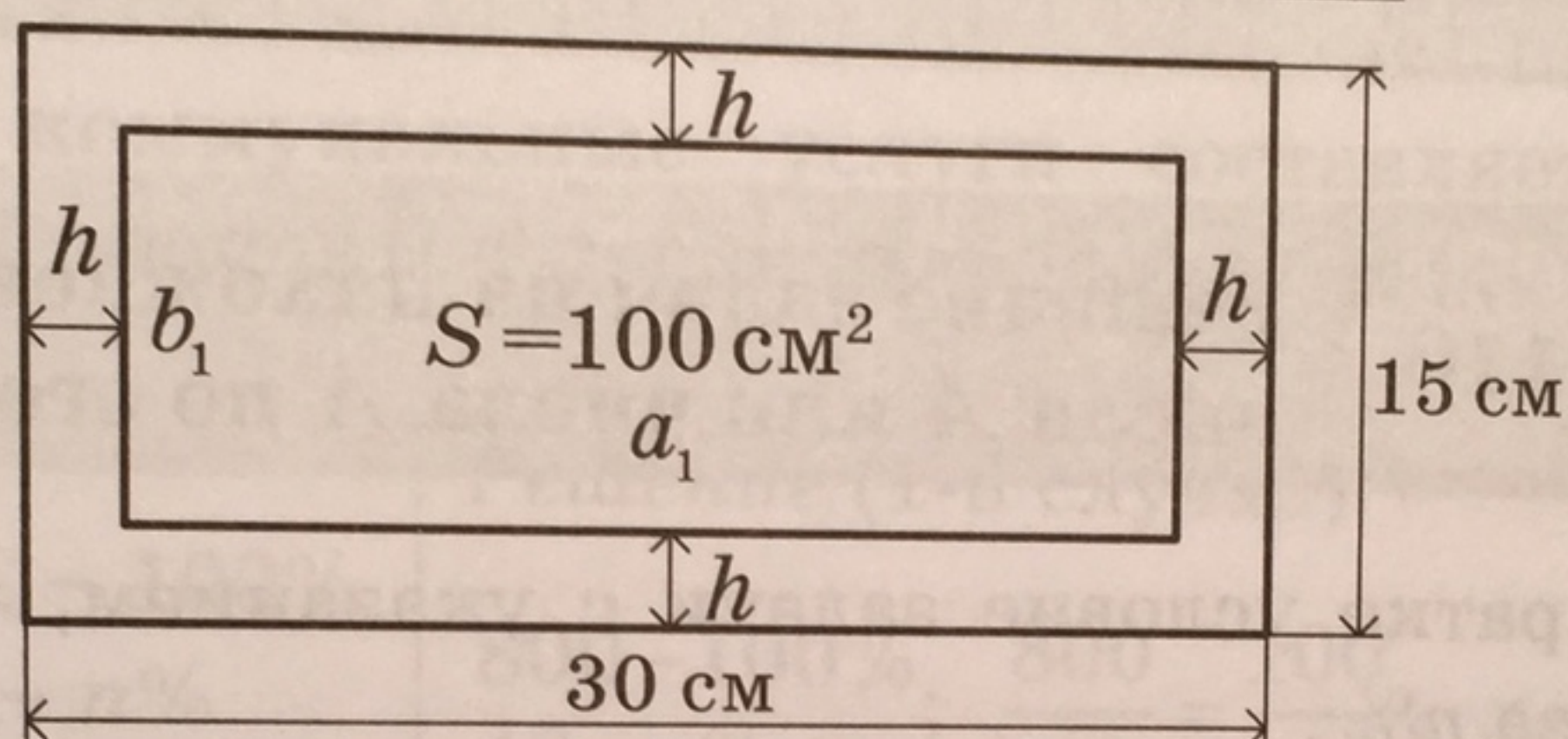


Рис. 29

Найти: расстояние от края крышки  $h$

Решение.

1). Модель решения:  $S = a_1 \cdot b_1$

2). Пусть  $h = x \text{ см}$ ,  $0 < h < 15$ , тогда  $a_1 = 30 - 2x \text{ (см)}$ ;  $b_1 = 15 - 2x \text{ (см)}$ . (см. рис. 29)

3). Подставим  $a_1$ ,  $b_1$  в формулу решения, получим уравнение:

$$(30 - 2x)(15 - 2x) = 100 \quad | \quad S = a_1 \cdot b_1$$

4). Решим уравнение:

$$450 - 30x - 60x + 4x^2 - 100 = 0$$

$$4x^2 - 90x + 350 = 0 \quad | :2$$

$$2x^2 - 45x + 175 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{45 \pm \sqrt{625}}{4} = \frac{45 \pm 25}{4}$$

$$x_1 = \frac{45 + 25}{4} = \frac{70}{4} = 17,5 \text{ — не подходит}$$

$$x_2 = \frac{45 - 25}{4} = 5, \quad h = 5$$

$$0 < h < 15$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a = 2; b = -45; c = 175$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$D = b^2 - 4ac =$$

$$= (-45)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 175 =$$

$$= 2025 - 1400 =$$

$$= 625 = 25^2$$

Ответ: расстояние от края крышки 5 см.



## § 5.

## Решение задач на проценты

I тип. 1. Нахождение  $n\%$  числа  $A$  (нахождение части от числа).

2. Нахождение числа  $A$  по его  $n\% = B$  (нахождение числа по его части).

II тип. Снижение (повышение) цен и банковский процент.

III тип. Смеси и сплавы.

**З а м е ч а н и е.** Практически все типы задач на проценты приводятся к I типу.

## Алгоритм

110

Решение задач на нахождение  $n\%$  числа  $A$  или числа  $A$  по его  $n\%$ 

1. Запишите кратко условие задачи с указанием, что принято за  $100\%$  и что за  $n\%$ .
2. Составьте пропорцию по условию:

$$1). \frac{A - 100\%}{x - n\%}; \frac{A}{x} = \frac{100}{n}; x = \frac{A \cdot n}{100} \text{ — часть от числа}$$

$$2). \frac{x - 100\%}{B - n\%}; \frac{x}{B} = \frac{100}{n}; x = \frac{B \cdot 100}{n} \text{ — число по его части}$$

$$3. \text{ Решите пропорцию п. 2: } \frac{a}{b} = \frac{x}{d}; x = \frac{a \cdot d}{b}.$$

4. Запишите ответ по смыслу задачи.

**П о л е з н ы е с о в е т ы**

1. В каждом случае п. 2 сначала находим число, которое приходится

на  $1\%$  ( $\frac{A}{100}$  или  $\frac{B}{n\%}$ ), а затем умножаем это число на  $n\%$ , если нахо-

дим часть от числа  $A$ , или умножаем это число на  $100\%$ , если находим все число  $A$ .

2. При нахождении части от числа переводим  $n\%$  в десятичную дробь:  $n\% = 0,01 \cdot n$ , например  $15\% = 0,15$ , и умножаем на число  $A$ :  $B = A \cdot 0,01 \cdot n$ .



3. При нахождении числа  $A$  надо  $B$  разделить на  $n\% = 0,01 \cdot n$ :  
 $A = B : (0,01 \cdot n)$ .

**Замечание.** Если  $n\% < 100\%$ , то  $B < A$ ; если  $n\% > 100\%$ , то  $B > A$ , получим другой смысл: «во сколько раз».

### Примеры

1. Плата за коммунальные услуги составляет 800 рублей. На сколько процентов увеличили плату, если она составляет 48 рублей?

Дано:

$$A = 800 \text{ руб.} - 100\%$$

$$B = 48 \text{ руб.} - n\%$$

Найти:  $n\%$

Решение (1-й случай)

$$\frac{800 - 100\%}{48 - n\%}; \quad \frac{800}{48} = \frac{100}{x}; \quad x = \frac{48 \cdot 100\%}{800} = 6\%$$

Ответ: плату увеличили на 6 %.

2. Руда содержит 72 % железа. Сколько тонн железа получится из 360 т руды?

Дано:

$$360_{\text{тонн}} - 100\%$$

$$n_{\text{тонн}} - 72\% = 0,72$$

Найти:  $n_{\text{тонн}}$

Решение.

$$360 \cdot 0,72 = 259,2 \text{ (тонны)}$$

Замечание. Можно решать пропорцией.

Ответ: из 360 т руды получится 259,2 т железа.

3. В секции плавания 16 % составляли новички, 20 % — умеющие плавать и 16 % — сдающие нормы, остальные 12 человек — разрядники. Сколько человек в секции?

Дано:

$B - 12_{\text{человек}}$  — разрядники

$$m\% = 16\% + 20\% + 16\% \text{ — без разряда}$$

Найти:  $A - 100\%$

Решение.

1). Найдем  $n\%$ , которые приходятся на 12 человек:

$$100\% - (16\% + 20\% + 16\%) = 48\%$$

2). Найдем, сколько всего человек в секции:  $A = B : 0,01 \cdot n$

$$12 : 48\% = 12 : 0,48 = 25 \text{ человек}$$

Ответ: в секции 25 человек.



## II тип. Решение задач на снижение (повышение) цен

**З а м е ч а н и е.** При снижении (повышении) цены на  $n\%$  надо первоначальную цену умножить на  $n\% = 0,01 \cdot n$  и отнять (прибавить) к начальной цене. При повторном снижении (повышении) цен поступить так же.

## Алгоритм

111

## Решение задач на снижение (повышение) цен и банковский процент

1. Запишите «Дано» и «Найти».
2. Переведите проценты в десятичную дробь (разделите  $n\%$  на 100)  
 $n\% = 0,01 \cdot n$ .  
Например,  $21\% = 0,21$
3. Умножьте данное число  $A$  на  $n\% = 0,01 \cdot n$ ;  $A \cdot 0,01 \cdot n$ .
4. Отнимите результат п. 3 из данного числа, если цена снижена, или прибавьте, если цена повышена  $A - A \cdot n\%$  или  $A + A \cdot n\%$ .
5. При повторном понижении (повышении) цены повторите операцию п. 3–4.
6. Ответ запишите по условию задачи.

## Задачи

1. Цену товара снизили на  $15\%$ , затем новую цену снизили еще на  $20\%$  и, наконец, еще раз снизили цену на  $25\%$ . На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

Дано:

$A = 100\%$  — начальная цена

$n_1 = 15\% = 0,15$  — первое снижение

$n_2 = 20\% = 0,20$  — второе снижение

$n_3 = 25\% = 0,25$  — третье снижение

Найти: общее снижение цены товара

Решение. Примем  $A = x$

- 1). Первое снижение:  $0,15 \cdot x$ . Первая новая цена:  $x - 0,15 \cdot x = 0,85 \cdot x$



2). Второе снижение цены:  $0,2 \cdot 0,85 \cdot x = 0,17 \cdot x$ . Вторая новая цена:  $0,85 \cdot x - 0,17 \cdot x = 0,68 \cdot x$

3). Третье снижение цены:  $0,25 \cdot 0,68 \cdot x = 0,17 \cdot x$ . Третья новая цена:  $0,68 \cdot x - 0,17 \cdot x = 0,51 \cdot x$

4). За три раза цена снижена на:  $x - 0,51 \cdot x = 0,49 \cdot x$

5). Найдем в процентах общее снижение цены:

$$\frac{x - 100\%}{0,49 \cdot x - x\%}; \quad \frac{0,49 \cdot x \cdot 100}{x} = 49\%$$

Ответ: цена снижена на 49% за три раза.

2. После повышения цены товара на 20% товар стал стоить 96 рублей. Определите начальную стоимость товара.

Дано:

A руб. — цена до повышения  
 $n\% = 20\% = 0,2$  — повышение цены

B = 96 руб. — новая цена

Найти: A — начальную цену

Решение. Примем  $A = x$

1).  $x \cdot 0,2$  руб. — повышение цены

2).  $x + x \cdot 0,2 = 1,2 \cdot x$  руб. — новая цена

3).  $1,2 \cdot x = 96; x = 96 : 1,2;$   
 $x = 80$  руб.

Ответ: начальная цена товара 80 рублей.

3. Цену товара понизили на 20%. На сколько процентов необходимо повысить цену товара, чтобы она стала первоначальной?

Дано:

A — начальная цена  
 $n\% = 20\% = 0,2$  — понижение цены

Найти:  $m\%$

Решение. Примем  $A = x$

1).  $x \cdot 0,2$  — понижение цены

2).  $x - x \cdot 0,2 = 0,8 \cdot x$  — новая цена

Пусть на  $m\%$  повысили цену

3).  $0,8 \cdot x \cdot m$  — повышение цены

$0,8 \cdot x \cdot m + 0,8 \cdot x$  — начальная цена, равная A

$$0,8 \cdot x \cdot m + 0,8 \cdot x = x \quad | : x$$

$$0,8 \cdot m + 0,8 = 1$$

$$0,8m = 1 - 0,8$$

$$0,8m = 0,2 \quad | : 0,8$$

$$m = 0,25$$

$$m\% = 0,25 \cdot 100\% = 25\%$$

Ответ: цену надо увеличить на 25%.



**Полезный совет.** При повторном снижении (повышении) числа  $A$  на одно и то же количество процентов пользуются формулой  $A \cdot (1 - 0,01x)^n$  при понижении цены и  $A \cdot (1 + 0,01x)^n$  при повышении цены, где  $n$  — количество раз (эта формула носит название банковского процента).

4. Цена товара была дважды снижена на одно и то же число процентов. На сколько процентов снижалась цена товара каждый раз, если его первоначальная стоимость 2000 рублей, а окончательная — 1805 рублей?

*Дано:*

$A = 2000$  руб. —

начальная цена

$B = 1805$  руб. —

конечная цена

$n_1 = x\% = 0,01x$

$n_2 = x\% = 0,01x$

*Найти:*  $x\%$  —

на сколько процентов снижалась цена?

*Решение.*

$$2000 \cdot (1 - 0,01x)^2 = 1805 \quad \left| \quad A \cdot (1 - 0,01x)^2 = B \right.$$

$$(1 - 0,01x)^2 = \frac{1805}{2000}$$

$$\sqrt{(1 - 0,01x)^2} = \sqrt{\frac{361}{400}}$$

$$|1 - 0,01x| = \frac{19}{20}; \quad 1 - 0,01x = \frac{19}{20} \quad \left| \quad 1 > 0,01x \right.$$

$$0,01x = 1 - \frac{19}{20}; \quad 0,01x = \frac{1}{20} \quad \left| \quad \frac{1}{20} = 0,05 \right.$$

$$x = 0,05 : 0,01; \quad x = 5\%$$

*Ответ:* снижение цены было на 5%.

5. В конце года банк начисляет 4% к сумме вклада. Какую сумму получит вкладчик через 3 года, вложив 25 000 рублей?

*Дано:*

$A = 25\,000$  руб. — вклад

$x = 4\%$  — годовые

$n = 3$  года

*Найти:* какую сумму

получит вкладчик?

*Решение.*

$$B = 25\,000 \cdot (1 + 0,04)^3 = \quad B = A \cdot (1 + 0,01x)^n$$

$$= 25\,000 \cdot (1,04)^3 =$$

$$= 25\,000 \cdot 1,124864 =$$

$$= 28121,6$$

*Ответ:* вкладчик получит 28121,6 рубля.

6. На аукционе одна картина была продана с прибылью 20%, а другая — с прибылью 50%. Общая прибыль от продажи двух картин — 30%. У какой картины цена была выше и во сколько раз?



**Дано:**

$A$  руб. — цена 1-й картины

$B$  руб. — цена 2-й картины

$n\% = 20\% = 0,2$  — прибыль за 1-ю картину

$n\% = 50\% = 0,5$  — прибыль за 2-ю картину

**Найти:** у какой картины цена выше?

**Решение.** Примем  $A = x$ ;  $B = y$

1).  $x \cdot 0,2$  руб. — прибыль за 1-ю картину

$y \cdot 0,5$  руб. — прибыль за 2-ю картину

2).  $x \cdot 0,2 + y \cdot 0,5$  руб. — прибыль за две картины

$0,3(x + y)$  руб. — прибыль за две картины

3).  $0,2 \cdot x + 0,5 \cdot y = 0,3(x + y) \mid \cdot 10$  — прибыль одна и та же за две картины

$$2 \cdot x + 5 \cdot y = 3 \cdot x + 3 \cdot y$$

$x = 2 \cdot y$  — 1-я картина дороже в 2 раза

**Ответ:** у первой картины цена выше в 2 раза.

7. Цена на товар была снижена на 10%, а затем повышена на 10%. Как изменилась цена товара?

**Дано:**

$A$  руб. — первоначальная цена

$n_1 = 10\% = 0,1x$  — понижение

$n_2 = 10\% = 0,1x$  — повышение

**Найти:** как изменилась цена товара?

**Решение.** Примем  $A = x$

1).  $0,1 \cdot x$  руб. — снижение цены

2).  $x - 0,1 \cdot x = 0,9 \cdot x$  руб. — первая цена после понижения

3).  $0,9x \cdot 0,1 = 0,09 \cdot x$  — повышение цены

4).  $0,9x + 0,09 \cdot x = 0,99x$  руб. — вторая цена после повышения

5).  $x - 0,99x = 0,01x$  — изменилась цена

$$0,01 \cdot 100\% = 1\%$$

**Ответ:** на 1% уменьшилась цена.

### III тип. Решение задач на смеси и сплавы

Если в смеси  $n\%$  кислоты (или соли), то  $(100\% - n\%)$  — воды. Концентрация раствора определяется по формуле:  $\frac{n}{A}$ , где  $n$  — количество кислоты (соли),  $A$  — общий вес смеси.



## Алгоритм

112

## Решение задач на смеси и сплавы

1. Запишите «Дано» и «Найти».
2. Определите количество соли (кислоты) и общее количество раствора.
3. Составьте пропорцию  $\frac{A-100\%}{n-x\%}; \frac{A}{n} = \frac{100}{x}; x = \frac{100 \cdot n}{A}$  и найдите нужную величину.
4. Запишите ответ.

## Задачи

1. К 180 г воды добавили 20 г соли. Определите процентное содержание соли в этом растворе.

*Дано:*

180 г воды

20 г соли

*Найти:*

процентное

содержание соли

*Решение.*

- 1). Найдём количество раствора:

$$A = 180 + 20 = 200 \text{ г}$$

$$2). \frac{200-100\%}{20-x\%}; \frac{200}{20} = \frac{100\%}{x};$$

$$x = \frac{100\% \cdot 20}{200} = 10\% \text{ (или по формуле } \frac{n}{A})$$

*Ответ:* 10% соли в растворе.

2. К 30 % раствору серной кислоты добавили 60 г воды и получили 10 % раствор. Определите массу первоначального раствора.

*Дано:*

60 г воды

 $n\% = 30\% = 0,3$  —

концентрация I раствора

 $p = 10\% = 0,1$  — концентрация II раствора*Найти:* массу первоначального раствора*Ответ:* первоначальная масса 30 г.*Решение.*Пусть  $x$  г — вес раствора

- 1). Вес нового раствора  $A = x + 60$ ;

вес кислоты  $0,3x$  г

$$2). \frac{0,3x}{x+60} = 0,1 \quad | \cdot 10$$

$$3x = 1 \cdot (x + 60)$$

$$2x = 60; x = 30$$

30 г — начальный вес

$$\frac{n}{A} = 0,1 \text{ —}$$

новая  
концентрация  
 $10\% = 0,1$



3. Какое количество воды надо добавить к 3 литрам 36 % раствора соли, чтобы получить 24 % раствор?

Дано:

$P = 3$  л раствора

$n = 36\% = 0,36$  — концентрация

$p = 24\% = 0,24$  — новая концентрация

Найти: количество воды  $B$ , которое надо добавить

Решение.

Пусть  $B = x$  л воды добавили

1). Найдем количество соли в 3 л:

$$P \cdot n\% = 3 \cdot 0,36 = 1,08 \text{ кг соли}$$

2). Новый раствор:  $A = x + 3$  л

3). Найдем новую концентрацию:

$$\frac{1,08}{3+x} = 0,24 \quad | \cdot 100 \quad \left| \frac{n}{A} \% = 24\% = 0,24 \right.$$

$$108 = 24(3+x); 108 = 72 + 24x$$

$$36 = 24x \quad | : 24; x = 1,5$$

$$B = 1,5 \text{ л воды}$$

Ответ: надо добавить 1,5 л воды.

4. Один сплав содержит 55 % цинка, а другой — 70 %. После переплавки получили 750 г нового сплава с 60 % содержанием цинка. Сколько цинка содержалось в первом сплаве?

Дано:

$A$  — первый сплав;  $n = 55\% = 0,55$  цинка

$B$  — второй сплав;  $n = 70\% = 0,7$  цинка

$A + B = 750$  г сплава;  $p = 60\% = 0,6$  цинка

Найти: сколько цинка в сплаве  $A$ ?

Решение.

1). Пусть  $A = x$  г;  $B = y$  г

$0,55 \cdot x$  г — цинка в сплаве  $A$

$0,7 \cdot y$  г — цинка в сплаве  $B$

2).  $750 \cdot 0,6 = 450$  г цинка в переплавке | часть от числа

$$\begin{cases} 0,55 \cdot x + 0,7y = 450 \\ x + y = 750 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 750 - x \\ 0,55 \cdot x + 0,7 \cdot (750 - x) = 450 \\ y = 750 - x \\ x = 500 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0,55 \cdot x + 525 - 0,7x &= 450 \\ 0,55x - 0,7x &= 450 - 525 \\ -0,15x &= -75 \quad | : (-0,15) \\ x &= 500 \end{aligned}$$



3).  $A = 500$  г;  $500 \cdot 0,55 = 275$  г цинка в I сплавe

Ответ: в I сплавe 275 г цинка.

**Попробуй не реши!**

1. Цену товара повысили на 25 %. На сколько процентов необходимо понизить цену товара, чтобы она стала первоначальной?

Ответ: на 20 % надо понизить цену.

2. Сливки составляют 20 % всего молока, а сливочное масло — 25 % сливок. Сколько литров молока надо взять, чтобы получить 180 г сливочного масла?

Ответ: 3,6 л молока.

**Попробуй-ка реши!**

Сколько граммов 15 % раствора соли надо добавить к 50 граммам 60 % раствора, чтобы получить 40 % раствор соли?

Ответ: нужно добавить 40 г 15 % раствора соли.



## Глава XI. Прогрессии

### § 1.

### Числовая последовательность

Ряд перенумерованных по порядку чисел (например: 2; 4; 8; 16; 32...), где каждое из чисел зависит от номера места  $n$ , на котором стоит, представляет собой числовую последовательность. Обозначим первое число  $a_1$ , второе —  $a_2$ , третье —  $a_3$  и т. д. Получим числовую последовательность в общем виде:  $a_1; a_2; a_3; a_4 \dots a_{n-1}; a_n; a_{n+1} \dots$ , где  $a_n$  — это каждое из чисел числовой последовательности при задании его номера  $n = 1, 2, 3 \dots$

Например:  $a_1 = 2; a_2 = 4; a_3 = 8; a_4 = 16, \dots, a_n = 2^n$

**Определение.** Если каждому натуральному числу  $n = 1, 2, 3 \dots$  соответствует одно и только одно число  $a_n$ , где  $n$  — номер места, то такая зависимость называется числовой последовательностью (ч.п.).

Иначе: числовая последовательность есть функция натурального аргумента.

$$a_n = f(n), \text{ где } n = 1, 2, 3 \dots, N$$

Например:

1. Ч.п.: 10; 100; 1000; ...

$$a_1 = 10; a_2 = 100; \dots a_n = 10^n, n = 1, 2, 3 \dots, N$$

Зная номер места, находим число, стоящее на этом месте:

$$n = 5; a_5 = 10^5;$$

$$n = 10; a_{10} = 10^{10}$$

2. Ч.п.:  $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5} \dots \frac{1}{n}; n = 7: a_7 = \frac{1}{7}$



## Символическая запись числовой последовательности

$a_1; a_2; a_3; a_4 \dots a_{n-1}; a_n; a_{n+1} \dots$ , где:

$a_1$  — первый член ч. п.

$a_n$  —  $n$ -й член ч. п. (любой член ч. п., если  $n = 1, 2, 3 \dots, N$ )

$a_{n-1}$  — предыдущий член ч. п. для  $a_n$

$a_{n+1}$  — последующий член ч. п. для  $a_n$

## Виды числовой последовательности

1. Конечные ч. п., если  $n$  — конечное число членов, например  $a_1; a_2; a_3; a_4 \dots a_{n-1}; a_n$
2. Бесконечные ч. п., если  $n$  — бесконечное число членов  $a_1; a_2; a_3; a_4 \dots a_{n-1}; a_n; \dots$
3. Возрастающие ч. п., если  $a_{n+1} > a_n$ . Например, 1; 3; 5; 7...
4. Убывающие ч. п., если  $a_{n+1} < a_n$ . Например,  $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16} \dots$

## Способы задания числовых последовательностей

1. Перечислением членов ч. п. Например, 2; 5; 8; 11; ...
2. Формулой  $n$ -го члена. Например,  $a_n = n^2$ ;  $a_n = 2n + 1$
3. Рекуррентным способом, когда задан первый член и формула вычисления  $a_{n+1}$  члена через  $a_n$  член. Например,  $a_1$  и  $a_{n+1} = 2a_n + 1$

**Алгоритм**

**113**

**Нахождение значения члена числовой последовательности по формуле  $n$ -го члена (или номера члена по его значению)**

1. Запишите формулу  $n$ -го члена.
2. Подставьте в формулу п. 1 вместо  $n$  номер нужного члена ч. п. (или значение члена вместо  $a_n$ ).
3. Вычислите числовое значение  $a_n$  (или решите уравнение и найдите  $n$  — натуральное число).
4. Запишите ответ.



# Примеры

1. Найдите первые три числа последовательности, которая задана формулой  $n$ -го члена:  $a_n = -n^3$ .

Дано:

$$a_n = -n^3$$

Найти:

$$a_1; a_2; a_3$$

$$\text{Ответ: } a_1 = -1; a_2 = -8; a_3 = -27.$$

Решение.

$$2. a_1 = -1^3 = -1$$

$$a_2 = -2^3 = -8$$

$$a_3 = -3^3 = -27$$

$$1. a_n = -n^3$$

$$n = 1; n = 2; n = 3$$

2. Последовательность задана формулой  $a_n = n^2 - 2n - 6$ . Являются ли членами этой последовательности числа а) 3; б) 9?

Дано:

$$a_n = n^2 - 2n - 6$$

Найти:

$n$  — номер члена

$$a_n = 3 \text{ и } a_n = 9$$

Решение.

$$1. a_n = n^2 - 2n - 6$$

$$2. 3 = n^2 - 2n - 6$$

$$n^2 - 2n - 9 = 0$$

$$n_1 = 1 + \sqrt{1+9} \notin N$$

$$a_n \neq 3$$

3 — не является членом ч. п.

$$3. 9 = n^2 - 2n - 6;$$

$$n^2 - 2n - 15 = 0;$$

$n = 5$  — натуральное число

$$a_5 = 9$$

Подставьте вместо  $a_n$  число 3.

Если  $a_n = 3$ ,

$$\text{то } x^2 + 2mx + q = 0$$

$$x_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 - q}$$

$1 + \sqrt{10}$  — не является натуральным числом

$$\begin{cases} n_1 + n_2 = 2 \\ n_1 \cdot n_2 = -15 \end{cases}$$

$$n_1 = 5$$

$n_2 = -3$  — не является натуральным числом

Ответ: 3 не является членом ч. п.; 9 является членом ч. п.

3. Последовательность задана формулой  $n$ -го члена:  $a_n = 2 \cdot 3^{n+1}$ . Записать  $(n+1)$ -й,  $(n-1)$ -й и  $(n+3)$ -й члены этой последовательности.

Дано:

$$a_n = 2 \cdot 3^{n+1}$$

Решение.

2. Подставьте вместо  $n$  нужные номера членов  $n+1$ ;  $n-1$ ;  $n+3$

$$1. a_n = 2 \cdot 3^{n+1}$$



Найти:

$a_{n+1}; a_{n-1}; a_{n+3}$

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= 2 \cdot 3^{(n+1)+1} = 2 \cdot 3^{n+2} = \\
 &= 2 \cdot 3^n \cdot 3^2 = 18 \cdot 3^n; \\
 a_{n-1} &= 2 \cdot 3^{(n+1)-1} = 2 \cdot 3^n; \\
 a_{n+3} &= 2 \cdot 3^{(n+1)+3} = 2 \cdot 3^{n+4} = \\
 &= 2 \cdot 3^n \cdot 3^4 = 162 \cdot 3^n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a^{m+n} &= a^m \cdot a^n \\
 3^4 &= 81
 \end{aligned}$$

Ответ:  $a_{n-1} = 2 \cdot 3^n$ ;  $a_{n+1} = 18 \cdot 3^n$ ;  $a_{n+3} = 162 \cdot 3^n$ .

## Алгоритм

114

## Нахождение члена последовательности, заданной рекуррентной формулой

1. Запишите «Дано» и «Найти».
2. Запишите формулу  $a_{n+1}$  через  $a_n$ , подставьте в нее значение  $n = 1$  и найдите  $a_2$ .
3. Подставьте в формулу  $a_{n+1}$  через  $a_n$  значение  $n = 2$  и найдите  $a_3$ .
4. Повторите процесс нахождения членов до нужного номера.
5. Запишите ответ.

## Примеры

1. Вычислите первые четыре члена последовательности, заданной рекуррентной формулой  $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$  и условием  $a_1 = 256$ .

Дано:

$a_{n+1} = \sqrt{a_n}$

$a_1 = 256$

Найти:

$a_1; a_2; a_3; a_4$

Решение.

2.  $a_1 = 256$

3.  $a_{1+1} = \sqrt{256} = 16; a_2 = 16$

4.  $a_{2+1} = \sqrt{16} = 4; a_3 = 4$

5.  $a_{3+1} = \sqrt{4} = 2; a_4 = 2$

1.  $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$

$a_2 = a_{1+1} = \sqrt{a_1}$

подставили  $n = 1$  и  $a_1$ 

$a_3 = a_{2+1} = \sqrt{a_2} \mid n = 2$

$a_4 = a_{3+1} = \sqrt{a_3} \mid n = 3$

Ответ: 256; 16; 4; 2.

2. ГИА. Числовая последовательность задана формулой  $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$ .

Какое из чисел не является членом этой последовательности?

А. -1; Б.  $-\frac{1}{3}$ ; В.  $-\frac{1}{5}$ ; Г.  $-\frac{1}{6}$



Решение. Подставьте вместо  $c_n$  числа  $-1; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{5}; -\frac{1}{6}$ :

$$-1 = \frac{(-1)^1}{1} = -1 \text{ — истина}$$

$$-\frac{1}{3} = \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{3} \text{ — истина}$$

$$-\frac{1}{5} = \frac{(-1)^5}{5} = -\frac{1}{5} \text{ — истина}$$

$$-\frac{1}{6} \neq \frac{(-1)^6}{6}; \frac{1}{6} \text{ — не является членом последовательности}$$

$$(-1)^{2n-1} = -1$$

$$(-1)^{2n} = 1$$

Ответ: Г.

**Проверь себя!**

ГИА. Последовательность задана формулой  $c_n = n^2 + 1$ . Какое из чисел является членом этой последовательности?

А. 4; Б. 6; В. 5; Г. 3.

Ответ: В.



## § 2.

## Арифметическая прогрессия

Рассмотрим числовую последовательность: 2; 5; 8; 11; 14 ...  $a_n$ ;  $a_{n+1}$ ... Составим разность  $a_{n+1} - a_n$ :  $5 - 2 = 3$ ;  $8 - 5 = 3$ ;  $11 - 8 = 3$ ;  $14 - 11 = 3$ ... Получили разность  $a_{n+1} - a_n = 3$  — одна и та же; обозначим  $a_{n+1} - a_n = d$ , тогда любой член  $a_{n+1} = a_n + d$ , кроме  $a_1$ :  $5 = 2 + 3$ ;  $8 = 5 + 3$ ;  $11 = 8 + 3$ ... (рекуррентный способ задания ч. п.).

**Определение.** Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, сложенному с одним и тем же постоянным для этой последовательности числом.

Символически:  $\div(a_n)$  — арифметическая прогрессия:  $a_{n+1} = a_n + d$ ,  $n \in N$ , где  $d$  — разность арифметической прогрессии:  $d = a_{n+1} - a_n$

Арифметическая прогрессия **возрастает**, если  $\underline{a_{n+1} > a_n}$ , т. е.  $d > 0$ , или  $a_{n+1} - a_n > 0$

Арифметическая прогрессия **убывает**, если  $\underline{a_{n+1} < a_n}$ , т. е.  $d < 0$ , или  $a_{n+1} - a_n < 0$

Название прогрессии связано с тем, что каждый ее член, начиная со второго, есть среднее арифметическое между двумя смежными с ним членами:

$$+ \begin{cases} a_{n+1} = a_n + d \\ a_{n-1} = a_n - d \end{cases} \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}; n > 1; n \in N \text{ —}$$

это характеристическое свойство арифметической прогрессии

## Алгоритм

115

Как доказать, что числовая последовательность есть арифметическая прогрессия

## I способ

1. Найдите  $a_{n+1}$  член последовательности (вместо  $n$  подставьте  $n + 1$ ).
2. Найдите разность  $a_{n+1} - a_n$ :  
а) если в ответе получите число, то  $a_n$  — является арифметической прогрессией;



б) если разность  $a_{n+1} - a_n$  зависит от  $n$ , то  $a_n$  — не является арифметической прогрессией.

Например: какая из числовых последовательностей ( $a_n = -3 + 5n$  или  $a_n = n^2 - 1$ ) является арифметической прогрессией?

Решение.

1).  $a_n = -3 + 5n$

$$a_{n+1} = -3 + 5(n+1) = -3 + 5n + 5 = 2 + 5n$$

$$d = a_{n+1} - a_n = 2 + 5n - (-3 + 5n) = 5 \text{ — число; } d = 5$$

$a_n = -3 + 5n$  является арифметической прогрессией

2).  $a_n = n^2 - 1$  не является арифметической прогрессией, так как

$$a_{n+1} = (n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n + 1 - 1 = n^2 + 2n$$

$$a_{n+1} - a_n = n^2 + 2n - (n^2 - 1) = 2n + 1 \text{ — зависит от } n, \text{ а значит, } a_n = n^2 - 1 \text{ не является арифметической прогрессией}$$

Ответ:  $a_n = -3 + 5n$  является арифметической прогрессией.

## II способ

1. Найдите  $a_{n-1}$  и  $a_{n+1}$  (вместо  $n$  подставьте  $n-1$  и  $n+1$ ).

2. Найдите  $\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ . Если получите  $a_n$ , то  $a_n$  является арифметической прогрессией; если  $\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \neq a_n$ , то  $a_n$  не является арифметической прогрессией.

Например: доказать, что последовательность, заданная формулой  $n$ -го члена  $a_n = -2(n-1)$ , является арифметической прогрессией.

Решение.

1).  $a_{n-1} = -2((n-1)-1) = -2(n-2)$

$$a_{n+1} = -2((n+1)-1) = -2n$$

2).  $\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{-2n + 4 - 2n}{2} = -2n + 2 = -2(n-1)$

$-2(n-1) = a_n$ , значит,  $a_n = -2(n-1)$  — арифметическая прогрессия

**З а м е ч а н и е.** Если  $k$  есть номер числа, равноудаленного от номера члена  $n$ , то  $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$ .



Например, дана арифметическая прогрессия 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27...

$$a_6 = \frac{a_{6-3} + a_{6+3}}{2} = \frac{a_3 + a_9}{2} = \frac{9 + 27}{2} = 18 \quad \left| \begin{array}{l} 6-3=3 \\ 6+3=9 \end{array} \right. \quad a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

### Формула $n$ -го члена арифметической прогрессии

1.  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d, n > 1, n \in N$
2.  $a_n = a_k + (n - k) \cdot d, n > k, n, k \in N$

#### Алгоритм

116

#### Нахождение номера заданного члена $a_n$ арифметической прогрессии

1. Запишите формулу общего члена по условию  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$  или  $a_n = a_k + (n - k) \cdot d$ .
2. Определите, что в этой формуле известно и что можно найти, кроме  $n$  (например,  $d; a_1$ ).
3. Подставьте в формулу п. 1 все известные числа и найдите  $n$ , решив уравнение относительно  $n$ :  $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$ .
4. Если надо найти, с какого номера  $n \in N$  члены прогрессии положительные или отрицательные, то решите неравенство  $a_1 + (n - 1) \cdot d > 0$  или  $a_1 + (n - 1) \cdot d < 0$  относительно  $n$ .  
**Внимание!**  $n$  — только натуральное число!

#### Примеры

1. ГИА. Является ли число 12 членом арифметической прогрессии -18; -15; -12?

Решение.

$$2). d = -15 - (-18) = 3$$

$$3). 12 = -18 + (n - 1) \cdot 3$$

$$30 = (n - 1) \cdot 3; 10 = n - 1;$$

$$n = 11; 11 \in N$$

Ответ: является,  $a_{11} = 12$ .

$$1). a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$d = a_2 - a_1$$

$$a_2 = -15; a_1 = -18$$

Допустим, что  $a_n = 12$



2. ГИА. Сколько отрицательных членов в арифметической прогрессии  $-38,5; -35,8; \dots$ ?

Дано:

$$\div(a_n): -38,5; -35,8; \dots$$

$$a_n < 0$$

Найти:  $n$

$$3) a_n = -38,5 + (n - 1) \cdot 2,7$$

$$-38,5 + (n - 1) \cdot 2,7 < 0$$

$$(n - 1) \cdot 2,7 < +38,5; \quad 2,7n < +38,5 + 2,7$$

$$2,7n < 41,2 \mid : 2,7; \quad n < 15 \frac{7}{27}, \quad n \in N$$

$$n = 1, 2, 3 \dots 15$$

Решение.

$$d = a_2 - a_1 =$$

$$= -35,8 - (-38,5) =$$

$$= 2,7$$

$$1) a_n = a_k + (n - k) \cdot d$$

$$2) a_1 = 38,5; a_2 = -35,8$$

$$d = a_{n+1} - a_n; a_n < 0$$

$$(n - 1) \cdot 2,7 = 2,7n - 2,7$$

$$41 \frac{1}{5} : 2 \frac{7}{10} =$$

$$= \frac{206 \cdot 10}{5 \cdot 27} =$$

$$= \frac{412}{27} = 15 \frac{7}{27}$$

Ответ: 15 отрицательных членов.

3. Число  $-3,8$  является восьмым членом арифметической прогрессии  $(a_n)$ , число  $-11$  является ее двенадцатым членом. Является ли число  $-30,8$  членом этой прогрессии?

Дано:

$$\div(a_n)$$

$$a_8 = -3,8$$

$$a_{12} = -11$$

Найти:

$$a_n = 30,8$$

$$n = ?$$

Решение.

$$1) a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$2) \text{ Найдем } d:$$

$$a_{12} = a_8 + (12 - 8) \cdot d;$$

$$-11 = -3,8 + 4d;$$

$$4d = -7,2 \mid : 4; \quad d = -1,8$$

$$3) \text{ Найдем } a_1:$$

$$a_1 = -3,8 - 7 \cdot (-1,8) =$$

$$= -3,8 + 12,6 = 8,8$$

$$4) \text{ Найдем } n:$$

$$-30,8 = 8,8 + (n - 1) \cdot (-1,8);$$

$$-30,8 = 8,8 - 1,8n + 1,8;$$

$$1,8n = 41,4 \mid : 1,8; \quad n = 23; \quad n \in N$$

$$a_n = a_k + (n - k) \cdot d$$

$$a_{12} = -11 \text{ и } a_8 = -3,8$$

$$a_{12} = a_8 + 4d;$$

$$a_8 = a_1 + 7d$$

$$a_1 = a_8 - 7d$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$\text{Пусть } a_n = -30,8$$

$$-1,8(n - 1) = -1,8n + 1,8$$

$$41,8 : 1,8 = 418 : 18 = 23$$

Ответ: является,  $a_{23} = -30,8$ .

4. ГИА. Последовательность  $(a_n)$  — арифметическая прогрессия. Известно, что  $a_5 + a_9 = 40$ . Найдите  $a_3 + a_7 + a_{11}$ .



Дано:

$$\div(a_n)$$

$$a_5 + a_9 = 40$$

Найти:

$$a_3 + a_7 + a_{11}$$

Решение. Эта задача на применение формулы

$$a_n = a_k + (n - k) \cdot d$$

$$1). \text{Выразим} + \begin{cases} a_3 = a_5 - 2d \\ a_{11} = a_9 + 2d \end{cases}$$

$$\underline{a_3 + a_{11} = a_5 + a_9} \quad (40)$$

$$2). a_7 = \frac{a_6 + a_8}{2}$$

$$3). + \begin{cases} a_6 = a_5 + d \\ a_8 = a_9 - d \end{cases}$$

$$\underline{a_6 + a_8 = a_5 + a_9} \quad (40)$$

$$4). a_7 = \frac{a_6 + a_8}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

$$5). a_3 + a_7 + a_{11} = 40 + 20 = 60$$

$$a_n = a_k + (n - k) \cdot d$$

$$a_{11} = a_9 + 2 \cdot d$$

$$a_3 = a_5 - 2d$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$$a_6 + a_8 = 40$$

Ответ: 60.

**Попробуй не реши!**

1. В арифметической прогрессии найдите  $a_{15}$ , если  $a_1 = -3$ ;  $d = -2$ .

Ответ:  $a_{15} = -31$ .

2. Запишите формулу  $n$ -го члена арифметической прогрессии:  $-3$ ;  $-5$ ;  $-7$ ;  $-9 \dots$

Ответ:  $a_n = -2n - 1$ .

**Попробуй-ка реши!**

1. ГИА. Сколько положительных членов в арифметической прогрессии:  $96,4$ ;  $91,8 \dots$ ?

Ответ: 21 положительный член.

2. Четвертый член арифметической прогрессии равен  $8,4$ , а ее десятый член равен  $14,4$ . Найдите пятнадцатый член этой прогрессии.

Ответ:  $a_{15} = 19,4$ .

3. Последовательность  $(a_n)$  — арифметическая прогрессия. Известно, что  $a_4 + a_6 = 38$ . Найдите  $a_2 + a_5 + a_8$ .

Ответ: 57.



**Сумма  $n$  членов конечной арифметической прогрессии.**  
**Свойства членов, равноудаленных от начала и конца ряда**

$$\div(a_n): a_1; a_2; a_3; a_4 \dots a_{n-3}; a_{n-2}; a_{n-1}; a_n,$$

$$\text{то } a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} \dots = a_3 + a_{n-2} = \dots$$

Суммы членов, равноудаленных от начала и конца ряда, равны.

**Формулы суммы  $n$  членов арифметической прогрессии**

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \quad (\text{I})$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n \quad (\text{II})$$

**З а м е ч а н и е.** Выбирайте формулу по смыслу задачи: если дано  $a_1$  и  $a_n$ , то (I); если даны  $a_1$  и  $d$ , то (II).

Алгоритм

117

**Нахождение суммы  $n$  членов арифметической прогрессии**

1. Запишите «Дано» и «Найти».
2. Запишите нужную формулу суммы.
3. Найдите элементы, входящие в формулу по условию.
4. Найдите значения  $S_n$ , подставив найденные элементы п. 3.
5. Запишите ответ.

### Примеры

1. **ГИА.** Найдите сумму всех последовательных натуральных чисел с 60 до 110 включительно.

Дано:

$$a_1 = 60$$

$$a_{51} = 110$$

Найти:  $S_{51}$

Решение.

$$1). S_n = \frac{(a_1 + a_{51}) \cdot 51}{2}$$

Всего 51 член, так как 110 включаем.  $a_{60}$  принимаем за  $a_1$ ,  $a_{110}$  принимаем за  $a_{51}$

2). Подставим  $a_1$  и  $a_{51}$  в формулу:

$$S_{51} = \frac{(60 + 110) \cdot 51}{2} = 85 \cdot 51 = 4335$$

Ответ:  $S_{51} = 4335$ .



2. ГИА. Найдите сумму первых 20 совпадающих членов двух арифметических прогрессий:  $a_n = 3; 8; 13...; b_n = 4; 11; 18...$

*Решение.*

1). Найдем  $d_1 = 8 - 3 = 5; d_2 = 11 - 4 = 7 \quad | \quad d = a_{n+1} - a_n$

Найдем члены прогрессий до третьего повторения: ( $a_{n+1} = a_n + d$ )

$d_1 = 5; a_n = 3; 8; 13; \underline{18}; 23; 28; 33; 38; 43; 48; \underline{53}; \dots$

$d_2 = 7; b_n = 4; 11; \underline{18}; 25; 32; 39; 46; \underline{53}; \dots$

Выпишем повторяющиеся члены: 18; 53 — это арифметическая прогрессия с  $d = 53 - 18 = 35; d = \text{НОК}(7; 5) = 35$

$$S_{20} = \frac{2a_1 + d(20-1)}{2} \cdot 20 = \frac{18 \cdot 2 + 35 \cdot 19}{2} \cdot 20 =$$

$$= (36 + 665) \cdot 10 = 701 \cdot 10 = 7010$$

*Ответ:*  $S_{20} = 7010$ .

**Попробуй не реши!**

Найдите сумму всех последовательных натуральных чисел с 50 до 120 включительно.

*Ответ:* 6035.

**Попробуй-ка реши!**

Найдите сумму всех положительных членов арифметической прогрессии 6,3; 5,8; ...

*Ответ:* 42,9.



## §3.

## Геометрическая прогрессия

Рассмотрим числовую последовательность:  $3; 6; 12; 24; 48; \dots a_n; a_{n+1} \dots$

$6 : 3 = 2; 12 : 6 = 2; 24 : 12 = 2; \dots a_{n+1} : a_n = 2; a_{n+1} = 2 \cdot a_n$  — рекуррентное задание ч. п.

Каждый последующий член в 2 раза больше предыдущего члена, такая последовательность и есть геометрическая прогрессия.

**Определение.** Геометрической прогрессией ( $\ddot{:}(b_n)$ ) называется такая числовая последовательность  $b_1; b_2; b_3; \dots b_{n-1}; b_n; b_{n+1} \dots$ , каждый член которой, начиная от второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

$q \neq 0, b_n \neq 0$ ;  $q$  — знаменатель геометрической прогрессии

$$q = b_{n+1} : b_n$$

Если  $q > 1$ , то  $\ddot{:}(b_n)$  — возрастает

$$b_n = b_{n+1} : q$$

Если  $0 < q < 1$ , то  $\ddot{:}(b_n)$  — убывает

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Формула общего члена через  $b_1$

$$b_n = b_k \cdot q^{n-k}$$

Формула общего члена через  $b_k$  ( $k < n \in N$ )

**Характеристическое свойство геометрической прогрессии**

Если  $\ddot{:}(b_n)$  — геометрическая прогрессия, то  $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$  или  $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$  — каждый член прогрессии ( $n \geq 2$ ) есть среднее геометрическое между соседними с ним членами.

Например:  $2; 4; 8; 16; 32; 64$

$$b_1 = 2; b_2 = 4; b_3 = 8$$

$$b_2^2 = b_1 \cdot b_3; 16 = 2 \cdot 8 \text{ — истина или } b_2 = \sqrt{b_1 \cdot b_3} = \sqrt{2 \cdot 8} = 4 \text{ — истина}$$

$$b_4 = 16; b_3 = 8; b_5 = 32 \mid b_4 = \sqrt{b_3 \cdot b_5}; b_4 = \sqrt{8 \cdot 32} = \sqrt{16^2} = 16 \text{ — истина}$$

Алгоритм

118

Как доказать, что числовая последовательность есть геометрическая прогрессия

## I способ

1. Найдите  $b_{n+1}$  (вместо  $n$  подставьте  $n + 1$ ).
2. Найдите частное  $b_{n+1} : b_n$ ; если в ответе получили число, то  $(b_n)$  — геометрическая прогрессия. Если ответ зависит от  $n$ , то числовая последовательность не является геометрической прогрессией.



Например: является ли последовательность, заданная формулой  $n$ -го члена, геометрической прогрессией?

$$1. b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

Решение.

$$1). b_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$2). b_{n+1} : b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} : \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2-n+3} = \frac{1}{2} \text{ — число}$$

$$\left. \begin{array}{l} a^n : a^m = a^{n-m} \\ (n-2) - (n-3) = 1 \end{array} \right\}$$

Ответ: да, является.

$$2. b_n = 3^{n^2-1}$$

$$1). b_{n+1} = 3^{(n+1)^2-1} = 3^{n^2+2n+1-1} = 3^{n^2+2n}$$

$$2). b_{n+1} : b_n = 3^{n^2+2n} : 3^{n^2-1} = 3^{n^2+2n-n^2+1} = 3^{2n+1} \text{ — зависит от } n$$

Ответ: нет, не является.

## II способ

1. Найдите  $b_{n-1}$  и  $b_{n+1}$ .

2. Найдите  $b_n^2$  и  $b_{n-1} \cdot b_{n+1}$  и сравните: если  $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$  то  $b_n$  — геометрическая прогрессия; если  $b_n^2 \neq b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ , то  $b_n$  не является геометрической прогрессией.

Например: является ли геометрической прогрессией последовательность?

$$1. b_n = \frac{1}{3^{n+1}}$$

Решение.

$$1). b_{n-1} = \frac{1}{3^{n+1-1}} = \frac{1}{3^n}; \quad b_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1+1}} = \frac{1}{3^{n+2}}$$

$$2). b_n^2 = \left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)^2 = \frac{1}{3^{2n+2}}$$

$$3). b_{n-1} \cdot b_{n+1} = \frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{3^{n+2}} = \frac{1}{3^{2n+2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} (a^m)^n = a^{mn} \\ a^m \cdot a^n = a^{m+n}; n+n+2=2n+2 \end{array} \right\}$$

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \text{ значит, } b_n = \frac{1}{3^{n+1}} \text{ — геометрическая прогрессия}$$

Ответ: да, является.



$$2. b_n = 2^{n^2}$$

$$1). b_{n-1} = 2^{(n-1)^2}; \quad b_{n+1} = 2^{(n+1)^2}$$

$$2). b_n^2 = (2^{n^2})^2 = 2^{2n^2}$$

$$3). b_{n-1} \cdot b_{n+1} = 2^{(n-1)^2} \cdot 2^{(n+1)^2} = \begin{cases} (a^m)^n = a^{mn} \\ (n-1)^2 + (n+1)^2 = \\ = n^2 - 2n + 1 + n^2 + 2n + 1 = 2n^2 + 2 \end{cases}$$

Сравним:  $2^{2n^2} \neq 2^{2n^2+2}$ , значит,  $b_n = 2^{n^2}$  не является геометрической прогрессией

Ответ: нет, не является.

### Формулы общего члена геометрической прогрессии

$$1. b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \quad q \neq 0, \quad n \in N$$

$$2. b_n = b_k \cdot q^{n-k}, \quad n > k, \quad n, k \in N$$

### Алгоритм

119

### Нахождение $n$ -го члена геометрической прогрессии или номера $n$ -го члена

1. Запишите формулу общего члена  $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ .
2. Найдите неизвестные элементы:  $b_1$  или  $q$ .
3. Подставьте в формулу все известные числа и найдите  $b_n$  или  $n$ : ( $q^{n-1} = b_n : b_1$ ).
4. Если  $b_n > 0$  или  $b_n < 0$ , то решите неравенства:  $b_1 \cdot q^{n-1} > 0$  или  $b_1 \cdot q^{n-1} < 0$  и найдите  $n$ .
5. Запишите ответ по смыслу задачи.

### Примеры

1. Для геометрической прогрессии  $4; -1; \frac{1}{4} \dots$  вычислите  $b_6$ .

Дано:

$$\therefore (b_n): 4; -1; \frac{1}{4} \dots$$

Найти:  $b_6$

$$\text{Ответ: } b_6 = -\frac{1}{256}.$$

Решение.

$$1). b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$2). q = b_2 : b_1 = -1 : 4 = -\frac{1}{4}$$

$$3). b_6 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^5 = -\frac{4}{4^5} = -\frac{1}{4^4} =$$

$$= -\frac{1}{256}$$

$$q = b_{n-1} : b_n$$

$$(-1)^5 = -1$$

$$a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^5 = -\frac{1}{4^5}$$



2. Найдите номер подчеркнутого члена геометрической прогрессии

$$625; 125; 25; \dots \underline{\frac{1}{25}} \dots$$

Дано:

$\equiv (b_n)$ :

$$625; 125; 25; \dots \underline{\frac{1}{25}} \dots$$

Найти:  $b_n = \frac{1}{25}; n = ?$

Решение.

$$1). b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$2). b_1 = 625$$

$$q = b_2 : b_1 = \frac{125}{625} = \frac{1}{5}$$

$$3). \frac{1}{25} = 625 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$5^{-2} = 5^4 \cdot 5^{1-n};$$

$$5^{-2} = 5^{5-n}; -2 = 5-n;$$

$$-7 = -n; n = 7$$

$$q = b_{n-1} : b_{n-2}$$

$$\frac{1}{25} = 5^{-2}; 625 = 5^4$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = (5^{-1})^{n-1} = 5^{1-n}$$

$$5^m = 5^n \Rightarrow m = n$$

3. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если  $b_1 = -128$ ,  $b_7 = -2$ .

Дано:

$$\equiv (b_n): b_1 = -128$$

$$b_7 = -2$$

Найти:  $q = ?$

Решение.

$$2). b_1 = -128; b_7 = -2; n = 7$$

$$3). -2 = -128 \cdot q^6; | : (-128)$$

$$\frac{2}{128} = q^6; q^6 = \frac{1}{64}; q^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$|q| = \frac{1}{2}; q = \pm \frac{1}{2}$$

$$1). b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|$$

Ответ:  $q_1 = \frac{1}{2}; q_2 = -\frac{1}{2}$ .

4. ГИА. В геометрической прогрессии  $b_{12} = 3^{15}; b_{14} = 3^{17}$  найдите  $b_1$ .

Дано:

$\equiv (b_n)$ :

$$b_{12} = 3^{15}$$

$$b_{14} = 3^{17}$$

Найти:

$$b_1 = ?$$

Решение.

$$2). b_{14} = b_{12} \cdot q^2$$

$$3^{17} = 3^{15} \cdot q^2; q^2 = 3^{17} : 3^{15}; q^2 = 3^2$$

$$\sqrt{q^2} = \sqrt{3^2}; |q| = 3; q_1 = 3; q_2 = -3$$

$$3). b_1 = b_{12} : q^{11}$$

$$b_1 = 3^{15} : (-3)^{11} = -3^4 = -81 \text{ или}$$

$$b_1 = 3^{15} : 3^{11} = 3^4 = 81$$

$$1). b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$b_n = b_k \cdot q^{k-n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$b_{12} = b_1 \cdot q^{11}$$

Ответ:  $b_1 = -81$  или  $b_1 = 81$ .



5. ГИА. Три положительных числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  образуют геометрическую прогрессию, а числа  $a - b$ ;  $b + c$ ;  $b - c$  образуют арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Дано:

$$\therefore a, b, c, > 0;$$

$$\div a - b; b + c; b - c$$

Найти:  $q = ?$

Решение.

Применим свойства арифметической и геометрической прогрессий:

$$1). b^2 = a \cdot c$$

$$2). b + c = \frac{a - b + b - c}{2} = \frac{a - c}{2} \quad | \cdot 2$$

$$2b + 2c = a - c$$

$$2b + 3c = a$$

$$3). \begin{cases} 2b + 3c = a \\ b = a \cdot q \\ c = a \cdot q^2 \end{cases}$$

$$4). 2aq + 3aq^2 = a \quad | : a$$

$$2q + 3q^2 - 1 = 0$$

$$3q^2 + 2q - 1 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{3}$$

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Пусть  $b_1 = a$

$$b_2 = b = a \cdot q$$

$$b_3 = c = a \cdot q^2$$

$$\therefore a; aq, aq^2$$

$$q_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

Ответ:  $q = \frac{1}{3}$ .

$$q_1 = \frac{-1+2}{3} = \frac{1}{3}; q_2 = \frac{-1-2}{3} = -1 \text{ — не удовлетворяет условию}$$

**Сумма  $n$  членов геометрической прогрессии.**  
**Формулы суммы  $n$  членов геометрической прогрессии**

$$1. S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$2. S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad (I) \quad S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1} \quad (II)$$

**З а м е ч а н и е.** Если  $q > 1$  (прогрессия возрастает), то применяйте I или II формулу. Если  $|q| < 1$ , то удобно применять формулу III или IV.

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} \quad (III)$$

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q} \quad (IV)$$



## Алгоритм

120

Нахождение суммы  $n$  членов геометрической прогрессии или нахождение числа  $n$  по сумме

1. Запишите «Дано» и «Найти».
2. Запишите одну из формул (I—IV).
3. Найдите все элементы в формуле и вычислите  $S_n$  или для нахождения  $n$  решите уравнение относительно  $n$ .
4. Запишите ответ.

## Примеры

1. Найдите сумму  $n$  первых членов геометрической прогрессии,

если  $b_1 = 256$ ;  $q = -\frac{1}{2}$ . Найдите  $S_8$ .

Дано:

 $\div (b_n)$ :

$$b_1 = 256$$

$$q = -\frac{1}{2}$$

Найти:

$$S_8 = ?$$

Решение.

$$1). S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$2). S_8 = \frac{256 \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^8\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{256 \left(1 - \frac{1}{256}\right)}{\frac{3}{2}} = \frac{256 - \frac{256}{256}}{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{(256-1) \cdot 2}{3} = \frac{255 \cdot 2}{3} = 170$$

 $|q| < 1$  — III формула

$$2^8 = 256$$

$$a(b-c) = ab - ac$$

$$a : \frac{c}{d} = \frac{ad}{c}$$

$$\frac{a}{a} = 1$$

Ответ:  $S_8 = 170$ .

2. Найдите число членов геометрической прогрессии, если  $b_1 = 6$ ;  $q = 3$ ;  $S_n = 726$ .



Дано: Решение.

 $\div(b_n):$ 

$b_1 = 6$

$q = 3$

$S_n = 726$

Найти:

$n = ?$

1).  $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$  (I)  $q > 1$

2). Подставим данные  $S_n$ ,  $q$  и  $b_1$  в формулу и найдем  $n$ :

$$726 = \frac{6 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} = 3(3^n - 1)$$

Ответ:

$n = 5.$

$726 = 3^{n+1} - 3; 729 = 3^{n+1}$

$3^6 = 3^{n+1};$

$6 = n + 1; n = 5$

$3^1 \cdot 3^n = 3^{n+1}$

$729 = 3^6; 3^m = 3^n, \text{ то } m = n$

3. ГИА. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии, третий член которой равен 54, а пятый равен 6.

Дано:

Решение.

 $\div(b_n):$ 

$b_3 = 54$

$b_5 = 6$

1).  $b_3 \cdot b_5 = b_4^2$

$b_4^2 = 54 \cdot 6 = 324$

$|b_4| = 18; b_4 = 18; b_4 = -18$

2). Найдем  $q$ :

$q_1 = b_5 : b_4 = 6 : 18 = \frac{1}{3}$

$q_2 = b_5 : b_4 = 6 : (-18) = -\frac{1}{3}$

3). Найдем  $b_1$ :

$b_1 = 54 : \left(\pm \frac{1}{3}\right)^2 = 54 \cdot 9 = 486$

4). Найдем  $S_6^*$ , если  $q = \frac{1}{3}$  и  $S_6^{**}$ , если  $q = -\frac{1}{3}$ :

$$S_6^* = \frac{486 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^6\right)}{1 - \frac{1}{3}} = 486 \left(1 - \frac{1}{729}\right) : \frac{2}{3} =$$

$$= \left(486 - \frac{486}{729}\right) : \frac{2}{3} = \left(486 - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{2} = \frac{486 \cdot 3}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} =$$
$$= 729 - 1 = 728$$

так как  $b_5 < b_3$  —  $b_n$  убывает, то  $|q| < 1$ 

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} \text{ (III)}$$

$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$

$q = b_{n+1} : b_n$

$b_3 = b_1 \cdot q^2$

$b_1 = b_3 : q^2$

$$S_6 = \frac{b_1(1 - q^6)}{1 - q}$$

$a(b - c) = ab - ac$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

$$486 \cdot \frac{1}{729} = \frac{2}{3}$$



$$S_6^{**} = \frac{486 \left( 1 - \left( -\frac{1}{3} \right)^6 \right)}{1 - \left( -\frac{1}{3} \right)} = 486 \left( 1 - \frac{1}{729} \right) : \frac{4}{3} = \left( 486 - \frac{486}{729} \right) \cdot \frac{3}{4} =$$

$$= \frac{486 \cdot 3}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{729}{2} - \frac{1}{2} = \frac{728}{2} = 364$$

Ответ:  $S_6^* = 728$ ;  $S_6^{**} = 364$ .

4. ГИА. Сумма первого и пятого членов геометрической прогрессии равна 51, а сумма второго и шестого членов равна 102. Сколько членов этой прогрессии, начиная с первого, нужно сложить, чтобы их сумма была равна 3069?

Дано:

Решение.

$\div (b_n)$ :

1).  $b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^5 = 102$  (I)

$b_1 + b_5 = 51$

$(b_2 + b_6)$

$b_2 + b_6 = 102$

$b_1 + b_1 \cdot q^4 = 51$  (II)

$S_n = 3069$

$(b_1 + b_5)$

Найти:

2). Поделим почленно

$n = ?$

I уравнение на II:

$$\frac{b_1 \cdot q(1+q^4)}{b_1(1+q^4)} = \frac{102}{51}; q = 2$$

3). Найдем  $b_1$ , подставим  $q = 2$  во II уравнение:

$$b_1 \cdot (1+q^4) = 51$$

$$b_1 = 51:17; b_1 = 3$$

4). Подставим  $b_1$  и  $q$

в формулу  $S_n$ :  $S_n = \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1}$

Подставим  $S = 3069$ :

$$3069 = 3(2^n - 1) \quad | :3$$

$$1023 = 2^n - 1$$

5). Найдем  $n$ :

$$1024 = 2^n; 2^{10} = 2^n; n = 10$$

Ответ:  $n = 10$ .

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$b_2 = b_1 \cdot q$$

$$b_5 = b_1 \cdot q^4$$

$$b_6 = b_1 \cdot q^5$$

$$1 + q^4 = 1 + 2^4 = 17$$



## Проверь себя!

1. В геометрической прогрессии  $-10; 20; -40 \dots$  найдите  $b_7$  и  $S_4$ .

Ответ:  $b_7 = -640; S_4 = 50$ .

2. Укажите номер члена геометрической прогрессии  $4; 12; 36 \dots$ , если  $b_n = 972$ .

Ответ:  $n = 6$ .

## Попробуй-ка реши!

1. Между числами 2 и 18 вставьте три числа так, чтобы получилась геометрическая прогрессия.

2. Три числа образуют арифметическую прогрессию, а их квадраты составляют геометрическую прогрессию. Найдите эти числа, если их сумма равна 42.

Ответ: 1.  $2\sqrt{3}; 6; 6\sqrt{3}$  или  $-2\sqrt{3}; 6; -6\sqrt{3}$ .

2.  $14 - 14\sqrt{2}; 14; 14 + 14\sqrt{2}$  (указание:  $b^4 = a^2 \cdot c^2$ , то  $b^2 = |a \cdot c|$ ).



## Глава XII. Функция

### Введение

В нашей жизни происходит множество различных процессов, в которых мы участвуем, например движение на транспорте, рост цветка, дерева, зависимость цены на товар и количества товара, которое можно купить, и т. д.

Если зависимость между двумя переменными такова, что каждому значению одной переменной соответствует только одно значение другой переменной, то эта зависимость между переменными будет функцией.

С помощью функции можно изучать поведение зависимой переменной: возрастает она или убывает, имеет ли нули (это и есть решение уравнения), какие знаки имеет функция (это решение неравенств) и т. д.

Функция — одна из главных тем математики, поэтому уже в 7-м классе вы начинаете изучать эту тему.

Функцию можно изобразить на графике (рисунке) и по графику определить многие ее свойства, чем и пользуются люди, например, изображая графики движения поездов, в метеорологии измерение силы ветра каждый час в сутки, измерение температуры больного ежечасно и т. д.

Математика изучает процессы абстрактно, не учитывая цвета, химических свойств, запаха и т. д., а учитывая только зависимость между величинами.

Итак, перейдем к самой интересной теме математики.



## § 1.

## Переменные и постоянные величины

**Определение 1.** Величины, которые не меняют своего значения в условиях данной задачи, называют постоянными.

Например,  $S = v \cdot t$  — формула пути, где  $v$  — скорость, постоянная величина

$C = 2\pi R$  — формула длины окружности, где  $2$  и  $\pi$  — всегда постоянные величины

**Определение 2.** Величины, которые меняют свое значение в условиях данной задачи, называют переменными.

Например, в формуле  $S = v \cdot t$  если  $v$  — постоянная величина, то  $t$  и  $S$  — переменные. Пусть  $v = 20$  км/ч,  $t = 3$  часа, то  $S = 20 \cdot 3 = 60$  км; если  $t = 5$  часов, то  $S = 20 \cdot 5 = 100$  км и т. д.

В формуле  $C = 2\pi R$  переменными величинами будут  $R$  и  $C$ .

**З а м е ч а н и е.** Если изменить условие задачи, то в формуле  $S = v \cdot t$  можно сделать  $t$  постоянной величиной, а  $v$  и  $S$  переменными, но в формуле  $C = 2\pi R$   $2\pi$  — всегда постоянные (*constant*), а  $R$  и  $C$  — переменные, поэтому важно знать, какое условие наложено на величины в задаче.

Переменные величины бывают зависимые и независимые.

**Определение 3.** Независимой переменной величиной называется величина, которой можно придавать любые допустимые числовые значения, чтобы можно было найти числовое значение выражения.

Независимая переменная величина называется **аргументом** и обычно обозначается буквой  $x$  (может быть и другая буква:  $t$ ,  $\varphi$ ,  $\alpha$ ).

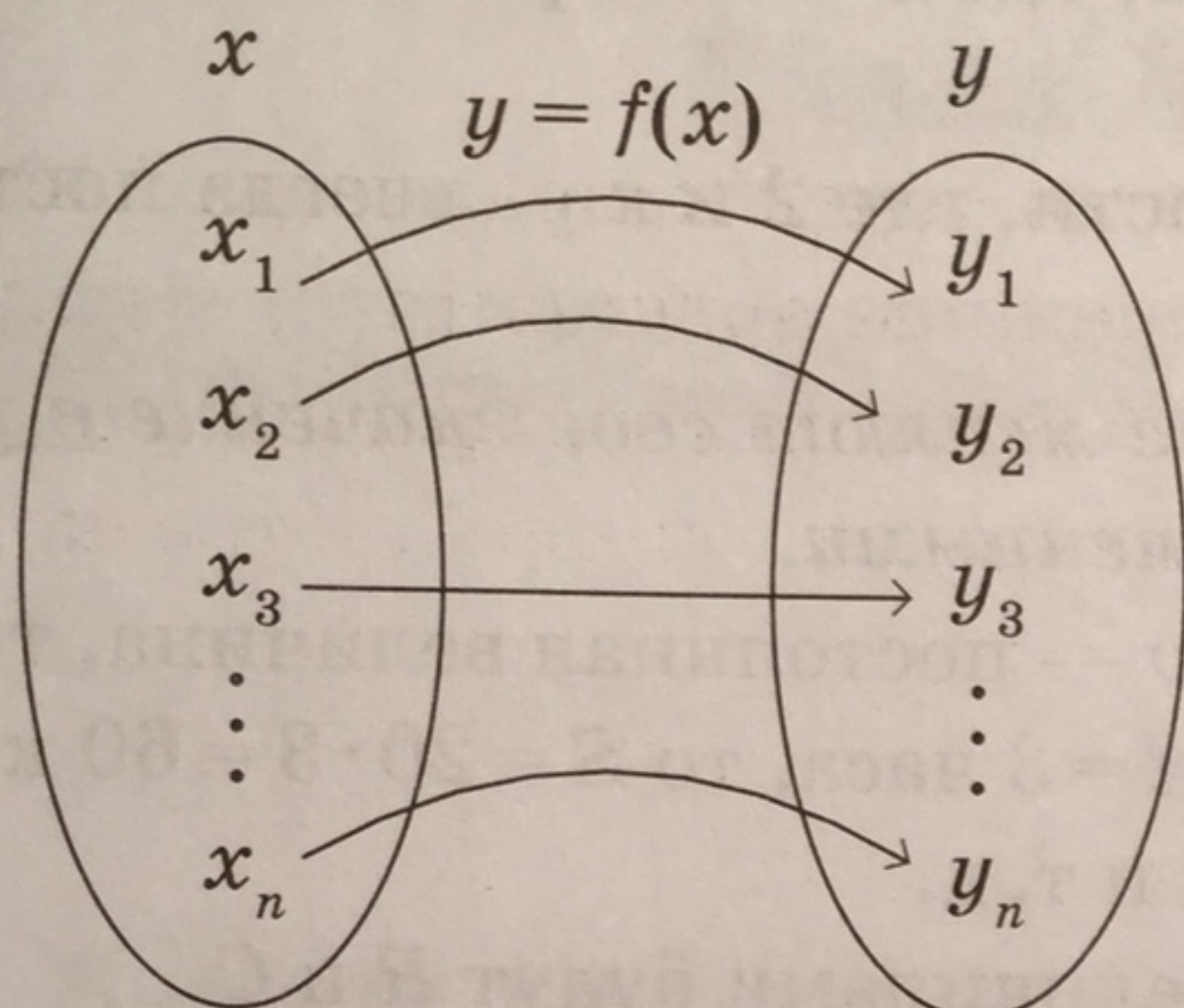
**Определение 4.** Зависимая переменная — величина, значения которой зависят от независимой переменной, и ее называют функцией.

Обозначается функция обычно буквой  $y$  (может быть и другая буква:  $S$ ,  $z$ ,  $Q$ ).

**Определение 5.** Если каждому значению  $x$  можно найти только одно значение  $y$ , то между  $x$  и  $y$  устанавливается функциональная зависимость, которая символически обозначается так:  $y = f(x)$  (читается:  $y$  есть функция от  $x$ ) или:  $S = f(t)$  (читается:  $S$  есть функция от  $t$ ).



**З а м е ч а н и е.** Запись  $y = f(x)$  не является конкретной формулой. Она лишь указывает, что  $x$  — независимая переменная, а  $y$  — зависимая переменная и что между ними установлена функциональная зависимость.



Множество  
значений  $x$   
(аргумент)  
или область  
определения  
функции

Множество  
значений  $y$   
(функция)  
или множество  
значений  
функции

Рис. 30

**П о л е з н ы й с о в е т.** Удобно изображать функциональную зависимость между  $x$  и  $y$  в виде двух «мешков» множеств  $x$  и  $y$  (рис. 30).

Из первого множества значений  $x$  берем любое число, а из второго множества  $y$  подбираем число, которое подойдет для  $x$ .

## Способы задания функции

Функция может быть задана:

1) формулой, например:  $y = 5x$ ;  $y = x^2$ ;  $y = x - 1$  и т. д.

*Формула* — это правило, записанное буквами, как по данному значению  $x$  вычислить соответствующее ему значение  $y$ .

2) таблицей, например:

$x$	1	2	3	4	...
$y$	0	1	2	3	...

где в верхней строке записывают значения  $x$ , а в нижней строке — соответствующие им значения  $y = f(x)$ .

Например, в верхней строке — часы, а в нижней строке — соответствующая каждому часу температура воздуха.



Удобно записывать в таблицу значения  $x$  и  $y$  из формулы, например  $y = x^2$ , где  $x$  — натуральные числа.

$x$	1	2	3	4	5	...
$y$	1	4	9	16	25	...

### 3) графиком

**График функции** — это множество всех точек координатной плоскости, у которых абсциссы равны значениям аргумента  $x$ , а ординаты равны соответствующим значениям функции  $y$ . График может быть изображен множеством отдельных точек, линией, отрезком, прямой или несколькими линиями.

### 4) правилом. Описательно.

Рассмотрим каждый способ задания функции.

## Алгоритм

121

## Вычисление значений функции по формуле

1. Запишите формулу и определите в ней независимую переменную  $x$  и зависимую  $y$ .
2. Подставьте числовое значение  $x$  в формулу и вычислите полученное числовое выражение, получите числовое значение  $y$  (функции).
3. Если дано значение  $y$ , то подставьте вместо  $y$  его значение и решите уравнение относительно  $x$ ; корни уравнения будут соответствующими значениями  $x$  для заданного значения  $y$ .

## Примеры

1. Функция задана формулой  $y = 3x - 1$ . Найдите: 1).  $y(0)$ ; 2).  $y(1)$ ; 3).  $y(-2)$ .

**Решение.**

$$1). y(0) = 3 \cdot 0 - 1 = -1; y(0) = -1$$

$$2). y(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 3 - 1 = 2; y(1) = 2$$

$$3). y(-2) = 3 \cdot (-2) - 1 = -6 - 1 = -7; y(-2) = -7$$

$$x = 0$$

$$x = 1$$

$$x = -7$$



2. Функция задана формулой  $S(t) = 20t$ . Найдите  $S(2)$ ;  $S(1,5)$ .

Решение.

$$1). S(2) = 20 \cdot 2 = 40$$

$$2). S(1,5) = 20 \cdot 1,5 = 30$$

$$t = 2$$

$$t = 1,5$$

3. Функция задана формулой  $P(x) = \frac{1}{3}(2x+1)$ . Найдите значения  $x$ , если: 1).  $P(x) = 0$ ; 2).  $P(x) = -9$ .

Решение.

$$1). \frac{1}{3}(2x+1) = 0 \quad | \cdot 3; 2x+1 = 0$$

$$2x = -1 \quad | :2; x = -\frac{1}{2}; P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$2). \frac{1}{3}(2x+1) = -9 \quad | \cdot 3; 2x+1 = -27$$

$$2x = -28 \quad | :2; x = -14; P(-14) = -9$$

Подставьте 0 вместо  $P(x)$  и найдите  $x$

Вместо  $P(x)$  подставьте  $(-9)$  и найдите  $x$

Ответ: 1).  $x = -\frac{1}{2}$ ; 2).  $x = -14$ .

## Проверь себя!

Функция задана формулой  $y = 3 - 2x$ .

Найдите: 1).  $y(0)$ ; 2).  $y(1)$ ; 3). Значение  $x$ , если  $y(x) = 4$ .

Ответ: 1). 3; 2). 1; 3).  $x = -\frac{1}{2}$ .

Попробуй не реши!

Заполните таблицу.

$x$	-2	-1	0	...	...	...
$y = -5x + 1$	...	...	...	2	14	21

Ответ:

$$y(-2) = 11; y(-1) = 6; y(0) = 1; y\left(-\frac{1}{5}\right) = 2; y\left(-\frac{13}{5}\right) = 14; y(-4) = 21.$$



## § 2.

## Прямоугольная система координат

**Определение 1.** Две взаимно-перпендикулярные прямые с выбранным на них направлением положительных чисел (обозначенным стрелкой) и заданной единицей длины образуют прямоугольную систему координат на плоскости. Точка пересечения осей  $O(0; 0)$  называется началом системы координат (рис. 31).

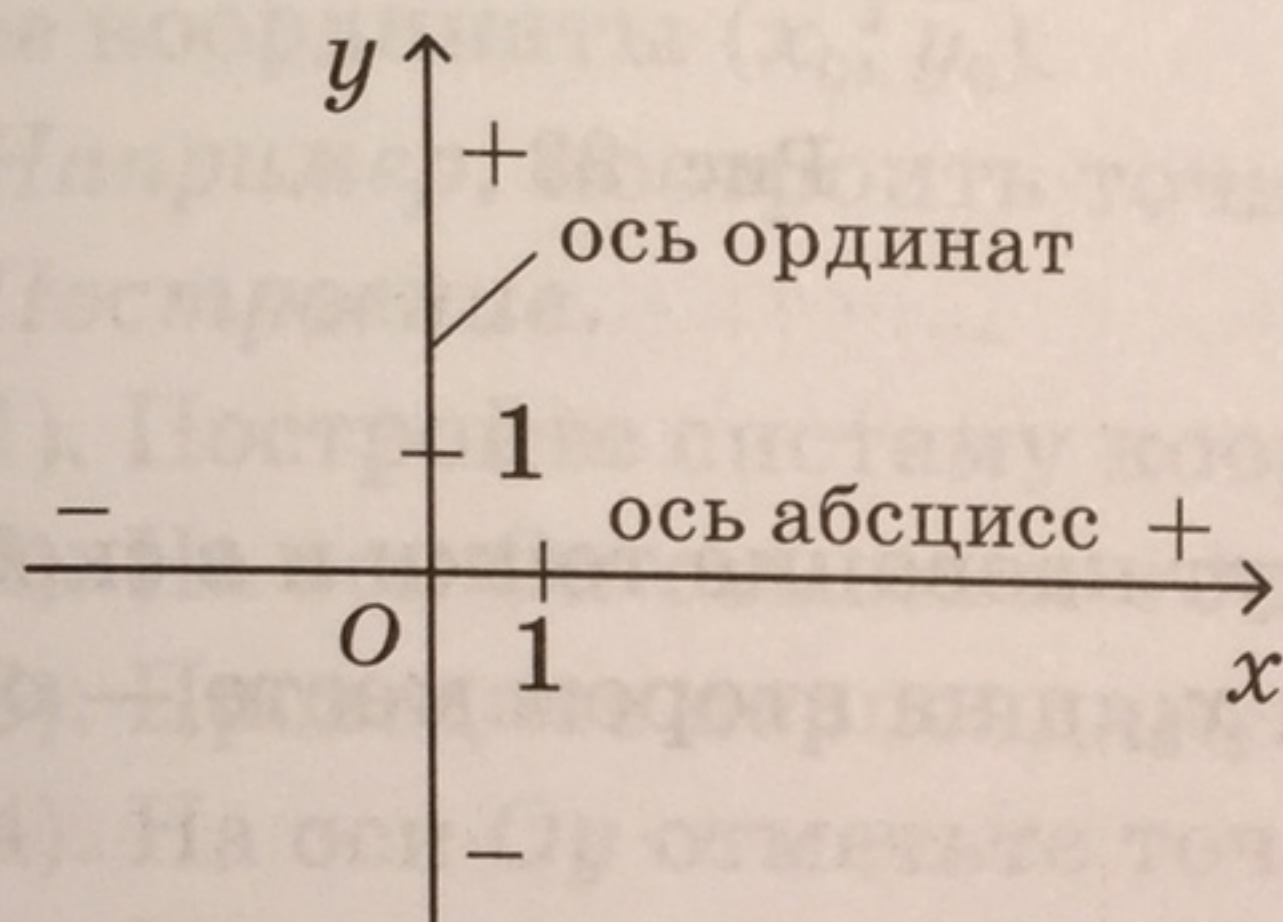


Рис. 31

**Определение 2.** Плоскость, на которой выбрана система координат, называют координатной плоскостью.

**Определение 3.** Ось  $Ox$  называется осью абсцисс (разделяющая ось), поэтому координата  $x_0$  называется абсциссой точки. Ось  $Oy$  называется осью ординат (упорядоченная ось), поэтому координата  $y_0$  называется ординатой точки.

**Определение 4.** Координатами точки  $M$  на координатной плоскости называются положительные числа  $x_0$  и  $y_0$  (абсцисса и ордината), если проекция точки  $M$  расположена на положительном направлении оси, и отрицательные числа  $x_0$  и  $y_0$ , если проекция точки  $M$  расположена на отрицательном направлении оси (рис. 32).

**Определение 5.** Прямые углы, образуемые осями координат, называются координатными углами (квадрантами) и обозначаются: I и II угол в верхней полуплоскости, III и IV угол в нижней полуплоскости (рис. 32).



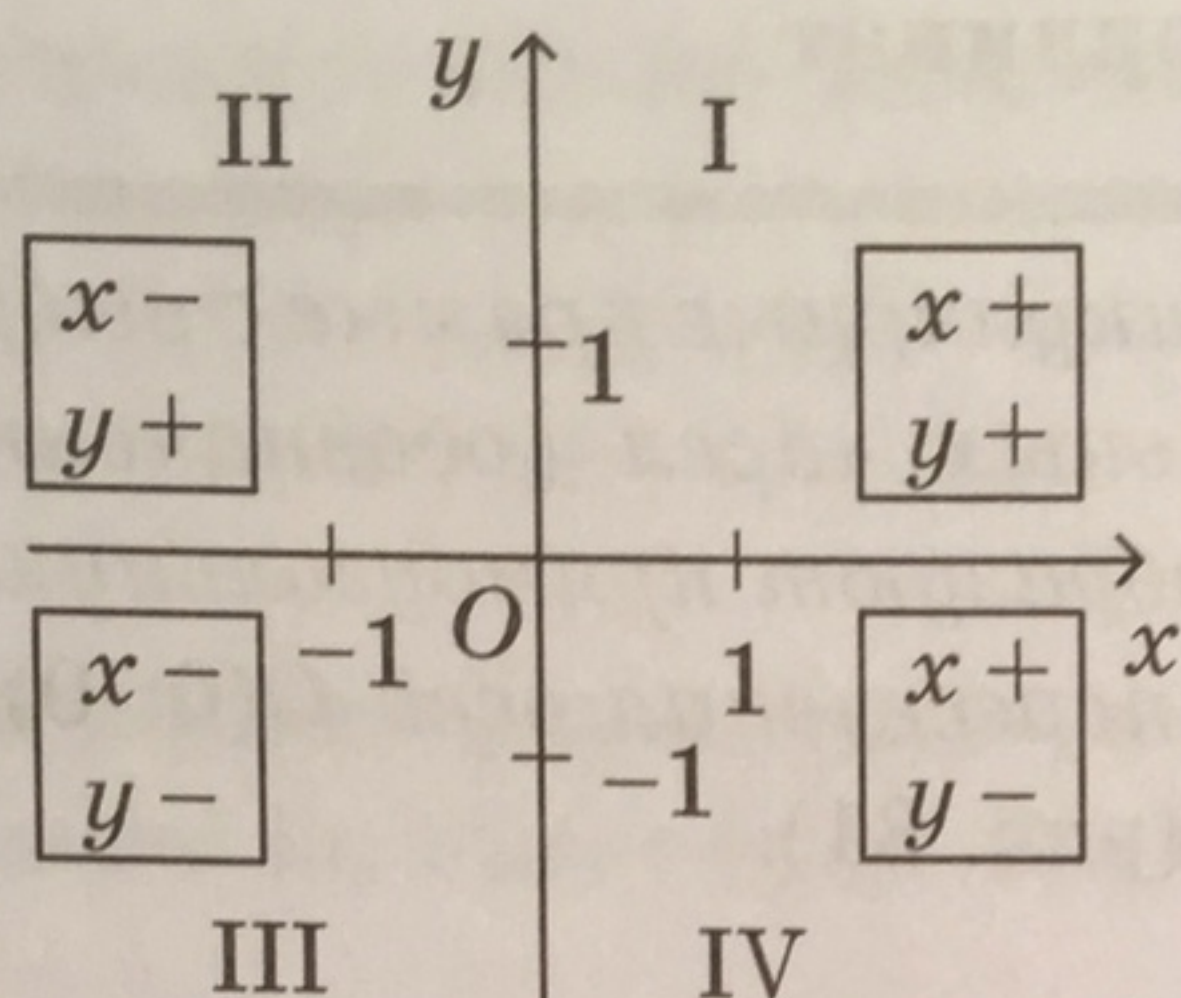


Рис. 32

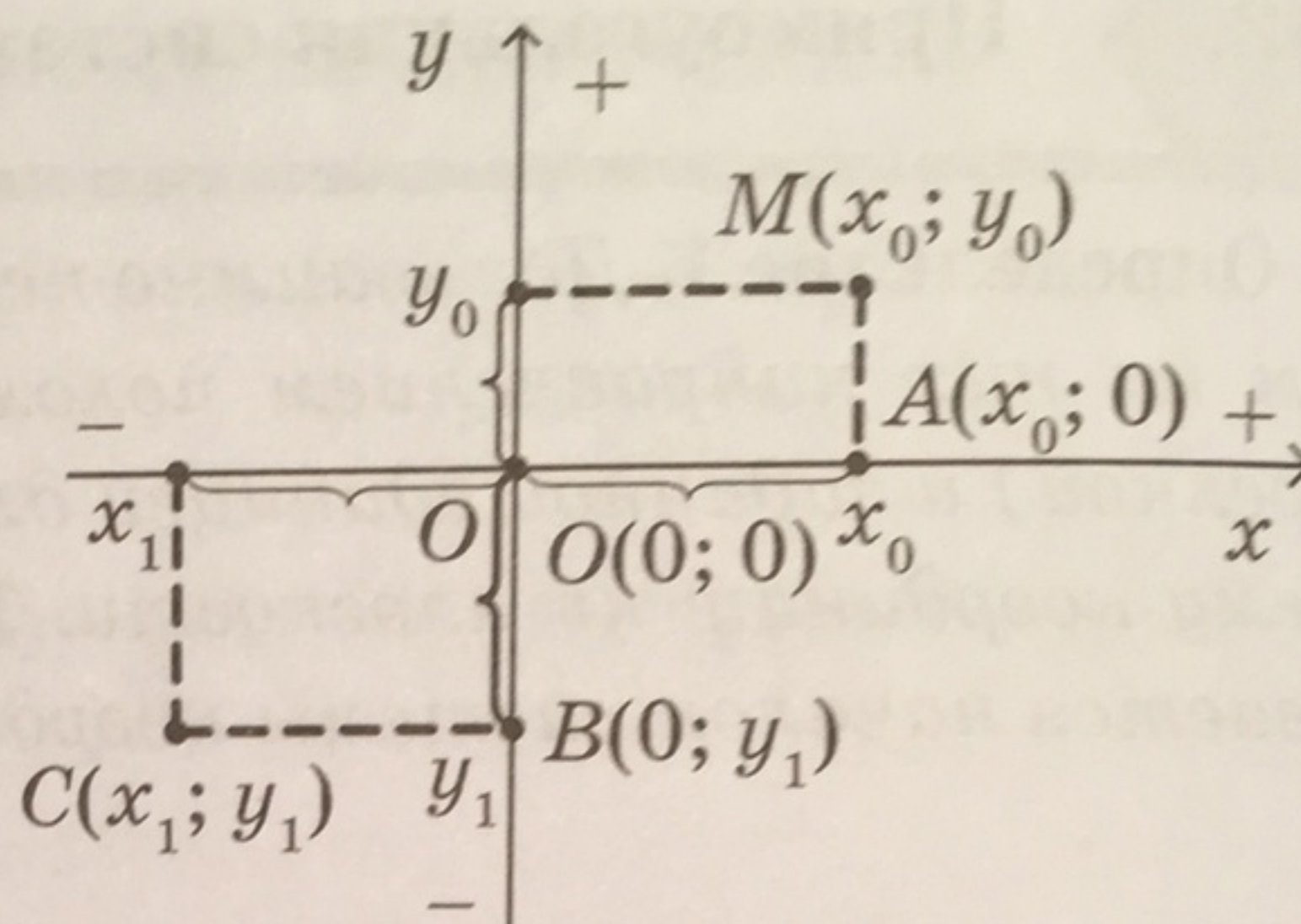


Рис. 33

**З а м е ч а н и я**

1. При записи координат точки  $M$  пишут название точки и в скобках справа на первом месте абсциссу точки  $x_0$ , а на втором месте — ординату точки  $y_0$ :  $M(x_0; y_0)$ .

2. Если точка  $A$  лежит на оси  $Ox$  (оси абсцисс), то ее ордината  $y_0 = 0$ :  $A(x_0; 0)$ . Если точка  $B$  лежит на оси  $Oy$  (оси ординат), то ее абсцисса  $x_0 = 0$ :  $B(0; y_1)$ .

Нуль имеет координаты:  $x_0 = 0$  и  $y_0 = 0$ , т. е.  $O(0; 0)$  (рис. 33).

**Пример**

Не строя точек, укажите, каким координатным углам они принадлежат: 1).  $A(2; 3)$ ; 2).  $B(-3; 3)$ ; 3).  $C(-1; -4)$ ; 4).  $D(2; -5)$ ; 5).  $E(4; 0)$ ; 6).  $F(-2; 0)$ ; 7).  $P(0; -3)$ .

*Решение.*

1). Точка  $A(2; 3)$  лежит в I четверти, так как ее координаты  $(+x_0; +y_0)$ .

2). Точка  $B(-3; 3)$  лежит во II четверти, так как ее координаты  $(-x_0; +y_0)$ .

3). Точка  $C(-1; -4)$  лежит в III четверти:  $(-x_0; -y_0)$ .

4). Точка  $D(2; -5)$  лежит в IV четверти:  $(+x_0; -y_0)$ .

5). Точка  $E(4; 0)$  лежит на оси  $Ox$  справа от нуля:  $(+x_0; 0)$ ;  $y_0 = 0$ .

6). Точка  $F(-2; 0)$  лежит на оси  $Ox$  слева от нуля:  $(-x_0; 0)$ ;  $y_0 = 0$ .

7). Точка  $P(0; -3)$  лежит на оси  $Oy$  вниз от нуля:  $(0; -y_0)$ ;  $x_0 = 0$ .



1. Постройте систему координат  $Oxy$ .
2. На оси абсцисс ( $Ox$ ) отметьте точку с координатой  $x_0$ :  $(x_0; 0)$ .
3. Проведите перпендикуляр к оси  $Ox$  через точку  $(x_0; 0)$ .
4. На оси ординат ( $Oy$ ) отметьте точку с координатой  $y_0$ .
5. Проведите перпендикуляр к оси  $Oy$  через точку  $(0; y_0)$ .
6. Точка пересечения перпендикуляров — искомая точка, так как ее координаты  $(x_0; y_0)$ .

Например, построить точку  $A(4; -3)$  (рис. 34).

*Построение.*

- 1). Постройте систему координат  $Oxy$ .
- 2). На оси  $Ox$  отметьте точку  $(4; 0)$ .
- 3). Проведите перпендикуляр через точку  $(4; 0)$  к оси  $Ox$ .
- 4). На оси  $Oy$  отметьте точку  $(0; -3)$ .
- 5). Проведите перпендикуляр к оси  $Oy$  через точку  $(0; -3)$ .
- 6).  $A(4; -3)$  — искомая точка, так как  $x_0 = 4$ ;  $y_0 = -3$ .

**Полезный совет.** Писать каждый раз построение не надо, но обязательно проводите перпендикуляры, и лучше это делать пунктиром.

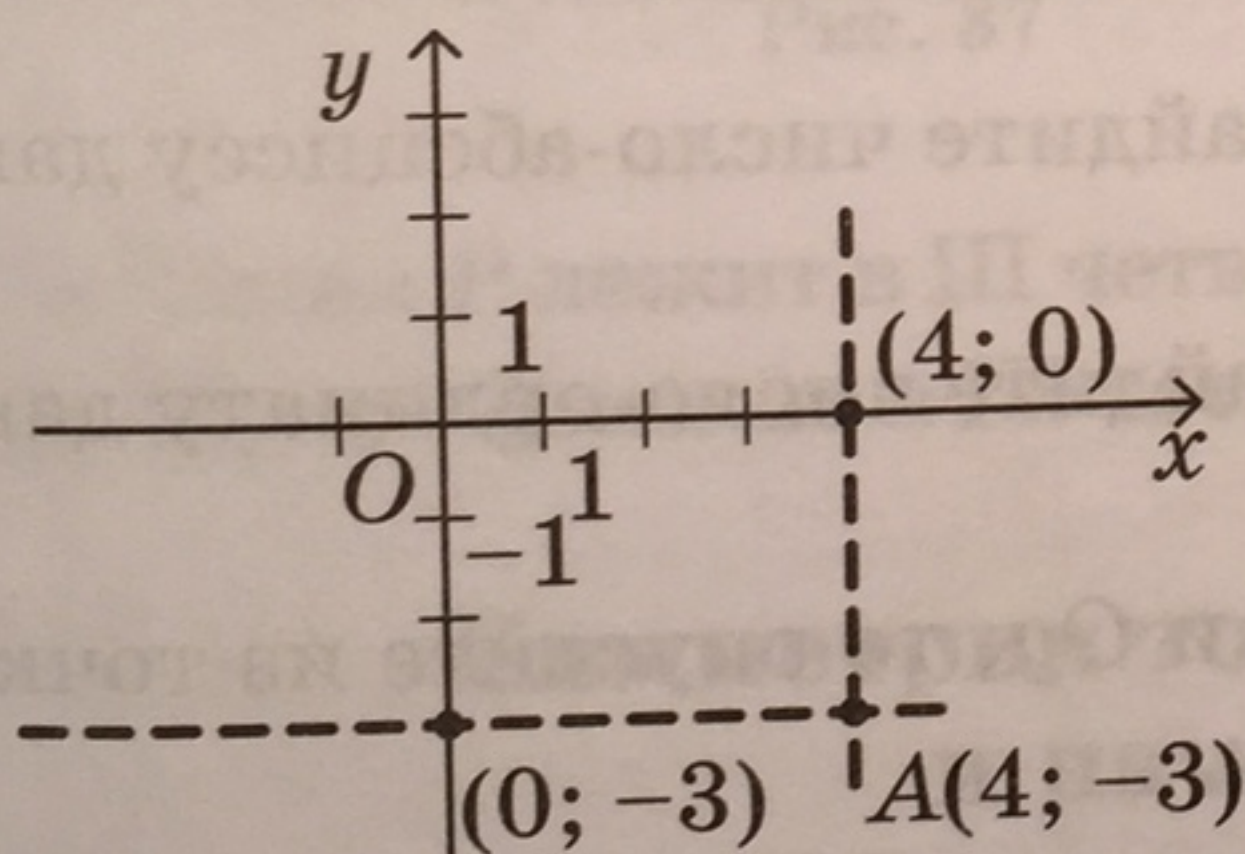


Рис. 34

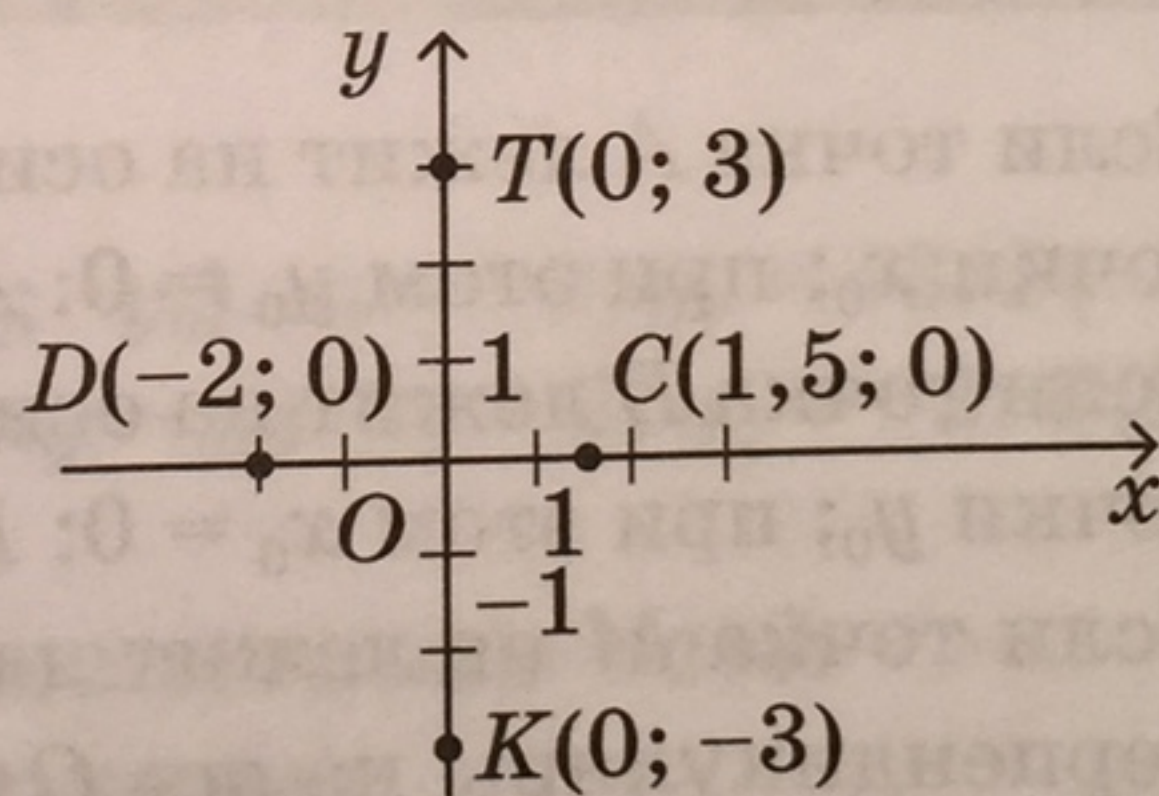


Рис. 35

### Примеры

1. Постройте точки:  $C(1,5; 0)$ ;  $D(-2; 0)$ ;  $K(0; -3)$ ;  $T(0; 3)$  (рис. 35).

*Построение.*

- 1). Точки  $C(1,5; 0)$  и  $D(-2; 0)$  лежат на оси  $Ox$ , так как  $y_0 = 0$ . Отметьте абсциссы точек 1,5 и -2 на оси  $Ox$  и назовите точки.



2). Точки  $K(0; -3)$  и  $T(0; 3)$  лежат на оси  $Oy$ , так как  $x_0 = 0$ , поэтому отметьте на оси  $Oy$  ординаты точек  $-1$  и  $3$  и назовите эти точки.

2. Постройте прямую, проходящую через точки  $A(0; 5)$  и  $B(-2; 5)$ . Чему равны ординаты точек, лежащих на прямой  $AB$  (рис. 36)?

*Построение.*

1). Точка  $A(0; 5)$  лежит на оси  $Oy$ .

2). Точка  $B(-2; 5)$  лежит во II четверти.

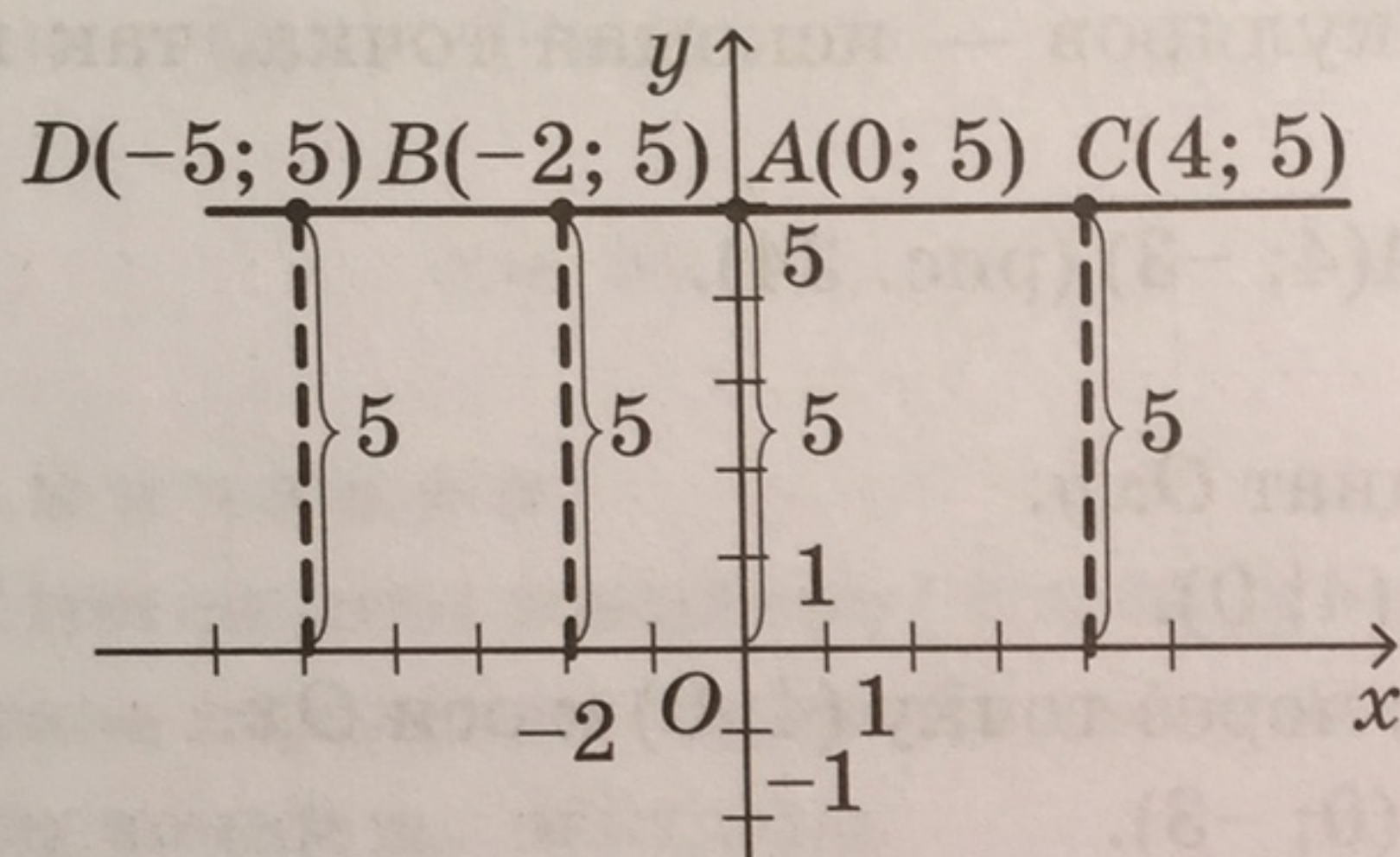


Рис. 36

3). Ординаты точек прямой  $AB$  равны 5, тогда прямая  $AB \parallel Ox$ , расстояния между параллельными прямыми равны, а значит,  $y_0 = 5$  у всех точек прямой  $AB$ . Для примера можно взять точки  $C(4; 5)$  и  $D(-5; 5)$  на прямой  $AB$   $y_c = 5$ ;  $y_D = 5$ .

### Алгоритм

123

### Нахождение координат заданных точек в системе координат

1. Если точка  $A$  лежит на оси  $Ox$ , то найдите число-абсциссу данной точки  $x_0$ ; при этом  $y_0 = 0$ :  $A(x_0; 0)$ .
2. Если точка  $B$  лежит на оси  $Oy$ , то найдите число-ординату данной точки  $y_0$ ; при этом  $x_0 = 0$ :  $B(0; y_0)$ .
3. Если точка  $M$  не лежит на осях  $Ox$  и  $Oy$ , то опустите из точки  $M$  перпендикуляры на ось  $Ox$  и ось  $Oy$ .
4. Найдите на оси  $Ox$  число-абсциссу точки  $M$  (проекция точки  $M$  на ось  $Ox$ ). Найдите на оси  $Oy$  число-ординату точки  $M$  (проекция точки  $M$  на ось  $Oy$ ).
5. Запишите точку  $M(x_0; y_0)$ .

### Пример

Даны точки  $A, B, C, D, M, N, P, Q$  в системе координат (рис. 37). Найдите координаты данных точек.



Решение.

1). Точки  $A$  и  $C$  лежат на оси  $Ox$ ,  $x_A = 4$ ;  $x_C = -4$ ;  $y_A = y_C = 0$ , получим  $A(4; 0)$ ;  $C(-4; 0)$ .

2). Точки  $B$  и  $D$  лежат на оси  $Oy$ , поэтому  $x_B = x_D = 0$ ;  $y_B = -2,5$ ;  $y_D = 0,5$ , получим  $B(0; -2,5)$ ;  $D(0; 0,5)$ .

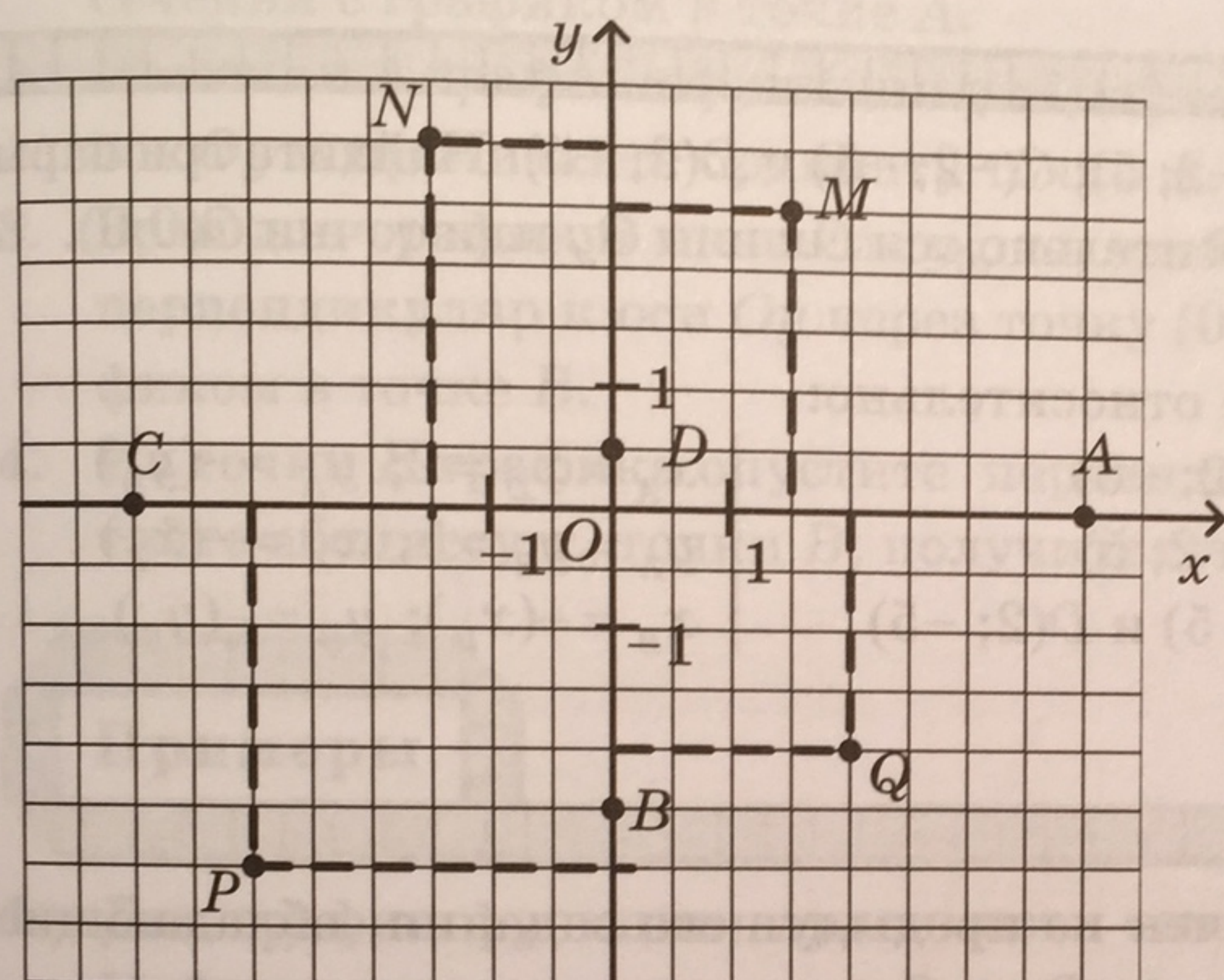


Рис. 37

3). Точка  $M$  лежит в I четверти:  $(+x_0; +y_0)$ , опустите перпендикуляры из точки  $M$  на оси и прочтите числа:  $x_M = 1,5$ ;  $y_M = 2,5$ , получите точку  $M(1,5; 2,5)$ .

4). Точка  $N$  лежит во II четверти:  $(-x_0; +y_0)$ , опустите перпендикуляры из точки  $N$  на оси и прочтите числа:  $x_N = -1,5$ ;  $y_N = 3$ , получите точку  $N(-1,5; 3)$ .

5). Точка  $P$  лежит в III четверти:  $(-x_0; -y_0)$ .  $x_P = -3$ ;  $y_P = -3$ :  $P(-3; -3)$ .

6). Точка  $Q$  лежит в IV четверти:  $(+x_0; -y_0)$ .  $x_Q = 2$ ;  $y_Q = -2$ :  $Q(2; -2)$ .

### Симметрия точек относительно осей и начала координат

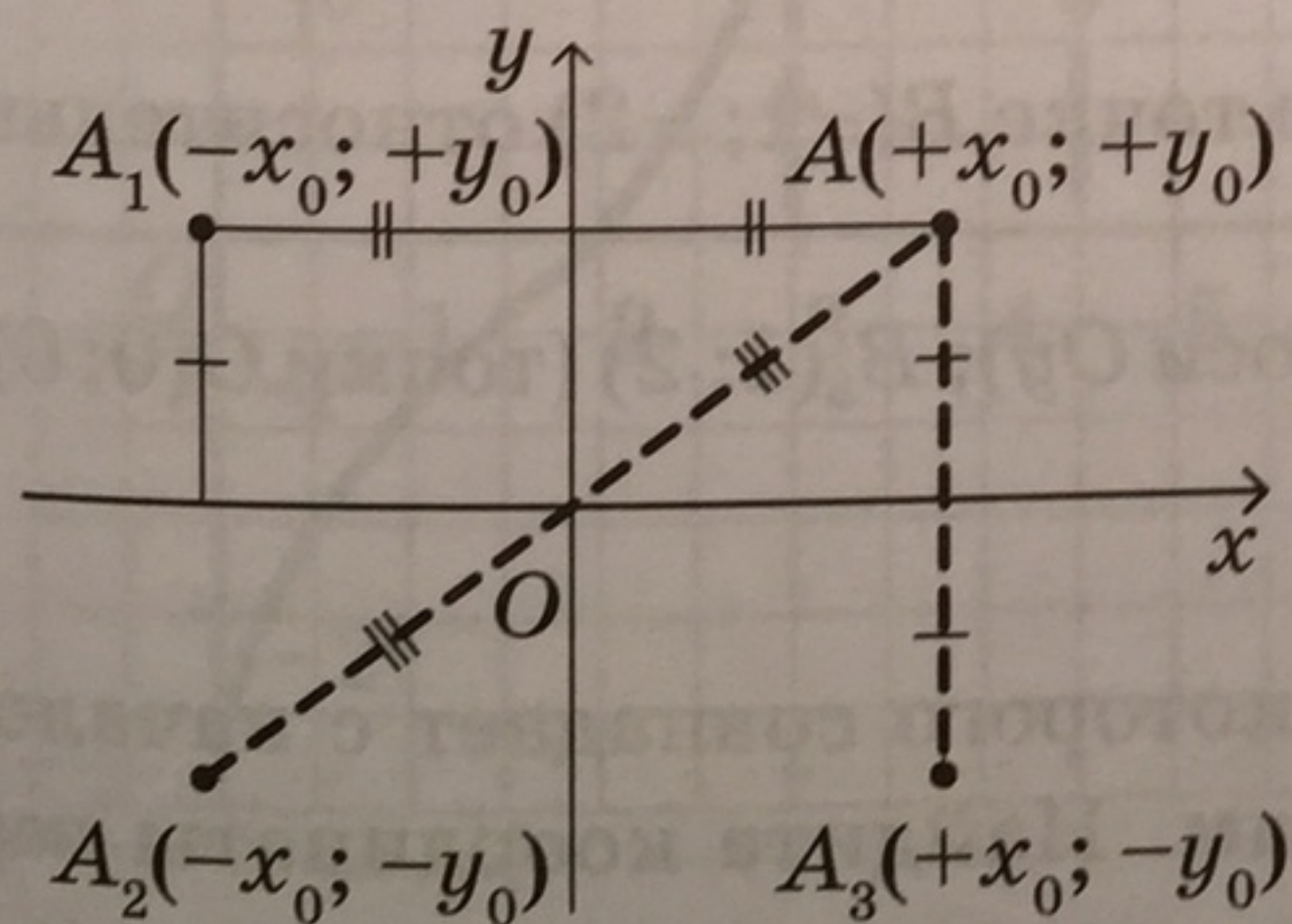


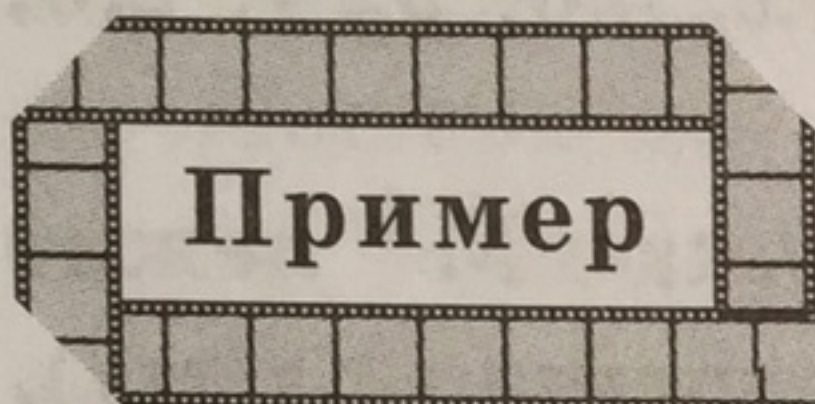
Рис. 38

Точка  $A_1(-x_0; +y_0)$  симметрична точке  $A(+x_0; +y_0)$  относительно оси  $Oy$ : ординаты  $y_0$  равны, а абсциссы — противоположные числа.

Точка  $A_2(-x_0; -y_0)$  симметрична точке  $A(+x_0; +y_0)$  относительно точки  $O(0; 0)$ , координаты  $x_0$  и  $-x_0$ ,  $y_0$  и  $-y_0$  — противоположные числа.



Точка  $A_3(+x_0; -y_0)$  симметрична точке  $A(+x_0; +y_0)$  относительно оси  $Ox$ : абсциссы  $x_0$  равны, а ординаты — противоположные числа (рис. 38).



Даны точки  $A(2; 5)$ ;  $B(-2; 5)$ ;  $C(-2; -5)$  и  $D(2; -5)$ . Найдите три пары точек, симметричных относительно оси  $Ox$  или  $Oy$  или точки  $O(0;0)$ .

*Решение.*

Точки, симметричные относительно:

1) оси  $Ox$ :  $A(2; 5)$  и  $D(2; -5)$

2) оси  $Oy$ :  $A(2; 5)$  и  $B(-2; 5)$

3) точки  $O(0;0)$ :  $B(-2; 5)$  и  $D(2; -5)$

$$x_A = x_D = 2; y_A = -(y_D)$$

$$y_A = y_B = 5; x_A = -(x_B)$$

$$x_B = -(x_D); y_B = -(y_D)$$

### Проверь себя!

Найдите еще пары точек из предыдущего задания, обладающие симметрией относительно оси  $Ox$  и  $Oy$ .

*Ответ:* 1).  $B(-2; 5)$  и  $C(-2; -5)$  ( $Ox$ ); 2).  $C(-2; -5)$  и  $D(2; -5)$  ( $Oy$ ).

### Попробуй не реши!

1. Постройте треугольник по координатам его вершин:  $K(2; -3)$ ;  $M(3; 2)$ ;  $N(-2; 0)$ .

2. Даны три вершины квадрата  $ABCD$ :  $A(-3; -6)$ ;  $B(-3; -2)$ ;  $C(1; -2)$ . Найдите координаты точки  $D$  и построьте квадрат.

*Ответ:*  $D(1; -6)$ .

3. Постройте точки, симметричные точке  $B(-1; -2)$  относительно оси  $Ox$ ;  $Oy$  и точки  $O(0; 0)$ .

*Ответ:*  $B_1(-1; 2)$  (оси  $Ox$ );  $B_2(1; -2)$  (оси  $Oy$ );  $B_3(1; 2)$  (точки  $O(0; 0)$ ).

### Попробуй-ка реши!

Дан квадрат со стороной 6, центр которого совпадает с началом координат, а стороны параллельны осям. Найдите координаты вершин квадрата.

*Ответ:*  $(-3; 3)$ ;  $(3; 3)$ ;  $(3; -3)$ ;  $(-3; -3)$ .



## Алгоритм

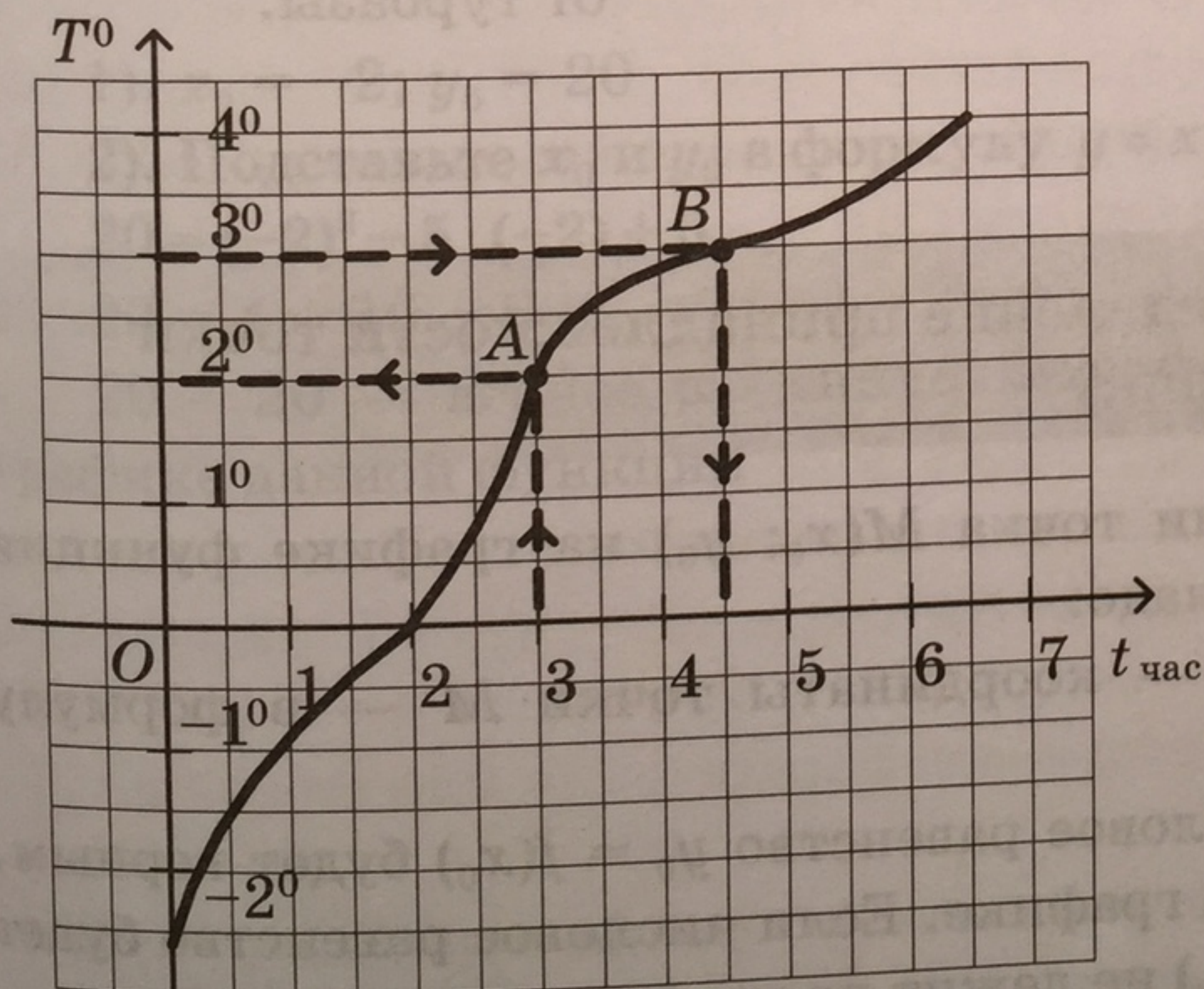
124

Нахождение  $x$  и  $y$  по графику

1. Если дан график функции  $y = f(x)$  и значение  $x_0$ , а надо найти  $y_0$ , то проведите перпендикуляр к оси  $Ox$  через точку  $(x_0; 0)$  до пересечения с графиком в точке  $A$ .
2. Из точки  $A$  графика функции  $y = f(x)$  опустите перпендикуляр на ось  $Oy$  и прочитайте ординату точки  $A$ , получите ответ  $y_0 = f(x_0)$ .
3. Если дан график и значение  $y_0$ , то, чтобы найти  $x_0$ , надо провести перпендикуляр к оси  $Oy$  через точку  $(0; y_0)$  до пересечения с графиком в точке  $B$ .
4. Из точки  $B$  графика опустите перпендикуляр на ось  $Ox$  и прочитайте абсциссу  $x_0$  точки  $B$ , получите ответ.

## Примеры

1. Дан график функции зависимости температуры  $T$  от времени  $t$ . Найдите значение температуры при  $t = 3$  ч, а также время  $t$ , в которое температура  $T = 3^\circ$ .



Решение.

- 1). Если  $t = 3$  ч, то  $T = 2^\circ$ ;  
 $T(3) = 2^\circ$
- 2). Если  $T = 3^\circ$ , то  $t = 4,5$  ч;  
 $T(4,5) = 3^\circ$

Рис. 39

Решение дано по рисунку 39 с применением алгоритма.



2. ГИА. На рисунке 40 изображен график движения туристов во время похода. Используя график, ответьте на вопросы:

- 1). Через сколько часов после начала похода туристы вернулись на турбазу?
- 2). На каком расстоянии от турбазы был сделан первый привал?
- 3). Сколько времени длился второй привал и на каком расстоянии от турбазы?

Решение.

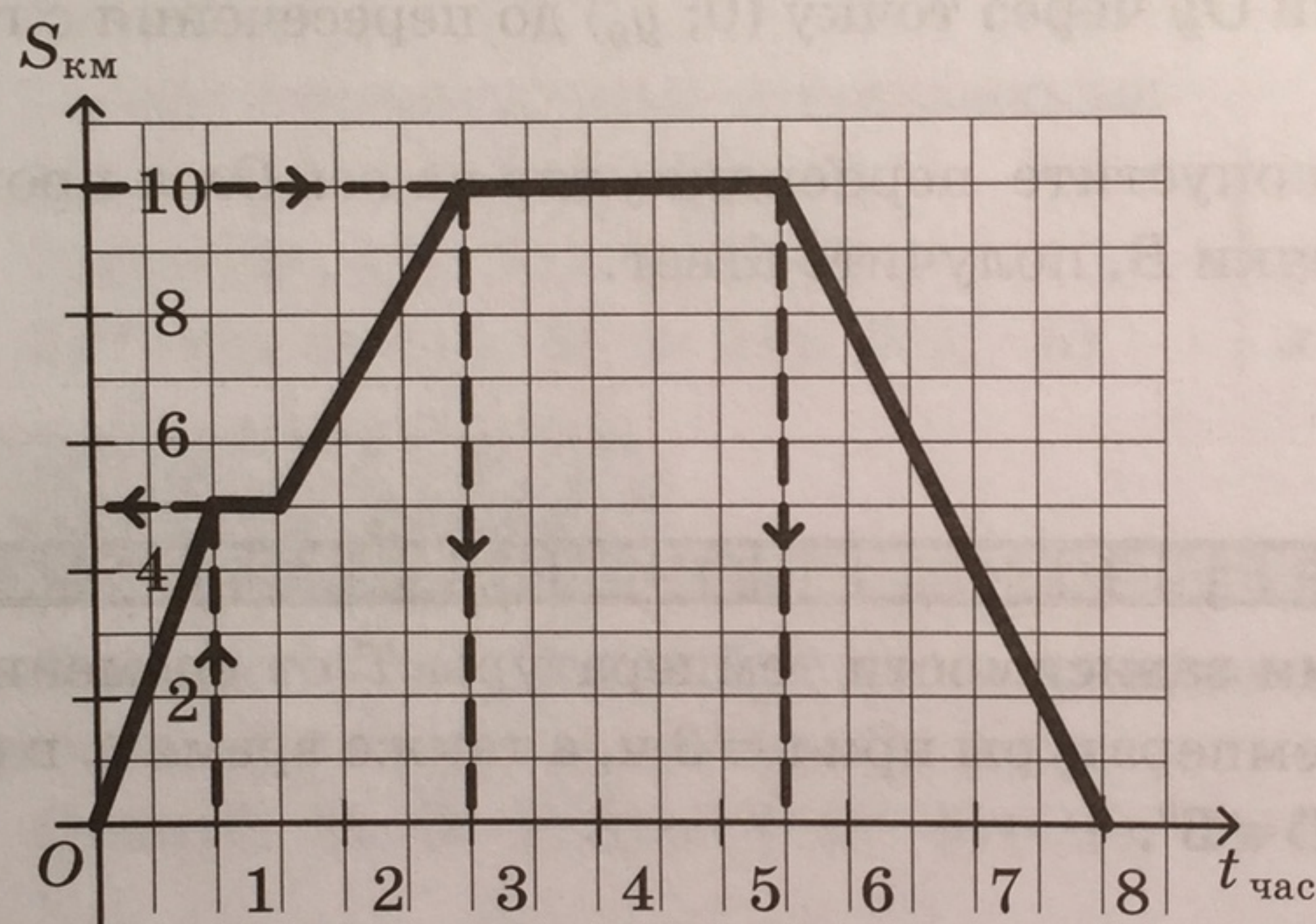


Рис. 40

Ответ:

- 1). Через 8 часов туристы вернулись на турбазу.
- 2). Первый привал был в 1 час дня на расстоянии  $S = 5$  км.
- 3). Второй привал длился 2,5 часа с 3 часов до 5,5 часа на расстоянии 10 км от турбазы.

### Алгоритм

125

### Определение принадлежности точки графику

Чтобы узнать, лежит ли точка  $M(x_0; y_0)$  на графике функции  $y = f(x)$ , не строя графика, надо:

1. Подставить  $y_0$  и  $x_0$  — координаты точки  $M$  — в формулу  $y = f(x)$  вместо  $x$  и  $y$ .

2. Проверить, если числовое равенство  $y_0 = f(x_0)$  будет верным, то точка  $M(x_0; y_0)$  лежит на графике. Если числовое равенство будет неверным, то точка  $M(x_0; y_0)$  не лежит на графике данной функции.

Например, дана функция  $y = 2x + 3$ . Узнайте, лежат ли точки:  
1.  $M(2; 6)$ ; 2.  $A(0; 3)$  на графике данной функции.



Решение.

1). Точка  $M(2; 6)$ :  $x_0 = 2$ ;  $y_0 = 6$ . Подставьте  $x_0$  и  $y_0$  в формулу  $y = 2x + 3$ :  $6 = 2 \cdot 2 + 3$   
 $6 = 7$  — неверное равенство, значит, точка  $M(2; 6)$  не лежит на графике функции  $y = 2x + 3$

2). Точка  $A(0; 3)$ :  $x_0 = 0$ ;  $y_0 = 3$ , тогда  $3 = 2 \cdot 0 + 3$   
 $3 = 3$  — верное равенство, значит, точка  $A(0; 3)$  лежит на графике функции  $y = 2x + 3$

### Пример

Дана функция  $y = x^2 - 5x + 6$ . Выясните, принадлежит ли графику этой функции точка  $A$  с координатами  $(-2; 20)$ .

Решение.

1).  $x_0 = -2$ ;  $y_0 = 20$   
 2). Подставьте  $x_0$  и  $y_0$  в формулу  $y = x^2 - 5x + 6$ :  
 $20 = (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 6$   
 $20 = 4 + 10 + 6$   
 $20 = 20$  — верное равенство, значит, точка  $A(-2; 20)$  лежит на графике данной функции



## §3.

## Свойства функции

Рассмотрим свойства, по которым будем исследовать каждую функцию.

**1. Область определения функции** — это все значения независимой переменной  $x$  (аргумента), для каждого из которых можно найти числовое значение  $y$ .

Например: 1). У функции  $y = \frac{2}{x-1}$  при  $x = 1$  нельзя найти значение  $y$  (на нуль делить нельзя), поэтому область определения данной функции состоит из всех значений  $x$ , кроме  $x = 1$ . На графике — это абсциссы точек графика (на оси  $Ox$ ).

2). Функция  $y = x^2 + 5x - 1$  имеет область определения, состоящую из любых значений  $x$ , для любого значения  $x$  можно найти значение  $y$ . Поэтому необходимо знать у каждой изучаемой нами функции ее область определения.

**2. Множество значений функции** — это все числовые значения зависимой переменной  $y$  (функции), которые получаются, если вместо  $x$  в функцию подставить все их значения из области определения и для каждого найти значение  $y$ .

Например:  $y = 5x$ ,  $x$  — любое число, и если каждое значение  $x$  умножить на 5, то получим множество всех чисел, т. е. множество значений функции  $y = 5x$  есть множество всех чисел. На графике — это ординаты точек графика (на оси  $Oy$ ).

**3. Нули функции** — это те значения  $x$ , при подстановке которых вместо  $x$  в функцию получим  $y = 0$  (это корни уравнения  $y = f(x)$ ).

Например, найти нули функции  $y = 5x + 10$ . Решим уравнение  $5x + 10 = 0$ ,  $x = -2$ ; если вместо  $x$  подставить  $-2$ , то получим  $y = 5 \cdot (-2) + 10 = -10 + 10 = 0$ . Значит,  $x_0 = -2$  — нуль функции, так как  $y(-2) = 0$ .

На графике — это абсциссы точек пересечения или касания графика с осью  $Ox$ .

**4. Промежутки знакопостоянства (знаки функции)** — это все такие значения  $x$ , при подстановке которых вместо  $x$  получим положительные значения  $y$  ( $y > 0$ ) или отрицательные значения  $y$  ( $y < 0$ ). Надо решить неравенство  $f(x) > 0$  или  $f(x) < 0$  либо можно определить



по графику, при каких значениях  $x$  график расположен над осью  $Ox$  ( $y > 0$ ) или под осью  $Ox$  ( $y < 0$ ).

Например, определить значения  $x$ , при которых  $y > 0$  для функции  $y = 2x - 4$ . Решим неравенство  $2x - 4 > 0$ ;  $2x > 4$ ;  $x > 2$ . При  $x > 2$  и  $y > 0$ . Проверим: пусть  $x = 3$ ;  $y = 2 \cdot 3 - 4$ ;  $y = 2$ ;  $2 > 0$  — верно.

**5. Возрастание или убывание функции.** Если взять два значения  $x$  из области определения функции так, что  $x_2 > x_1$ , и подставить их в функцию, и если  $y_2 > y_1$ , то значения функции возрастают (большему значению  $x$  соответствует большее значение  $y$ ). Такую функцию называют **возрастающей**. График возрастающей функции направлен вверх-вправо ( $\nearrow$ ).

Если  $x_2 > x_1$  из области определения функции и при подстановке их в функцию  $y_2 < y_1$ , то такая функция **убывает** (большему значению  $x$  соответствует меньшее значение  $y$ ). График убывающей функции направлен вниз-вправо ( $\searrow$ ).

## 6. Четность, нечетность функции

1). Если знак  $x$  поменять на противоположный, а  $y$  при этом не поменяет свой знак (и значение), то такая функция называется **четной** ( $x$  и  $-x$  — числа из области определения функции).

$$y(-x) = y(x) \quad \text{— условие четности функции}$$

Например:  $y = x^2$ ;  $y(-x) = (-x)^2 = x^2$ ;  $y(-x) = y(x)$ . Это значит, что функция  $y = x^2$  — четная

На графике получим точки с координатами  $(x_0; y_0)$  и  $(-x_0; y_0)$  — это значит, что график четной функции симметричен относительно оси  $Oy$  (рис. 41).

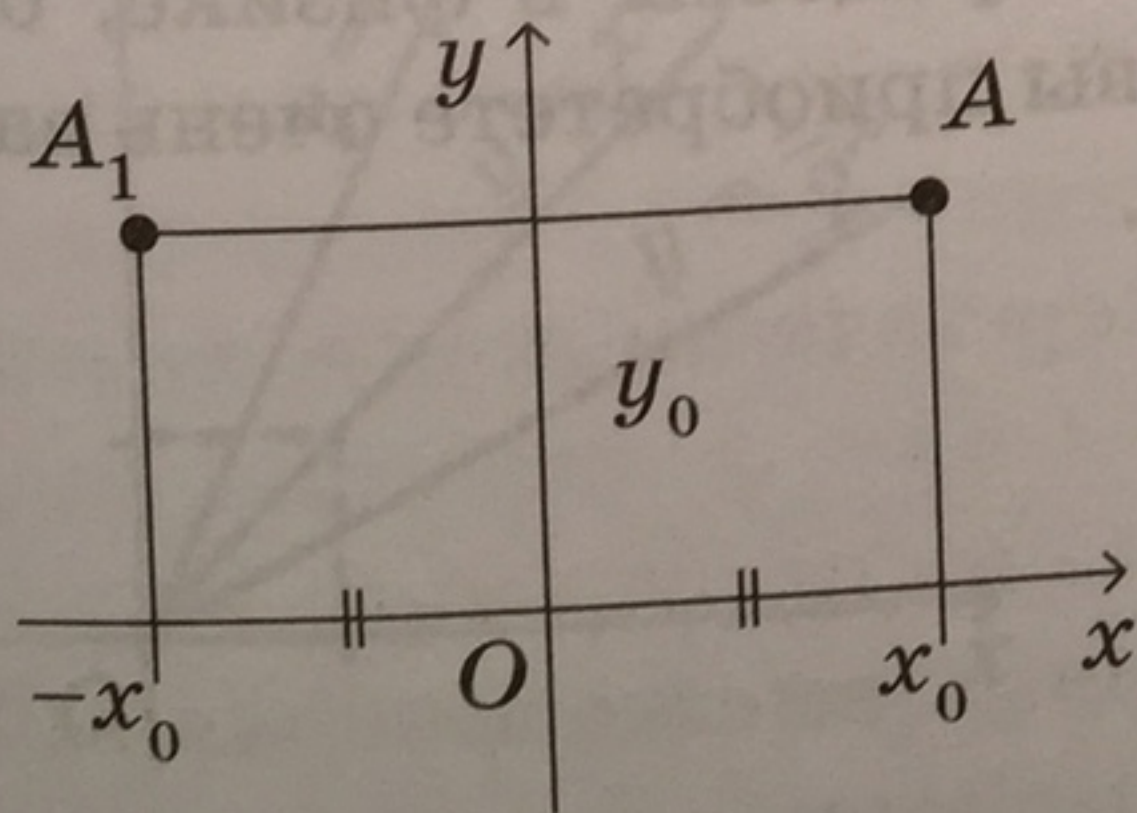


Рис. 41

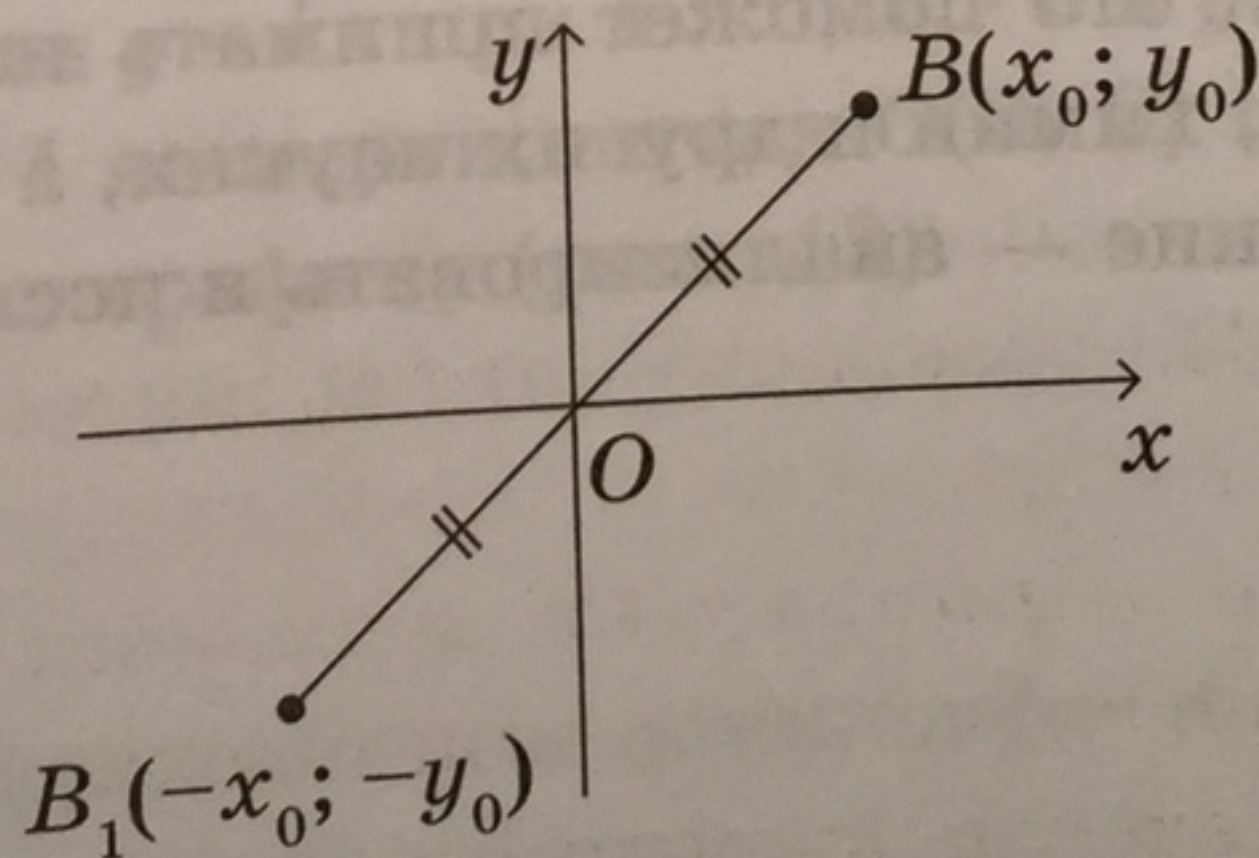


Рис. 42



Это свойство поможет при построении графиков. Построив график при положительных значениях  $x$ , построить вторую часть графика симметрично относительно оси  $Oy$ .

2). Если при изменении знака  $x$  на противоположный  $y$  тоже меняет только свой знак, то такая функция называется *нечетной* ( $x$  — любое число из ОДЗ).

$$\boxed{y(-x) = -y(x)} \text{ — условие нечетности функции}$$

Например:  $y = x^3$ ;  $y(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -y(x)$

На графике получим точки с противоположными координатами:  $B(x_0; y_0)$  и  $B(-x_0; -y_0)$ . Значит, график симметричен относительно точки  $O(0; 0)$  (рис. 42).

3). Если не выполняются оба условия:  $y(-x) \neq \pm y(x)$ , то функция  $y = f(x)$  не обладает свойством четности (нечетности). График такой функции не обладает симметрией ни относительно оси  $Oy$ , ни относительно точки  $O(0; 0)$ .

**7. Наибольшее, наименьшее значение функции.** *Наибольшее* значение функции — это самое большое значение функции  $y$ , его можно определить по 2-му свойству функции или по графику.

*Наименьшее* значение функции — это самое малое значение функции  $y$ , его можно определить по 2-му свойству функции или по графику.

Мы перечислили основные свойства функций, изучаемых в 7–9-м классах, причем при изучении функций в 7-м классе некоторые свойства функций можно опустить, а в 8-м и 9-м классах рассмотреть их более полно. Но постепенно надо привыкать к исследованию функций, это поможет понимать изучаемые процессы в физике, биологии, химии и других науках, а значит, вы приобретете очень важное умение — анализировать и исследовать.



## § 4.

Функция  $y = kx$  и ее график

**Определение.** Функция  $y = kx$ , где  $k > 0$  любое постоянное число,  $x > 0$  и  $y > 0$  переменные, называется прямой пропорциональной зависимостью, а число  $k$  — коэффициентом пропорциональности.

## Алгоритм

126

Построение графика функции  $y = kx$ 

Графиком функции  $y = kx$  является луч. Для построения луча достаточно двух точек.

1. Если  $x = 0$ , то  $y = k \cdot 0 = 0$ , значит, точка  $O(0; 0)$  принадлежит графику функции  $y = kx$ . Все графики функции  $y = kx$  проходят через точку  $O(0; 0)$ .
2. Пусть  $x = x_0$ , тогда  $y_0 = kx_0$ , точка  $A(x_0; kx_0)$  лежит на графике ( $x_0$  — любое положительное число).
3. Проведите луч через точки  $O(0; 0)$  и  $A(x_0; kx_0)$ , получите график функции  $y = kx$  при  $k > 0$ .

**Полезный совет.** Удобно первый и второй пункты алгоритма записать в виде таблицы, где первая точка —  $O(0; 0)$ , вторая точка —  $A(x_0; kx_0)$ .

$x$	0	$x_0$
$y$	0	$kx_0$

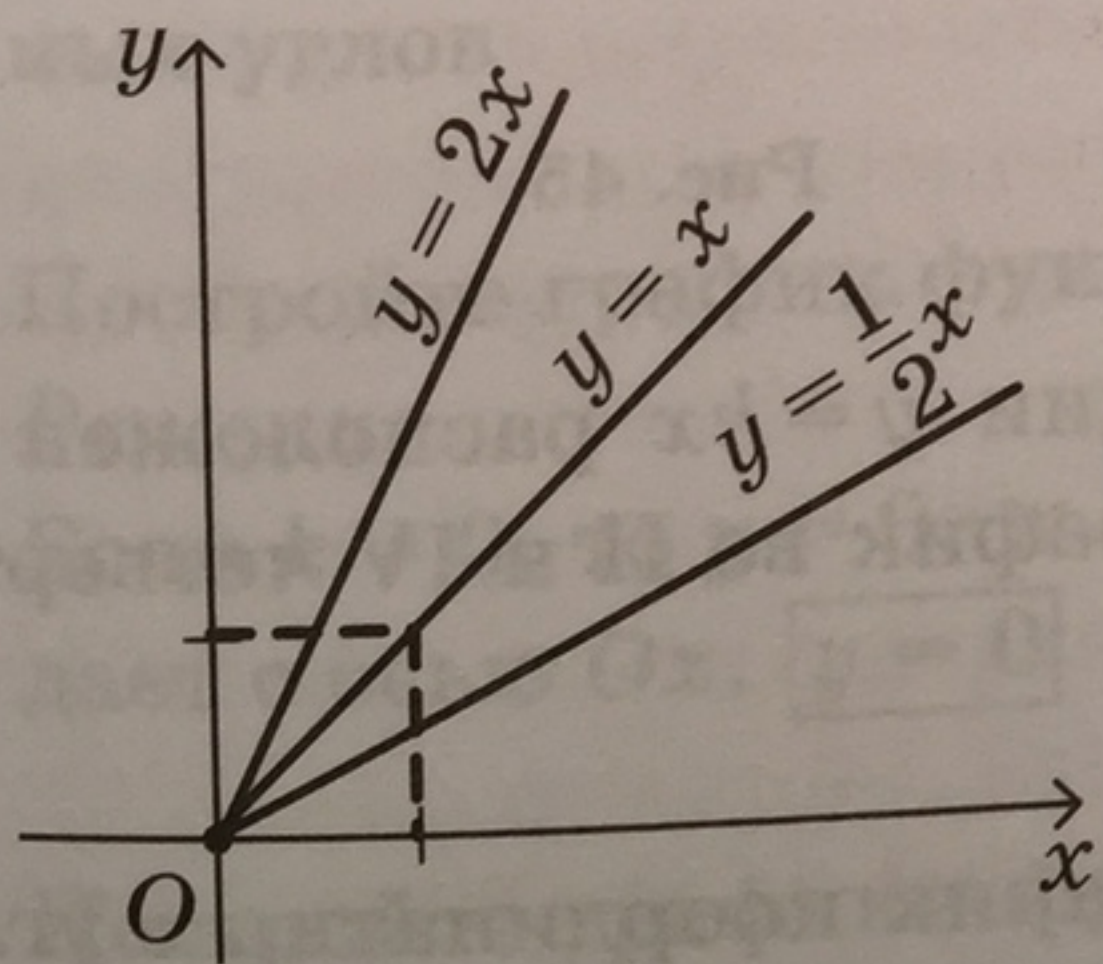


Рис. 43

Графики прямой пропорциональной зависимости  $y = kx$  при  $k > 0$ ,  $x > 0$  и  $y > 0$  лежат в I четверти, точка  $O(0; 0)$  принадлежит графику (рис. 43).



В физике и других науках применяется именно такая зависимость, когда с увеличением одной переменной увеличивается и другая переменная в  $k$  раз (это прямая пропорциональная зависимость), поэтому  $k$  называется коэффициентом пропорциональности.

В математике рассматривают функцию  $y = kx$  при любых значениях  $k$  и  $x$ .

### Примеры

Постройте графики функций.

1.  $y = 3x$  (рис. 44)

$x$	0	1	$A(1; 3)$
$y$	0	3	

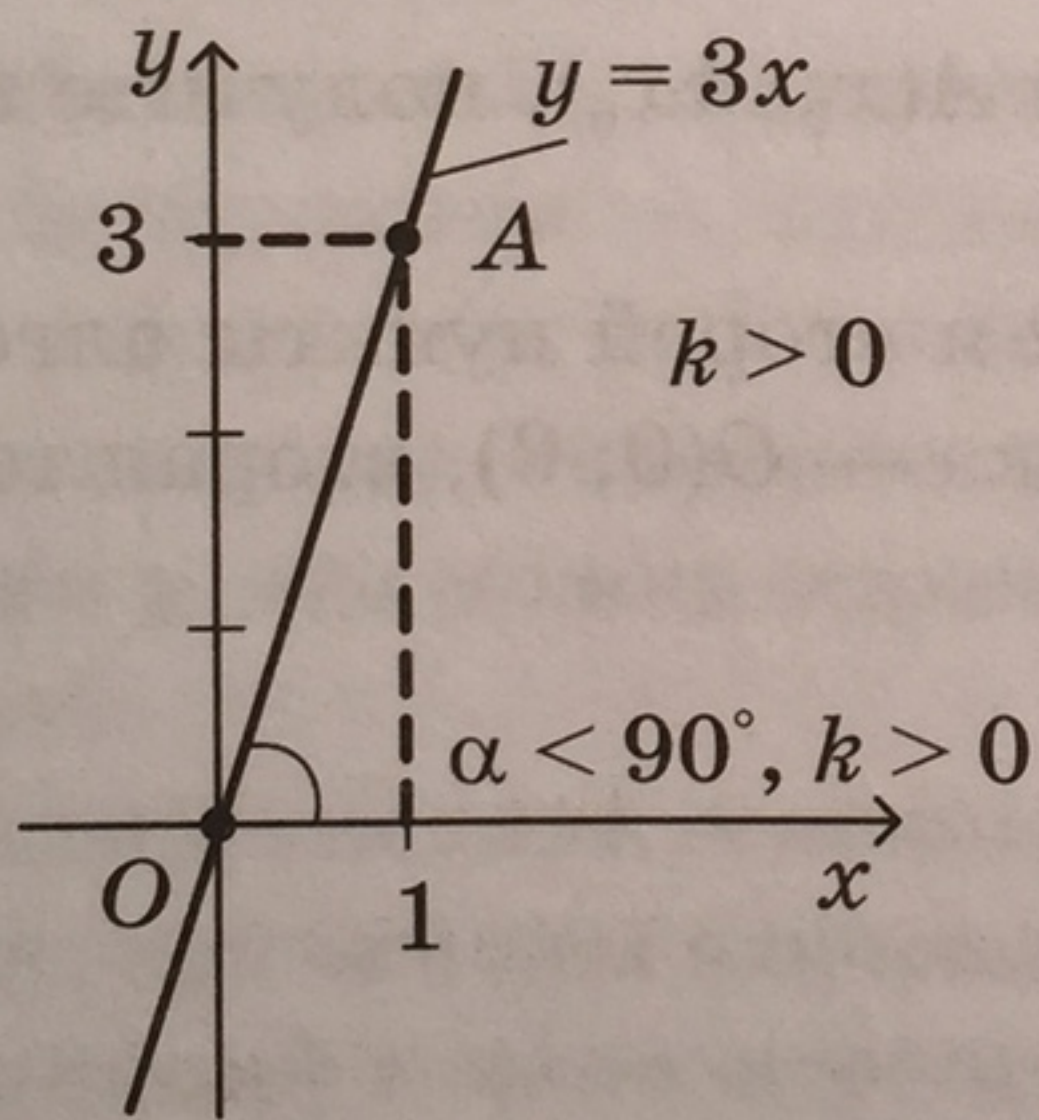


Рис. 44

2.  $y = -4x$  (рис. 45)

$x$	0	-1	$B(-1; 4)$
$y$	0	4	

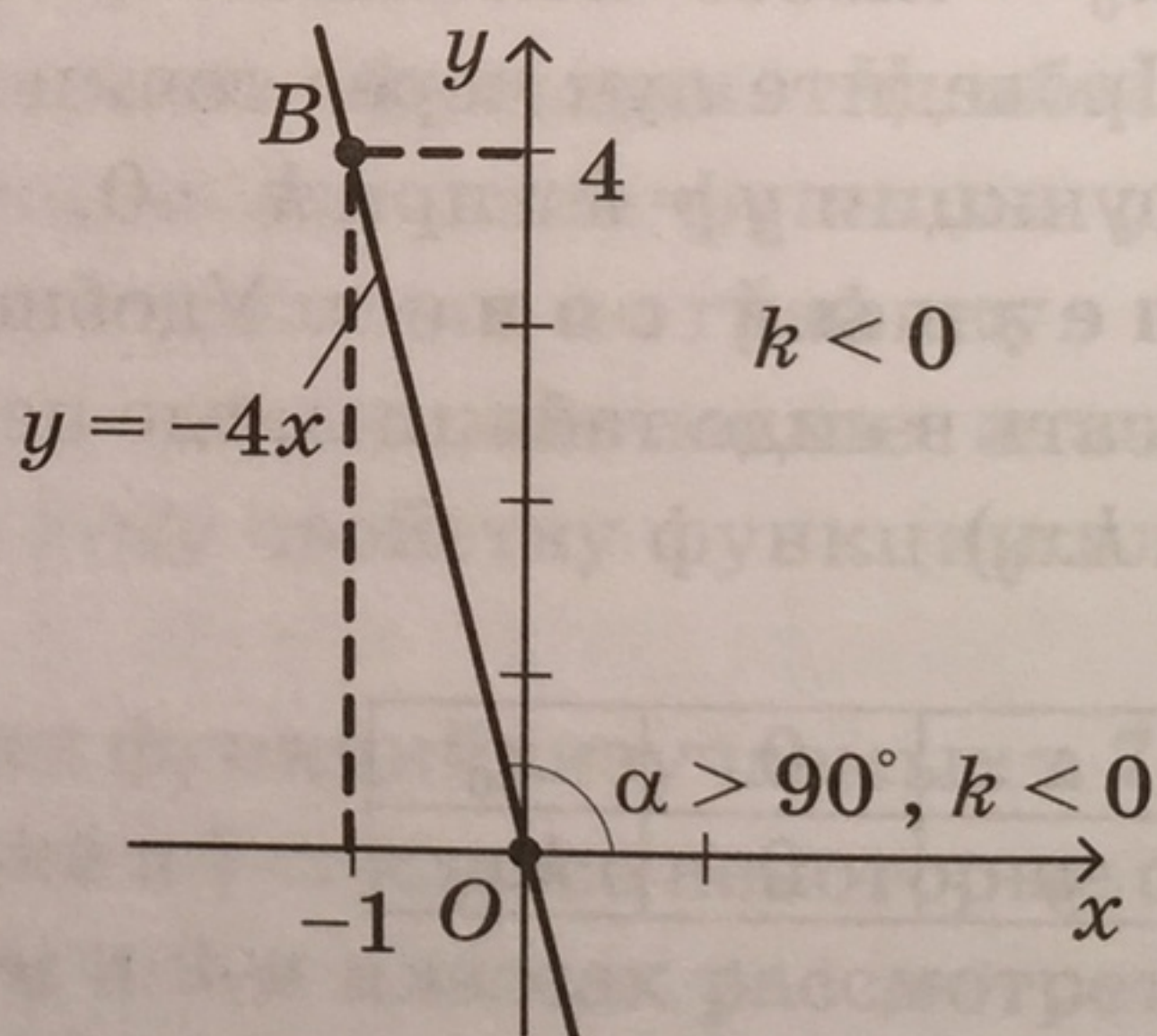


Рис. 45

**Внимание!** Если  $k > 0$ , то график функции  $y = kx$  расположен в I и III четвертях (рис. 44). Если  $k < 0$ , то график во II и IV четвертях (рис. 45).

3. Не строя графика, укажите, внутри каких координатных углов расположены графики функций: 1.  $y = \frac{1}{3}x$ ; 2.  $y = -0,7x$ ; 3.  $y = 10x$ .



Решение.

Определите знак  $k$ :

1).  $k = \frac{1}{3}$     3).  $k = 10, k > 0$ , значит, графики 1 и 3 функций рас-

положены в I и III координатных углах.

2).  $k = -0,7, k < 0$ , значит, график расположен во II и IV координатных углах.

4. Постройте графики функции  $y = kx$  при 1)  $k = 1$ ; 2)  $k = -1$ .

Построение.

1).  $y = x$  (рис. 46)

$x$	0	3	$A(3; 3)$
$y$	0	3	

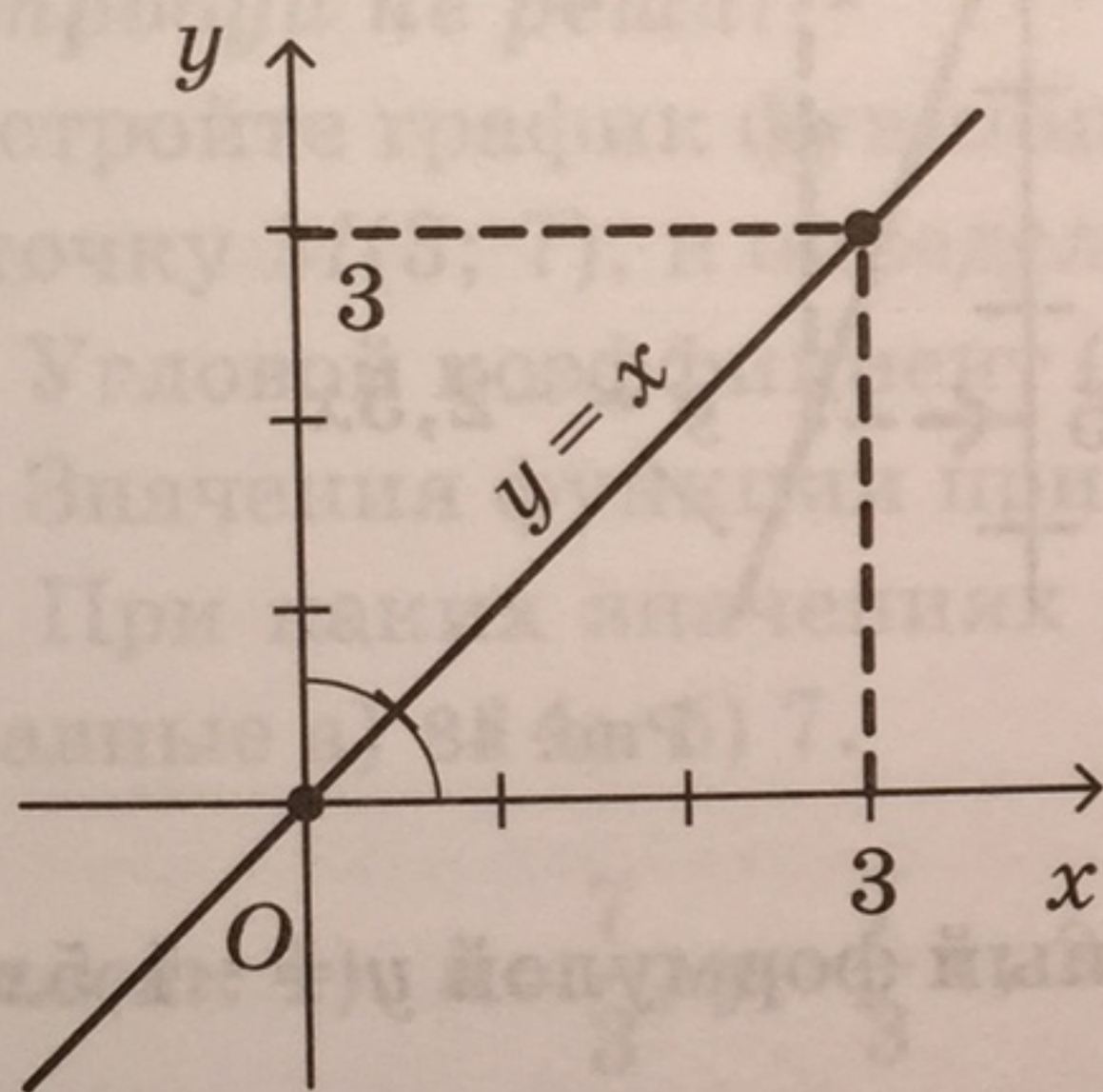


Рис. 46

График функции  $y = x$  — биссектриса I и III координатных углов

2).  $y = -x$  (рис. 47)

$x$	0	3	$A(3; -3)$
$y$	0	-3	

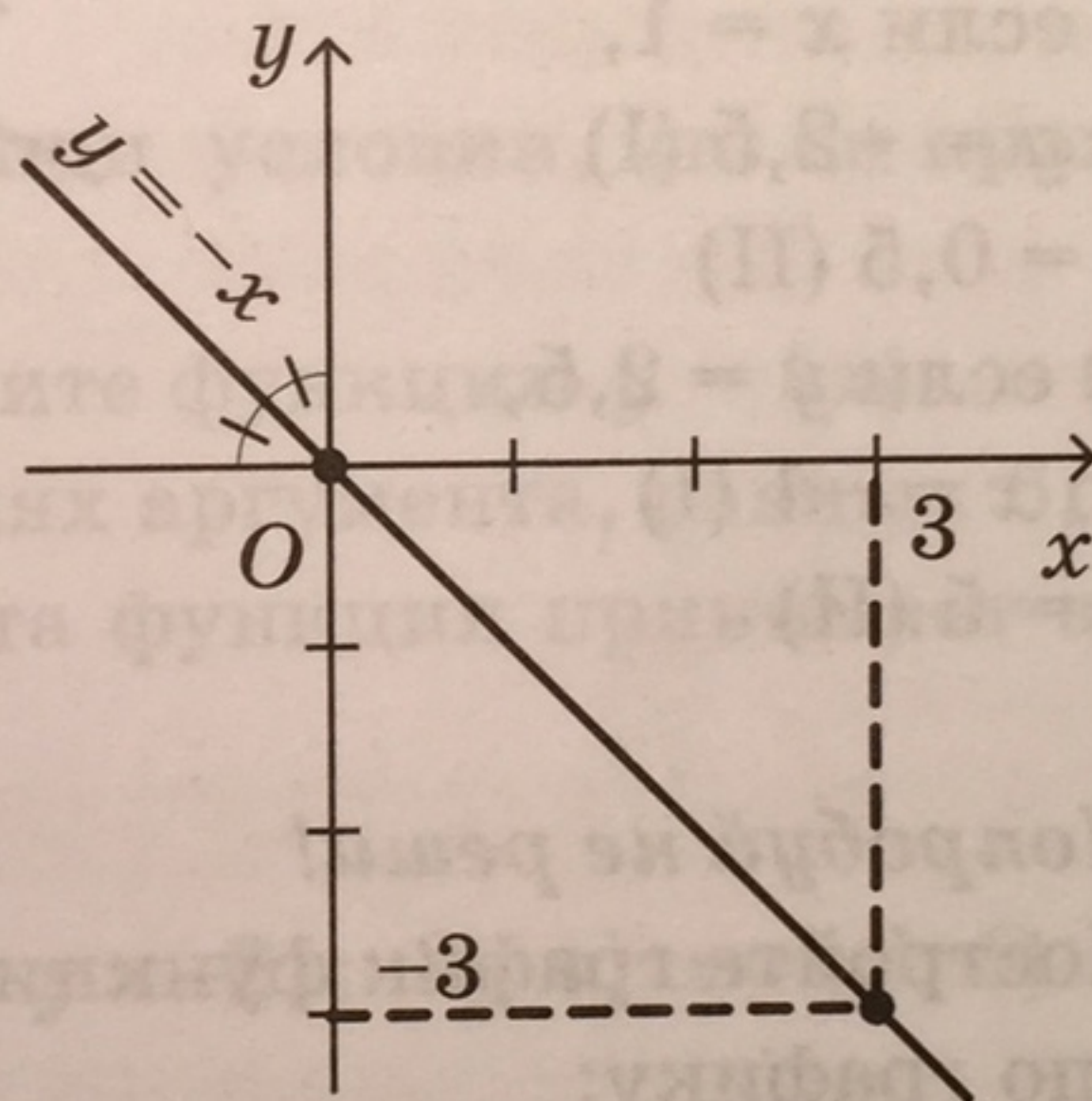


Рис. 47

График функции  $y = -x$  — биссектриса II и IV координатных углов

5. Постройте график функции  $y = kx$ , если  $k = 0$ .

Решение.

Если  $k = 0$ , то  $y = 0 \cdot x$ ,  $y = 0$ ,  $x$  — любое число. Эта прямая совпадает с осью  $Ox$ .  $y = 0$  — уравнение оси  $Ox$ .

6. Постройте графики функций: 1.  $y = -2,5x$ ; 2.  $y = 0,5x$  и найдите по графику: а) значение  $y$ , если  $x = 1$ ; б) значение  $x$ , если  $y = 2,5$  (алгоритм 124).



**Построение.**

Для построения берите «удобное» значение  $x$ , чтобы  $y$  стало целым числом.

1).  $y = -2,5x$  (рис. 48 (I))

$x$	0	-2	$A(-2; 5)$
$y$	0	$-2,5 \cdot (-2)$	

$y = 0,5x$  (рис. 48 (II))

$x$	0	2	$B(2; 1)$
$y$	0	1	

- 2). а) если  $x = 1$ ,  
то  $y = -2,5$  (I)  
 $y = 0,5$  (II)  
б) если  $y = 2,5$ ,  
то  $x = -1$  (I)  
 $x = 5$  (II)

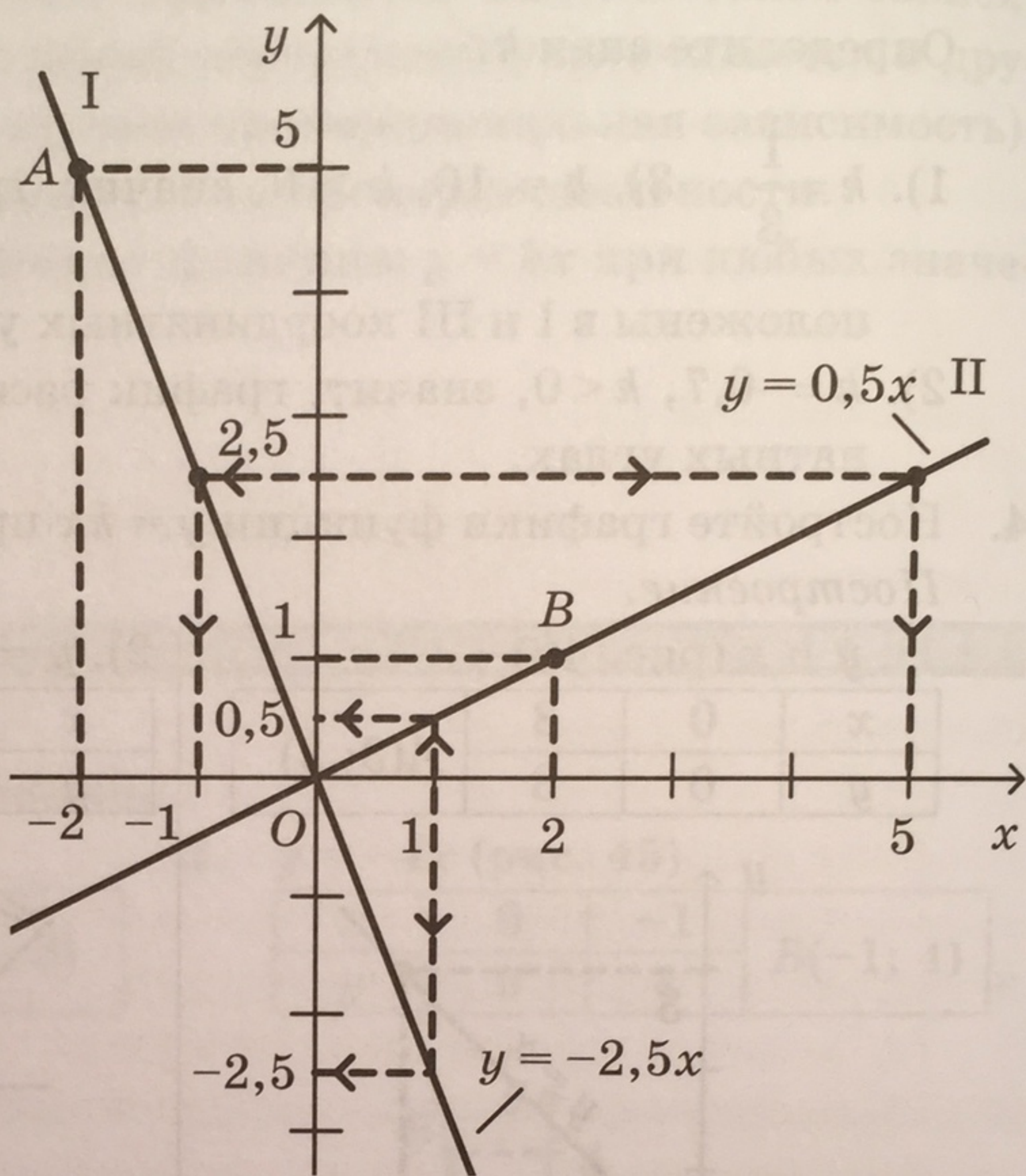


Рис. 48

**Попробуй не реши!**

Постройте график функции, заданный формулой  $y = -1,5x$ . Найдите по графику:

- 1). Значение  $y$ , соответствующее значению  $x$ , равному 2.
- 2). Значение  $x$ , если значение  $y$  равно 6.
- 3). Несколько целых значений  $x$ , при которых значения  $y$  положительные (отрицательные).

Ответ: 1).  $y(2) = -3$ ; 2).  $x = -4$ ;

3).  $y > 0$  при  $x = -2, -4, -6...$  и  $y < 0$  при  $x = 2, 4, 6...$

**Нахождение коэффициента пропорциональности  $k$** 

Если известны координаты точки, лежащей на графике функции

$$y = kx, \text{ то } k = \frac{y_0}{x_0}.$$



### Пример

График функции  $y = kx$  проходит через точку  $A$  с координатами  $(3; -12)$ . Найти значение коэффициента  $k$ .

*Решение.*

Подставьте координаты точки  $x_0 = 3$  и  $y_0 = -12$  в формулу  $y = kx$  и найдите значение коэффициента  $k$ .

$-12 = k \cdot 3$ ;  $k = -4$ . Получили функцию  $y = -4x$ , график которой проходит через точку  $A(3; -12)$ .

**Вывод:**  $k = \frac{y_0}{x_0}$

### Попробуй не реши!

Постройте график функции  $y = kx$  при условии, что он проходит через точку  $M(3; 7)$ , и определите:

- 1). Угловый коэффициент (и запишите функцию  $y = kx$ ).
- 2). Значения функции при значениях аргумента, равных 6; -9.
- 3). При каких значениях аргумента функция принимает значения, равные а) -14; б) 7.

*Ответ:* 1).  $k = \frac{7}{3}$ ;  $y = \frac{7}{3}x$ ; 2).  $y = 14$ ;  $y = -21$ ; 3). а)  $x = -6$ ; б)  $x = 3$ .

### Свойства функции $y = kx$

1. **Область определения функции.** Для функции  $y = kx$   $x$  — любое действительное число (вся ось  $Ox$ ).

2. **Множество значений функции.** Для  $y = kx$   $y$  — любое действительное число (вся ось  $Oy$ ).

3. **Нули функции.**  $kx = 0$ ,  $k \neq 0$ , то  $x = 0$ , график проходит через точку  $(0; 0)$ .

4. **Знаки функции.** Это те значения  $x$ , при которых  $y > 0$  или  $y < 0$ .

1).  $k > 0$ :  $kx > 0$  при  $x > 0$ ;  $kx < 0$  при  $x < 0$

2).  $k < 0$ :  $kx < 0$  при  $x < 0$ ;  $kx > 0$  при  $x > 0$

На графике это выглядит так (рис. 49, 50):



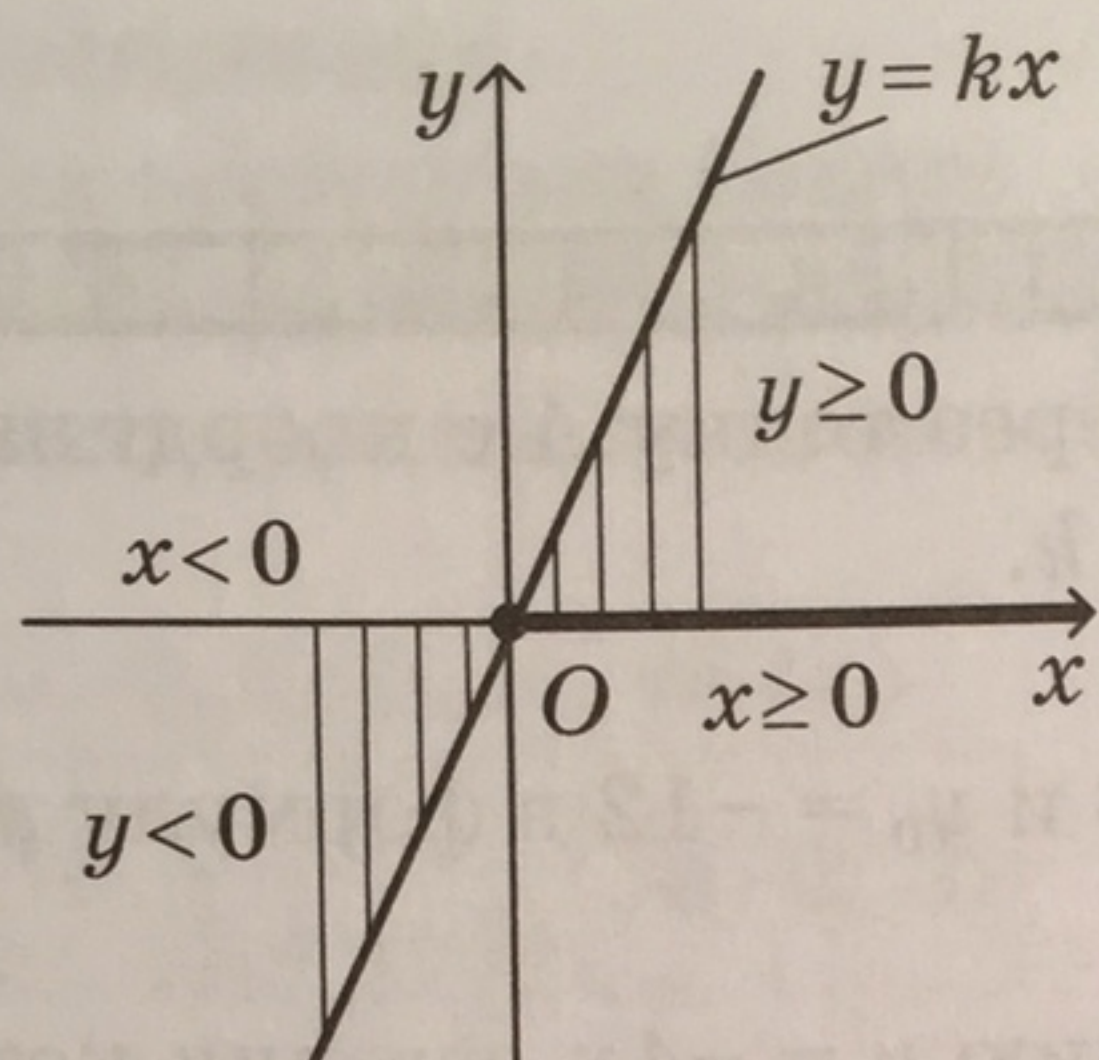


Рис. 49

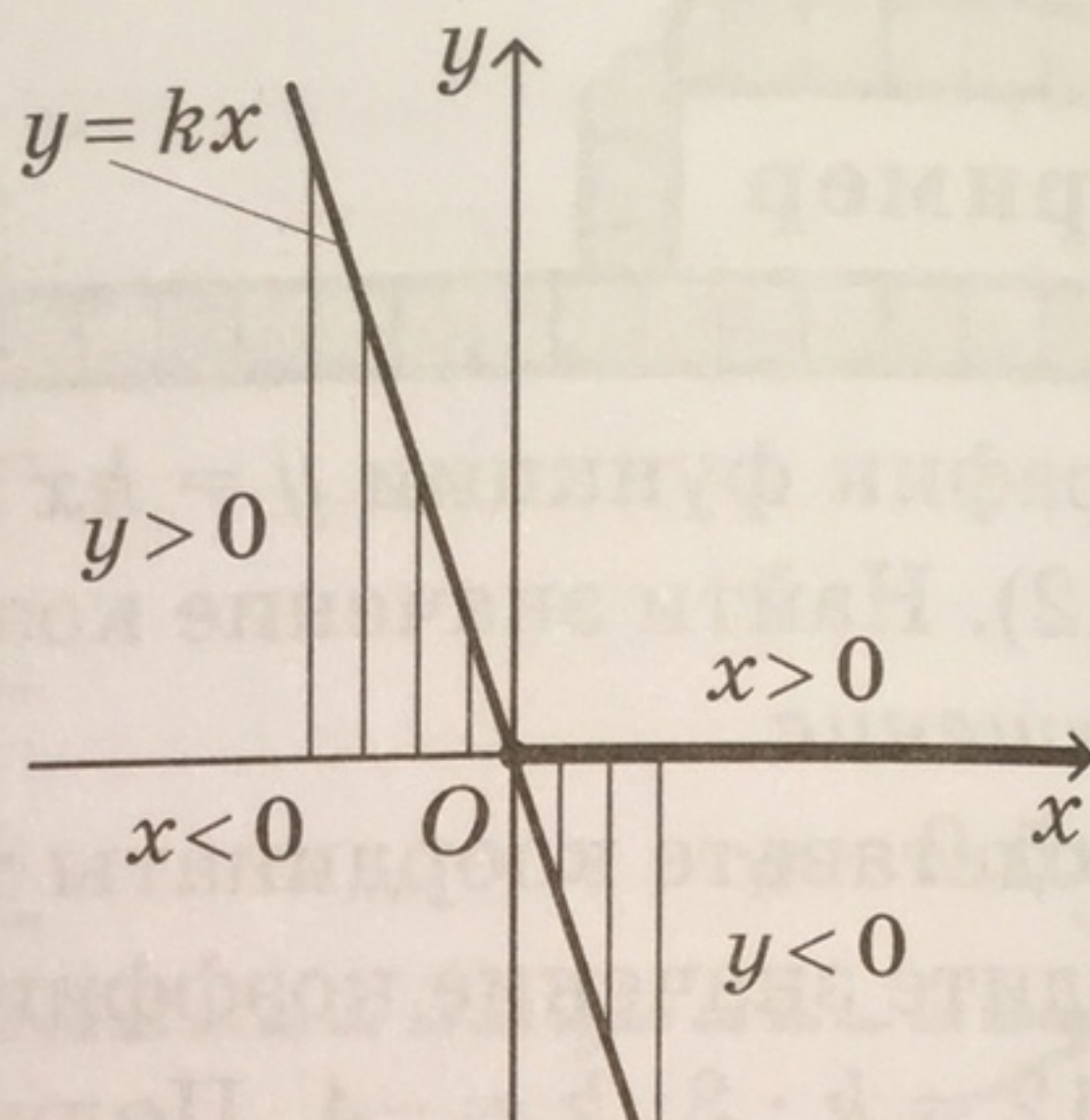


Рис. 50

Значения  $y$  положительные ( $y > 0$ ) при тех значениях  $x$ , при которых точки графика расположены над осью  $Ox$ . Значения отрицательные ( $y < 0$ ) при тех значениях  $x$ , при которых точки графика расположены под осью  $Ox$ .

**5. Возрастание и убывание функции.** Если значения  $x_2 > x_1$  и  $y_2 > y_1$  то функция возрастает при  $k > 0$ ; при  $k < 0$  функция убывает: если  $x_2 > x_1$ , то  $y_2 < y_1$

### Пример

Постройте графики функций и, взяв пять возрастающих значений  $x$ , определите изменение  $y$ .

$y = 2x$  (рис. 51)

$x$	-1	1	2	3	5	↗
$y$	-2	2	4	6	10	↗

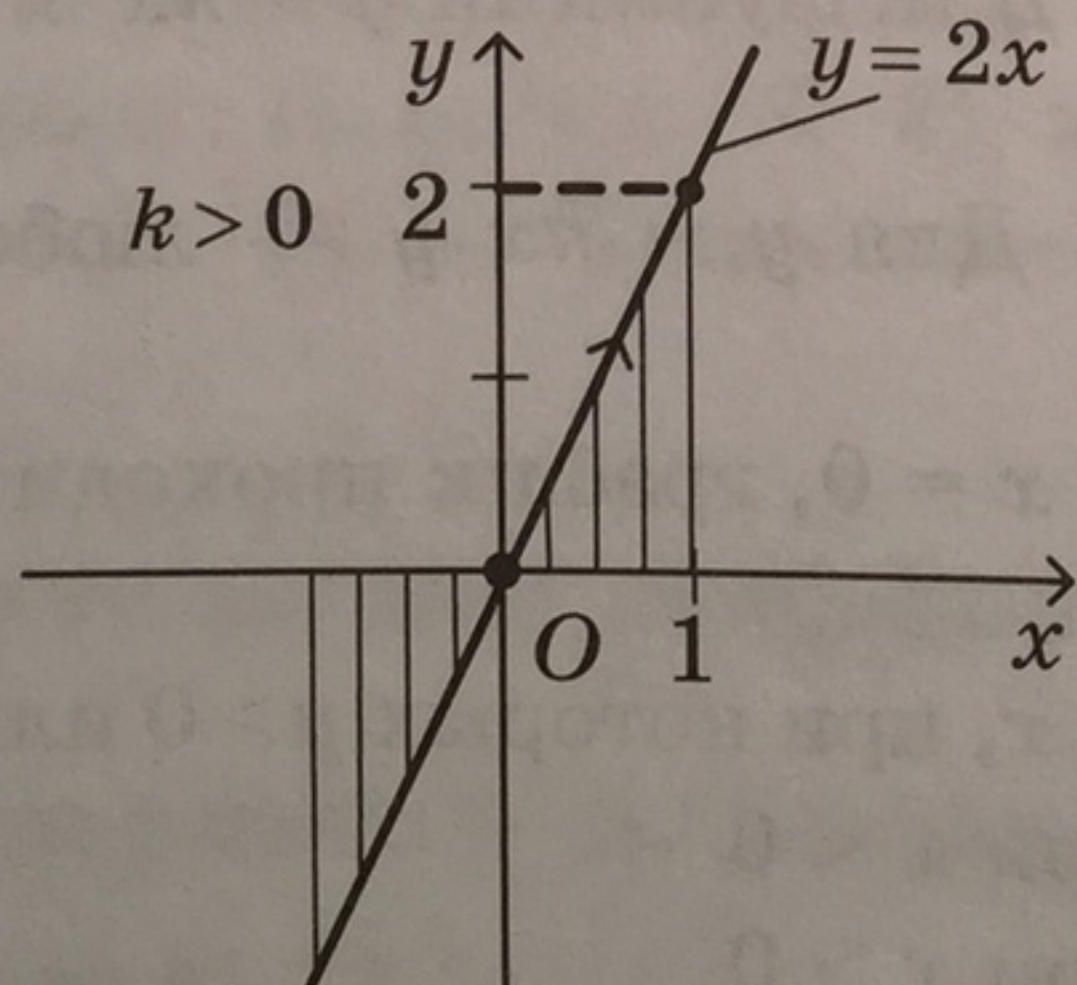


Рис. 51

$y = -3x$  (рис. 52)

$x$	-1	1	2	3	5	↘
$y$	3	-3	-6	-9	-15	↘

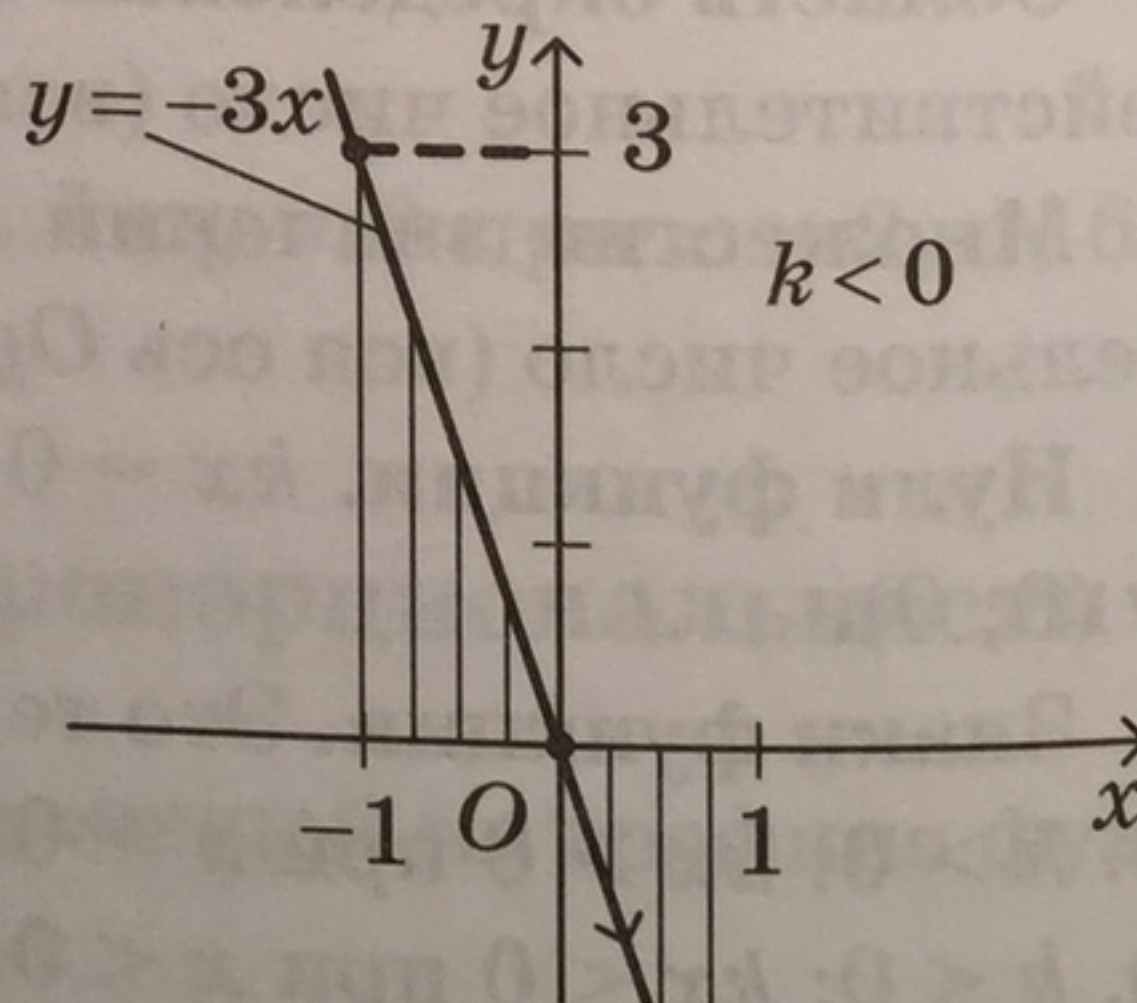


Рис. 52



Мы видим по таблице, что при возрастании значений  $x$  значения  $y$  также возрастают. График функции направлен вправо-вверх.

При возрастании значений  $x$  значения  $y$  убывают. График функции направлен вправо-вниз.

Если  $k > 0$ , то функция  $y = kx$  возрастает, т. е.  $x_2 > x_1$  и  $y_2 > y_1$

Если  $k < 0$ , то функция  $y = kx$  убывает, т. е. если  $x_2 > x_1$ , то  $y_2 < y_1$

## Проверь себя!

Какие из функций возрастают?

1).  $y = -10x$

2).  $y = \frac{1}{5}x$

3).  $y = -6x$

4).  $y = x$

5).  $y = -100$

Ответ:  $y = \frac{1}{5}x$ ;  $y = x$ .



## § 5. Линейная функция и ее график

**Определение.** Функция вида  $y = kx + b$ , где  $k$  и  $b$  — заданные числа,  $x$  и  $y$  — переменные,  $k$  — угловой коэффициент, называется линейной функцией.

Графиком линейной функции  $y = kx + b$  является прямая, параллельная прямой, заданной формулой  $y = kx$ .

### Алгоритм 127 Построение графика функции $y = kx + b$

#### I способ

1. Найдите координаты точек пересечения с осями:

$x$	0	$-\frac{b}{k}$
$y$	$b$	0

Если  $x = 0$ , то  $y = b$ ; если  $y = 0$ , то  $kx + b = 0$  и  $x = -\frac{b}{k}$ .

2. Постройте точки  $(0; b)$  и  $\left(-\frac{b}{k}; 0\right)$  и проведите прямую.

Этот способ построения прямой удобен, когда точки на осях расположены не близко друг от друга.

Например, построить график функции  $y = 2x - 5$  (рис. 53)

*Построение.*

- 1). Найдите координаты точек на осях:

$x$	0	2,5	$2x - 5 = 0$
$y$	-5	0	$x = 2,5$

- 2). Постройте точки:  $(0; -5)$  и  $(2,5; 0)$  и проведите прямую  $y = 2x - 5$

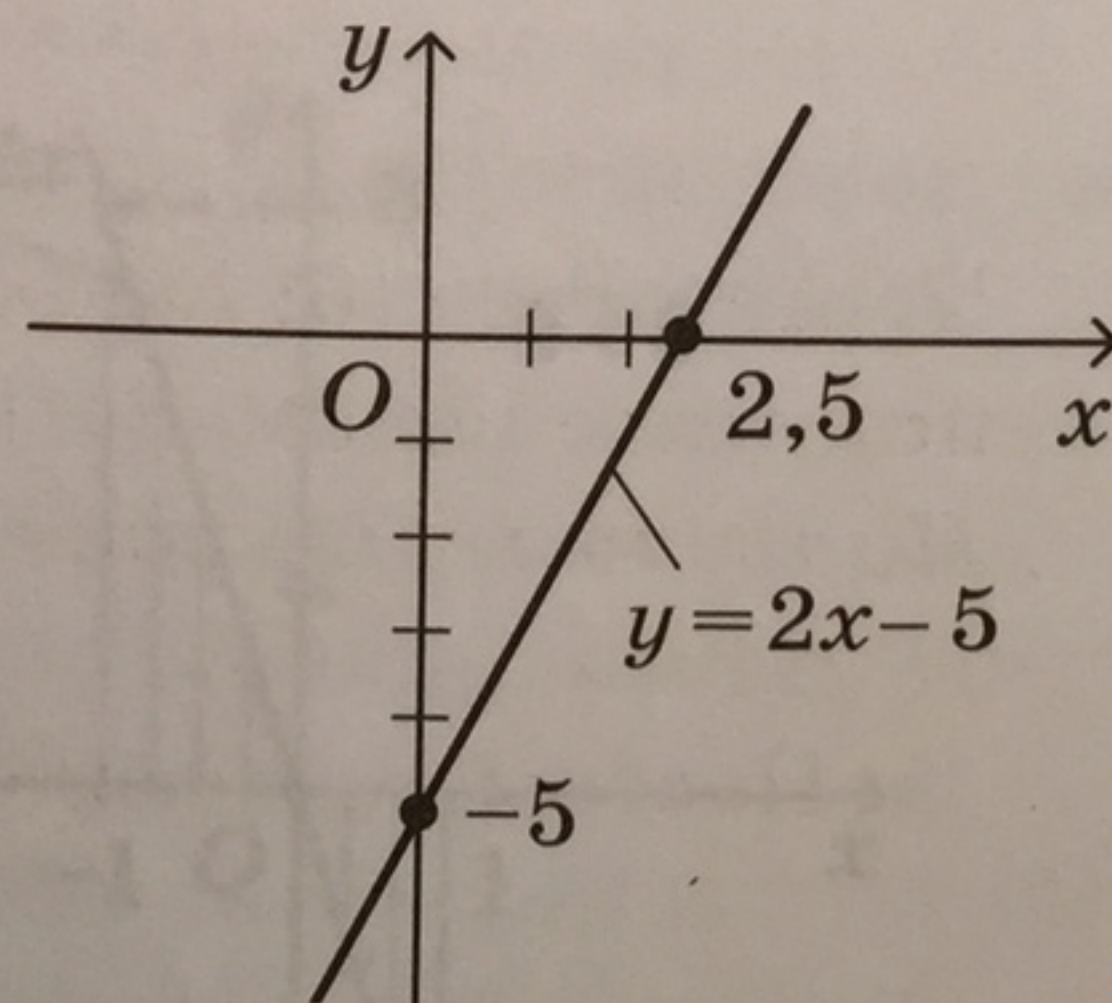


Рис. 53



## II способ

1. Найдите координаты двух точек:  $(0; b)$  и  $(x_0; kx_0 + b)$ , где  $x_0$  — удобное значение  $x$ .

$x$	0	$x_0$
$y$	$b$	$y_0 = kx_0 + b$

2. Постройте точки  $(0; b)$  и  $(x_0; y_0)$  и проведите прямую. Этот способ удобно применять, когда при I способе «неудобные» числа.

Например, построить график функции  $y = 2x - 1$  (рис. 54)

Построение.

- 1). Найдите координаты двух точек:

$x$	0	2
$y$	-1	3

 $y(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ 

- 2). Постройте точки:  $(0; -1)$  и  $(2; 3)$  и проведите прямую.

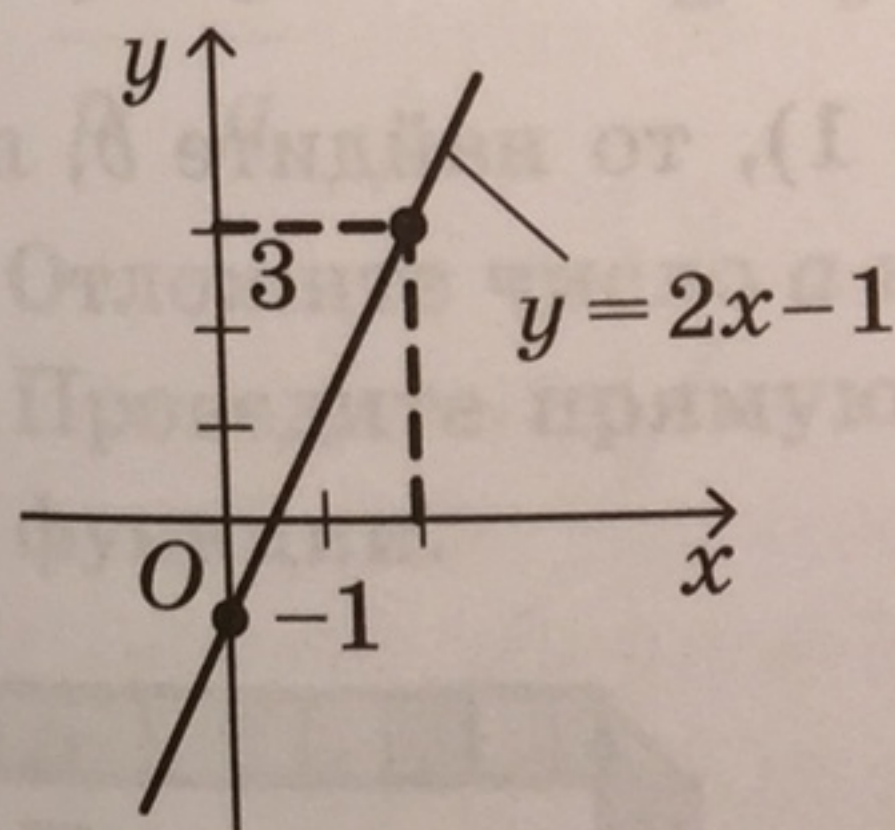


Рис. 54

Применяя I способ, получим точки  $(0; -1)$  и  $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ , которые близко расположены, и проведение прямой может быть неточным.

## III способ

1. Постройте прямую  $y = kx$  (через начало координат).  
 2. Через точку  $(0; b)$  проведите прямую, параллельную прямой п. 1, получите искомый график.

Например, построить график функции  $y = -2x + 1$  (рис. 55)

Построение.

- 1). Постройте график функции  $y = -2x$ :

$x$	0	-2
$y$	0	4



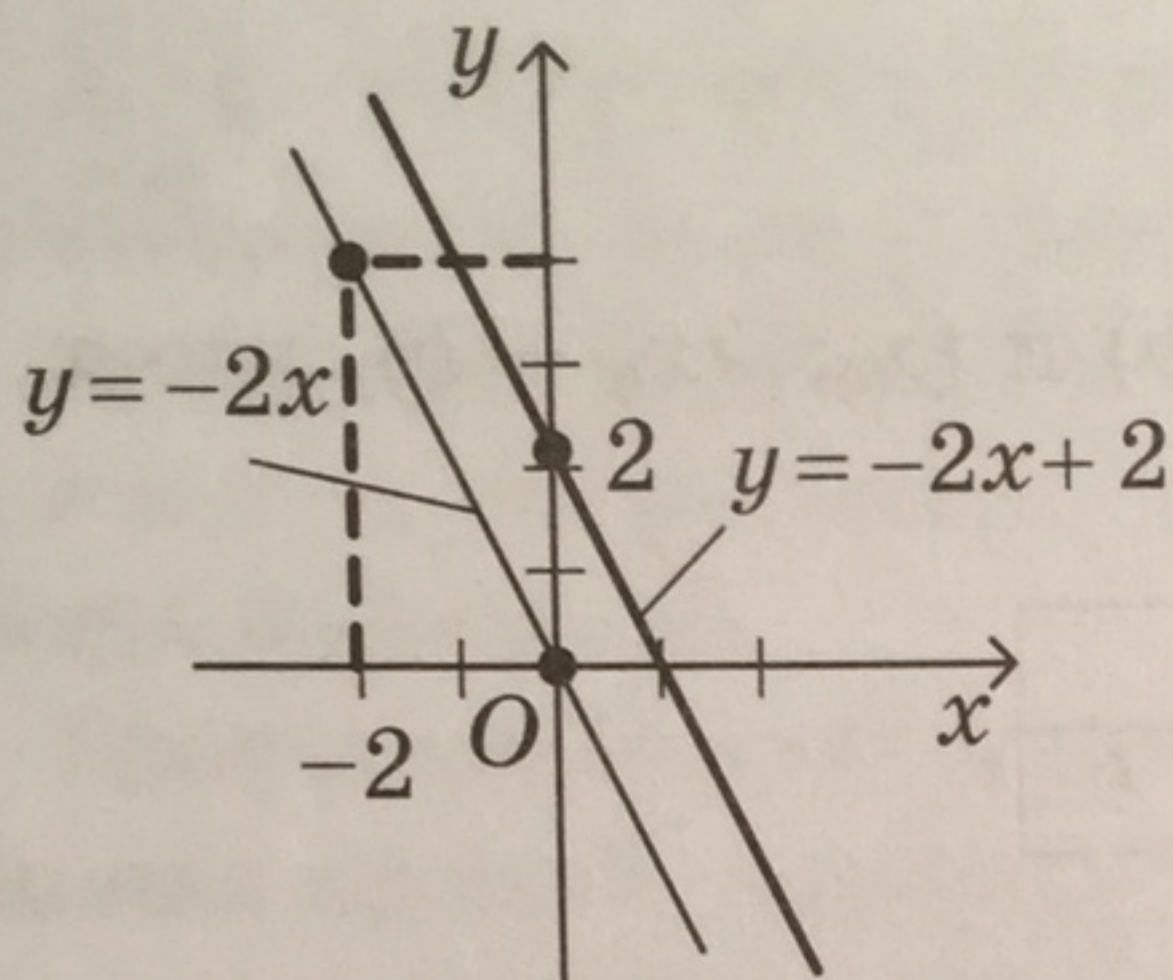


Рис. 55

- 2). Через точку  $(0; 2)$  проведите прямую, параллельную первой прямой, получите искомый график функции
- $$y = -2x + 2$$

**Внимание!** Если графики функций  $y = k_1x + b_1$  и  $y = k_2x + b_2$  параллельные прямые  $l_1 \parallel l_2$ , то  $k_1 = k_2$  и, наоборот, если  $k_1 = k_2$ , то  $l_1$  и  $l_2$  параллельны.

$k_1 = k_2$ $l_1 \parallel l_2$
---------------------------------

Например, построить график функции  $y = kx + b$ , если известно, что он проходит через точку  $M(2; 1)$  и параллелен графику функции  $y = 3x - 1$

*Решение.*

- 1). Если прямые параллельны, то  $k_1 = k_2$ , значит,  $k = 3$  (из функции  $y = 3x - 1$ ).

- 2). Если график проходит через точку  $(2; 1)$ , то найдите  $b$ , подставив  $x_0$  и  $y_0$  в функцию:

$$\begin{array}{l|l} y = kx + b & y_0 = 1; x_0 = 2 \\ 1 = 3 \cdot 2 + b; b = -5 & k = 3; l_1 \parallel l_2, \text{ то } k_1 = k_2 \end{array}$$

Получим вторую функцию:  $y = 3x - 5$

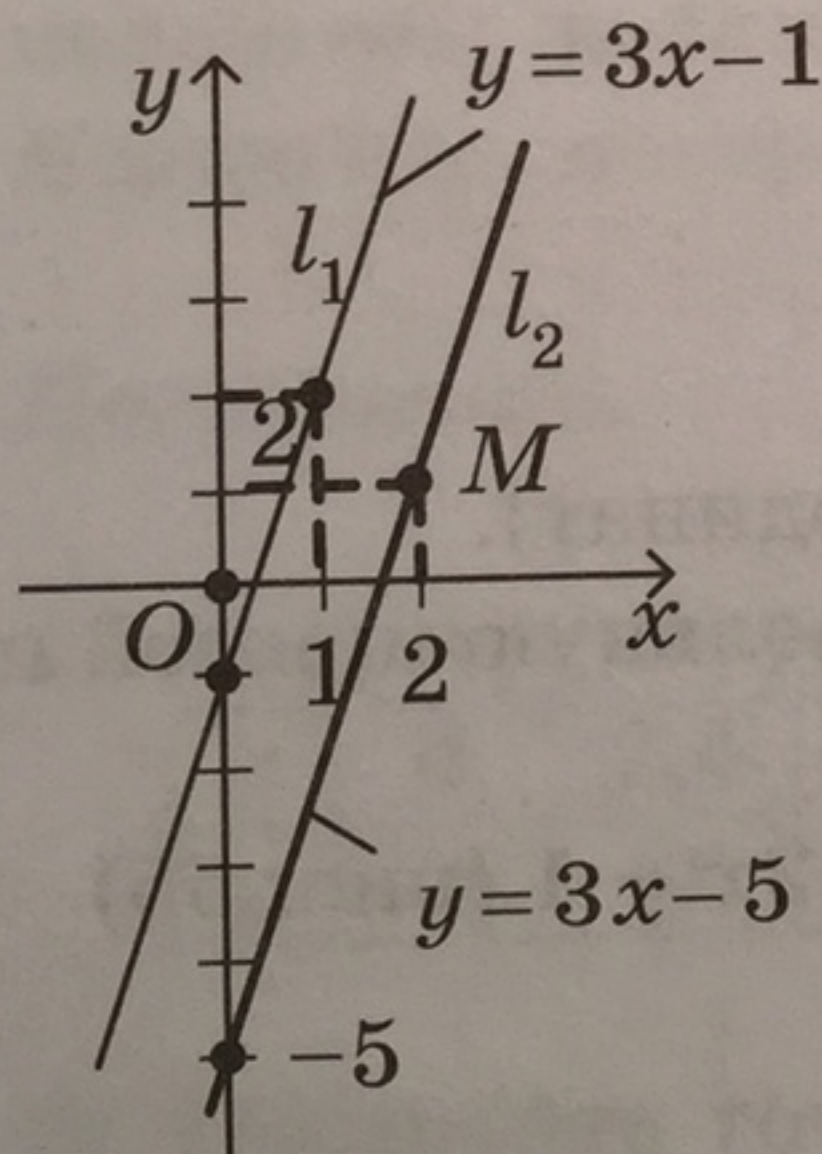


Рис. 56

- 3). Постройте график функции  $y = 3x - 5$ :

$x$	0	2
$y$	-5	1

- 4). График функции  $y = 3x - 5$  параллелен графику функции  $y = 3x - 1$ , так как их угловые коэффициенты равны:  $k_1 = k_2 = 3$ . Это можно проверить, построив график функции  $y = 3x - 1$  (рис. 56):

$x$	0	1
$y$	-1	2



## IV способ

Построение графика функции, которая задана неявно, т.е. не разрешена относительно  $y$  и имеет вид:  $px + qy = c$ , где  $p, q, c$  — заданные числа. Этот способ дан для интересующихся математикой, он не входит в программу 7-го класса.

## Алгоритм

128

Построение графика функции  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$   
( $a, b \neq 0$ )

1. Приведите функцию к виду  $px + qy = c$ .
2. Разделите обе части уравнения на  $c$ :  $px + qy = c \mid : c$ , получите функцию  $\frac{p}{c}x + \frac{q}{c}y = 1$ .

3. Запишите числа  $\frac{p}{c}$  и  $\frac{q}{c}$  в знаменатель дроби:

$$\frac{\frac{x}{c}}{\frac{p}{c}} + \frac{\frac{y}{c}}{\frac{q}{c}} = 1 \quad \left| \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \right| \quad 1: \frac{p}{c} = \frac{c}{p}; \quad 1: \frac{q}{c} = \frac{c}{q} \text{ . Примем: } a = \frac{c}{p}; b = \frac{c}{q}$$

4. Отложите число  $a$  на оси  $Ox$ , число  $b$  на оси  $Oy$ .
5. Проведите прямую через точки  $(a; 0)$  и  $(0; b)$ , получите график функции.

## Примеры

Постройте график функции.

1.  $2x + 3y = 6$

Решение.

1).  $2x + 3y = 6 \mid : 6$

2).  $\frac{2x}{6} + \frac{3y}{6} = 1$

3).  $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

$p = 2; q = 3; c = 6$

$a = \frac{c}{p} = \frac{6}{2} = 3$

$b = \frac{c}{q} = \frac{6}{3} = 2$

2.  $2x - y = 3$

Решение.

1).  $2x - y = 3 \mid : 3$

$p = 2; q = -1; c = 3$

2).  $\frac{2}{3}x - \frac{y}{3} = 1$

$a = \frac{c}{p} = \frac{3}{2}$

3).  $\frac{x}{\frac{3}{2}} - \frac{y}{3} = 1$

$b = \frac{c}{q} = \frac{3}{-1}$



Число  $a = 3$  — отложите на оси  $Ox$

Число  $b = 2$  — отложите на оси  $Oy$  (рис. 57)

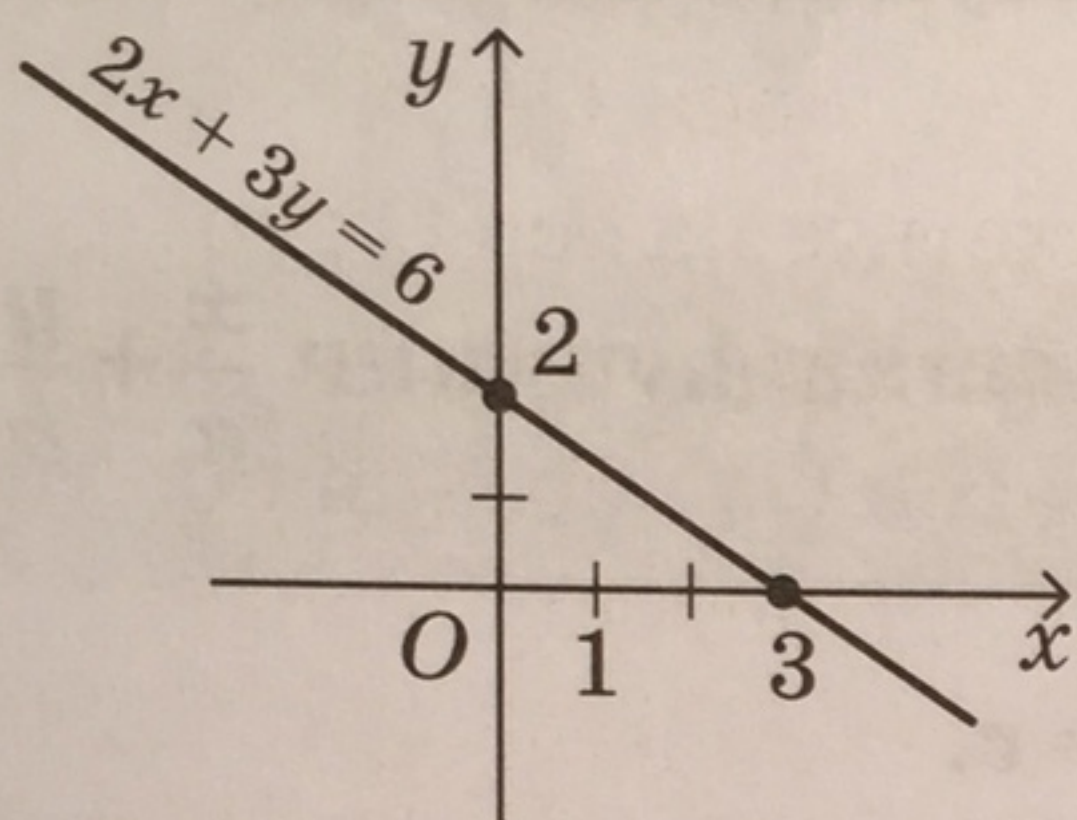


Рис. 57

Число  $a = \frac{3}{2}$  — отложите на оси  $Ox$

Число  $b = -3$  — отложите на оси  $Oy$  (рис. 58)

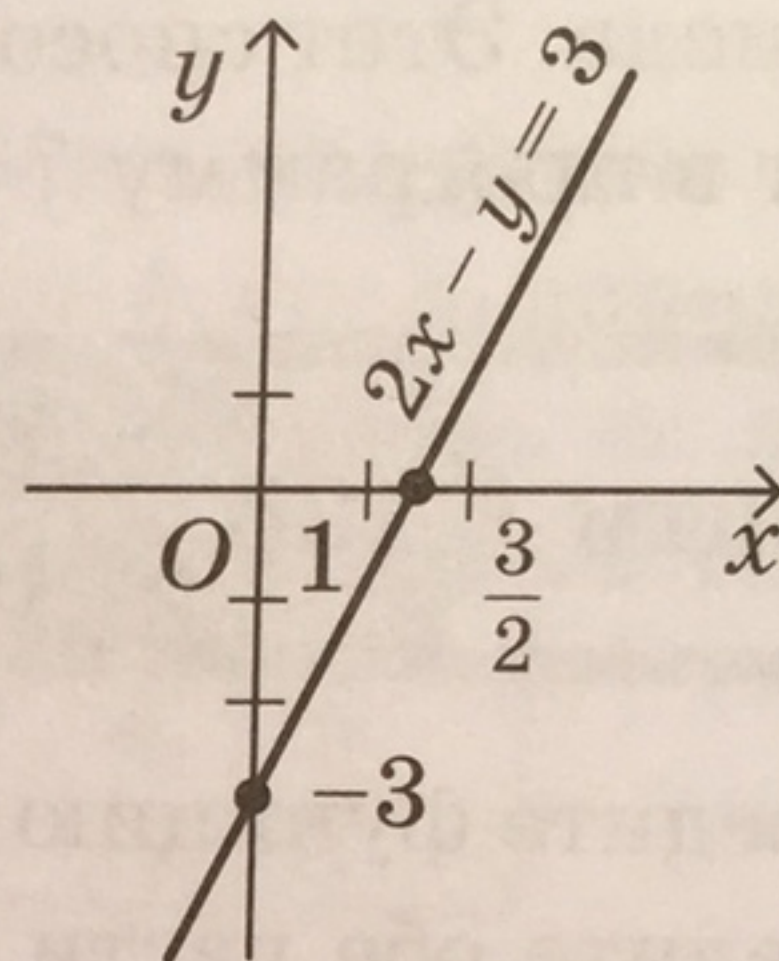


Рис. 58

Этот способ удобно применять, когда число  $c$  делится нацело на  $p$  и  $q$ ; он называется *построение прямой в «отрезках»*.

3. Постройте график функции  $4x + 3y = 12$ .

Решение.

$$1). 4x + 3y = 12 \quad | :12$$

$$2). \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$$

$$a = 3; b = 4$$

$$px + qy = c; p = 4;$$

$$q = 3; c = 12$$

$$a = \frac{c}{p} = \frac{12}{4} = 3$$

$$b = \frac{c}{q} = \frac{12}{3} = 4$$

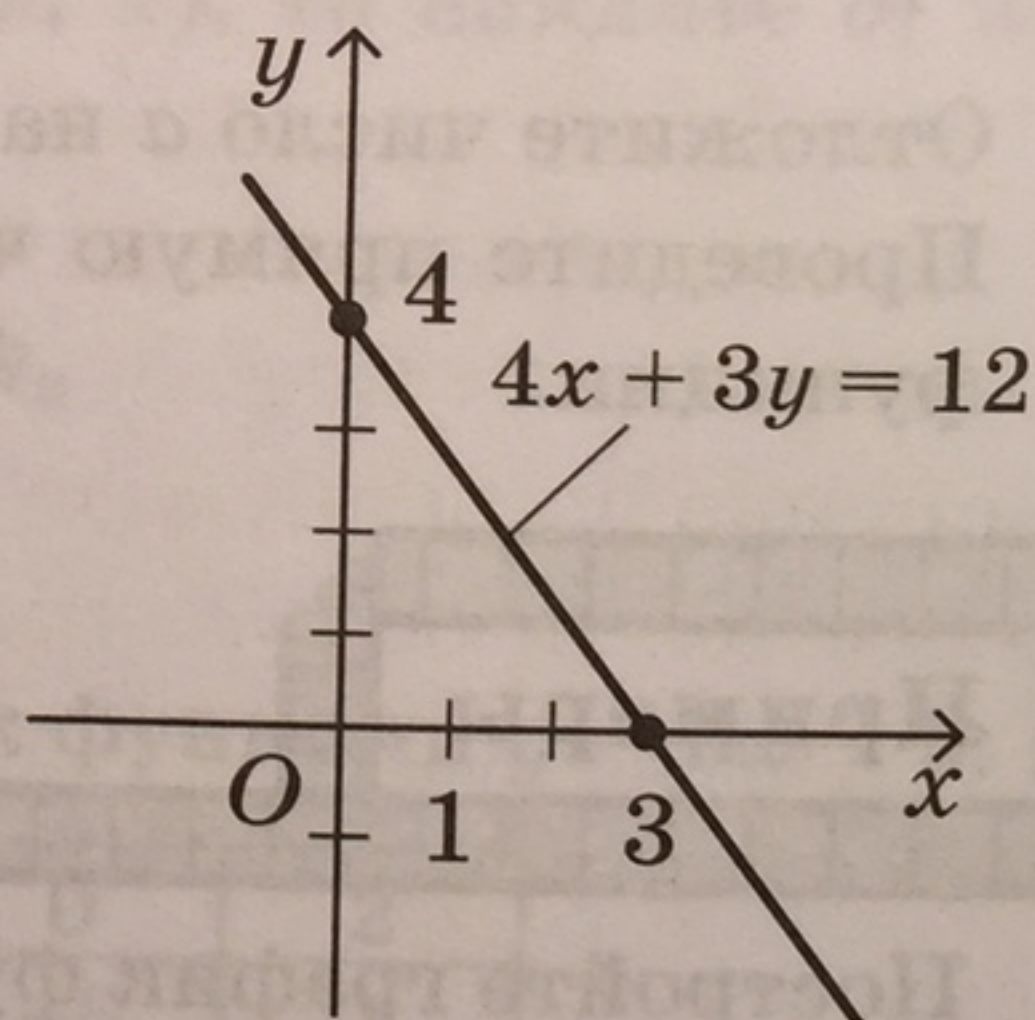


Рис. 59

Построение.

1). Постройте точки  $A(3; 0)$  и  $B(0; 4)$ .

2). Проведите прямую  $AB$  (рис. 59).

### З а м е ч а н и я

1. Можно в функции  $px + qy = c$  найти  $y = \frac{c - px}{q}$ ;  $y = -\frac{p}{q}x + \frac{c}{q}$ ;  $-\frac{p}{q} = k$ ;  $\frac{c}{q} = b$  и получите  $y = kx + b$ .

2. Прямую можно строить одним из предложенных способов, который удобнее в заданном примере.



## Алгоритм

129

Построение графиков функций  $y = b$  и  $x = a$ 

Если в формуле  $y = kx + b$ ,  $k = 0$ , то:

I.  $y = b$  — прямая, параллельная оси  $Ox$

1. Отметьте на оси  $Oy$  точку  $(0; b)$ .
2. Проведите прямую параллельно оси  $Ox$  через точку  $(0; b)$ .

Пример. Построить график функции  $y = -3$  (рис. 60).

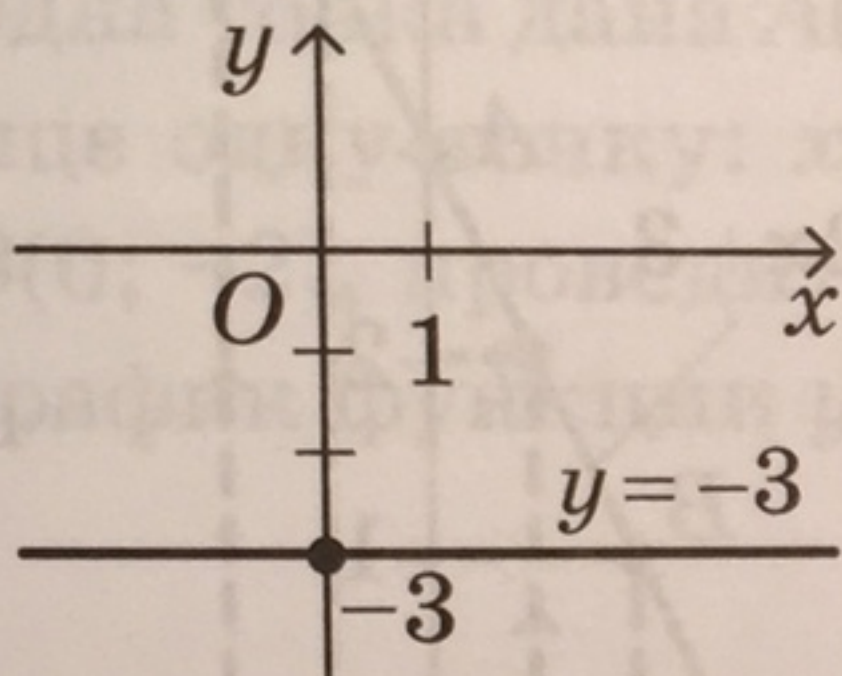


Рис. 60

II.  $x = a$  — прямая, параллельная оси  $Oy$

1. Отметьте на оси  $Ox$  точку  $(a; 0)$ .
2. Проведите прямую параллельно оси  $Oy$  через точку  $(a; 0)$ .

Пример. Построить график функции  $x = -2$  (рис. 61).

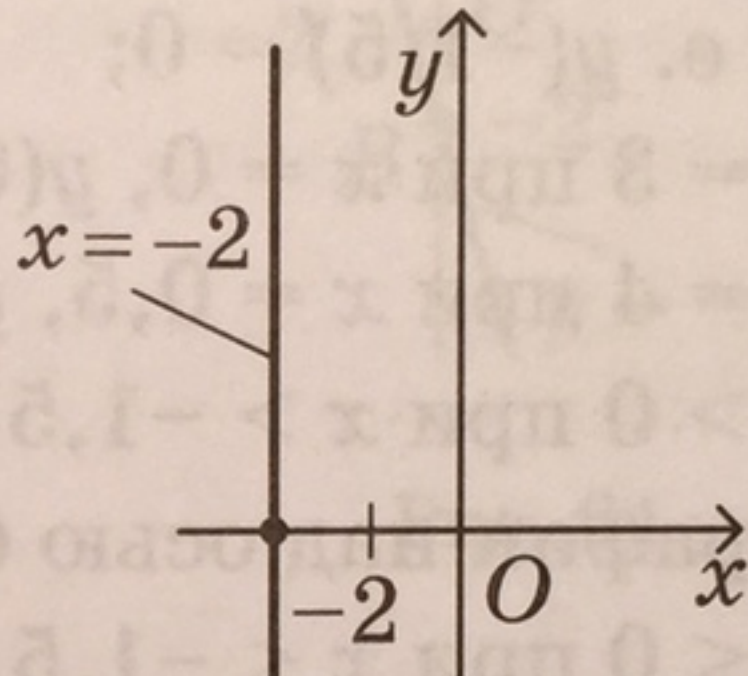


Рис. 61

## З а м е ч а н и е

Все точки, лежащие на прямой  $x = a$ , имеют общее свойство, их абсцисса равна  $a$ . Все точки, лежащие на прямой  $y = b$ , имеют одну и ту же ординату, равную  $b$ .

Все точки оси  $Ox$  имеют ординату  $y = 0$ , поэтому уравнение оси  $Ox$  будет:  $y = 0$ .

Все точки оси  $Oy$  имеют абсциссу  $x = 0$ , поэтому уравнение оси  $Oy$  будет:  $x = 0$ .

## Примеры

1. Постройте график функции, заданной формулой  $y = 2x + 3$  (рис. 62), и найдите по графику:

1) значение  $y$ , соответствующее значению  $x$ , равному:

$$-\frac{1}{2}, -2, 1;$$



2) при каком значении  $x$  значение  $y$  равно: 0, 3, 4;

3) при каких значениях  $x$  значение  $y > 0$  ( $y < 0$ ).

Решение.

Постройте график функции  $y = 2x + 3$ .

$x$	0	-1	$A(0; 3)$
$y$	3	1	$B(-1; 1)$

1).  $y\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$  (см. решение по графику, алгоритм 124)

$$y(-2) = -1; y(1) = 5$$

2).  $y = 0$ , при  $x = -1,5$ ,

$$\text{т. е. } y(-1,5) = 0;$$

$$y = 3 \text{ при } x = 0, y(0) = 3$$

$$y = 4 \text{ при } x = 0,5, y(0,5) = 4$$

3).  $y > 0$  при  $x > -1,5$

(график над осью  $Ox$ );

$$y < 0 \text{ при } x < -1,5$$

(график под осью  $Ox$ )

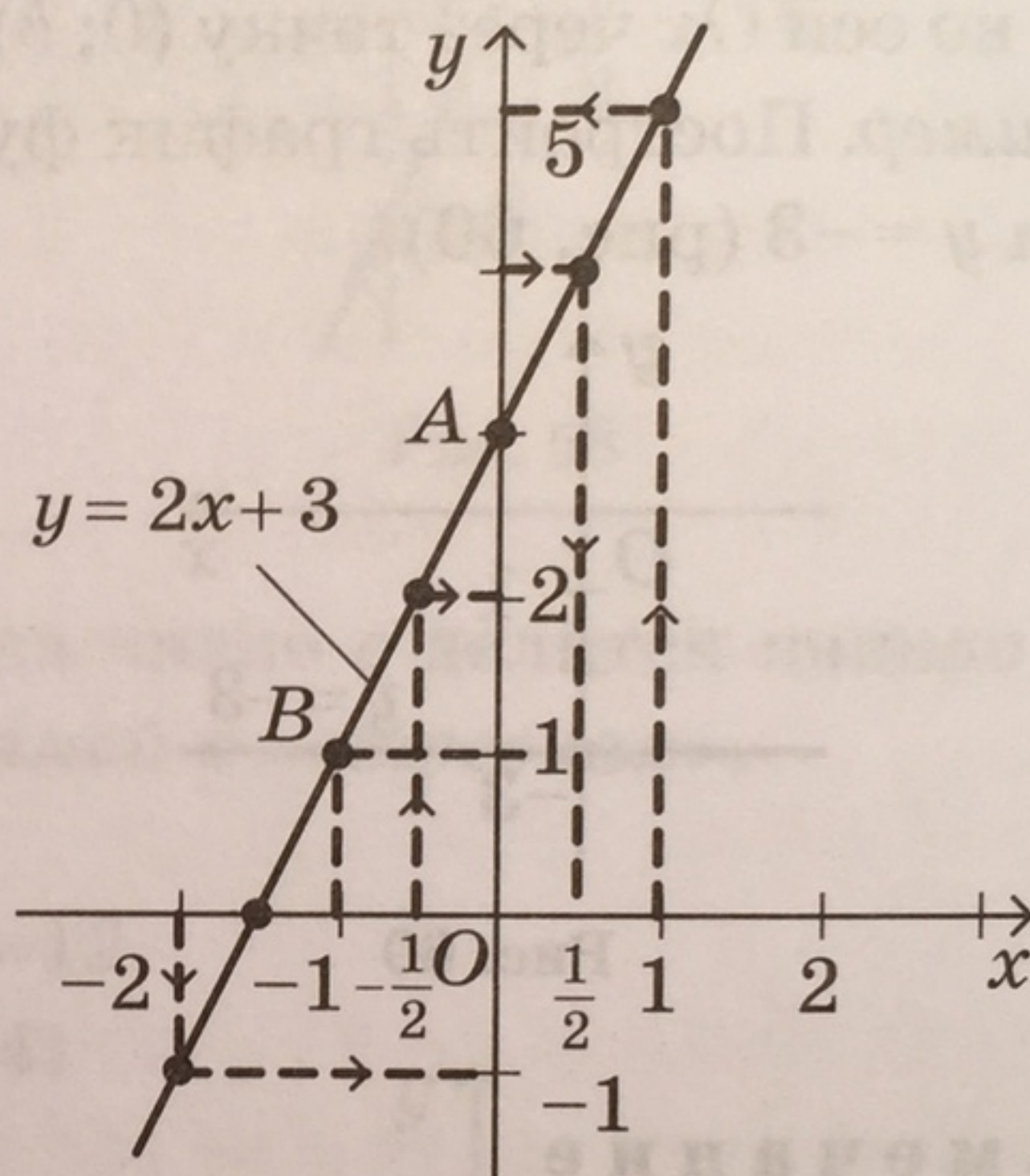


Рис. 62

2. Постройте график функции  $y = -3x + 6$  (рис. 62) и:

1) найдите точки пересечения его с осями координат;

2) постройте график функции  $y = -3x$ ;

3) определите возрастание (убывание) функции  $y = -3x + 6$ .

Решение.

1). Постройте график функции

$$y = -3x + 6 \text{ (I способ):}$$

$x$	0	2
$y$	6	0

2). Точки пересечения с осями:

$$A(0; 6); B(2; 0)$$

$$\text{С осью } Ox: y = 0; -3x + 6 = 0; x = 2$$

$$\text{С осью } Oy: x = 0; y = 6$$

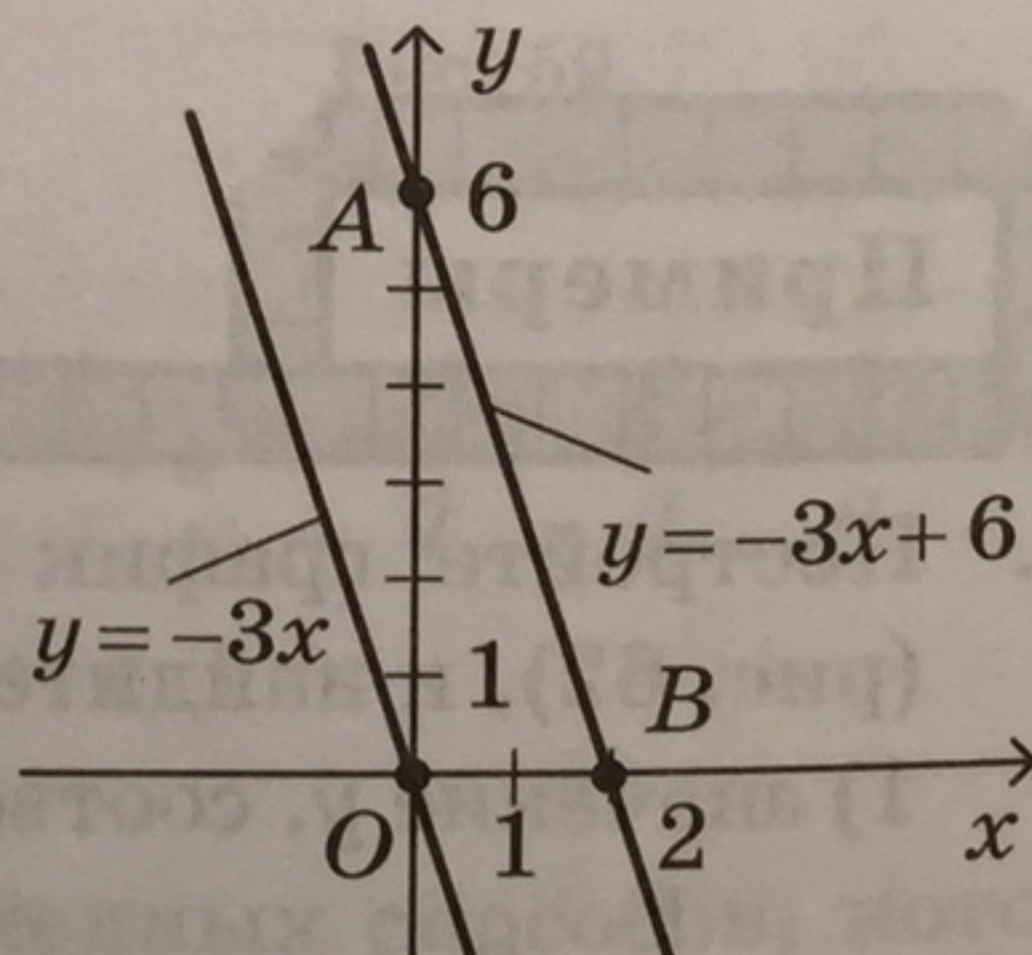


Рис. 63



3). График функции  $y = -3x$  проходит через начало  $O(0; 0)$ , параллельно графику  $y = -3x + 6$ , так как  $k_1 = k_2 = -3$

4). Функция  $y = -3x + 6$  убывает, так как  $k = -3$ ,  $k < 0$

3. Постройте график функции  $y = -3x + b$ , если известно, что график проходит через точку  $A(-2; 4)$  (рис. 64).

*Решение.*

1). Если график проходит через точку  $A(-2; 4)$ , то подставьте  $x = -2$  и  $y = 4$  в функцию и найдите  $b$ :  
 $4 = -3 \cdot (-2) + b$ ,  $4 = 6 + b$ ,  $b = -2$ ,  
 значит,  $y = -3x - 2$

2). Одна точка дана  $A(-2; 4)$ . Найдите еще одну точку:  $x = 0$ , то  $y = -2$ :  
 $B(0; -2)$ , проведите прямую  $AB$  — график функции  $y = -3x - 2$

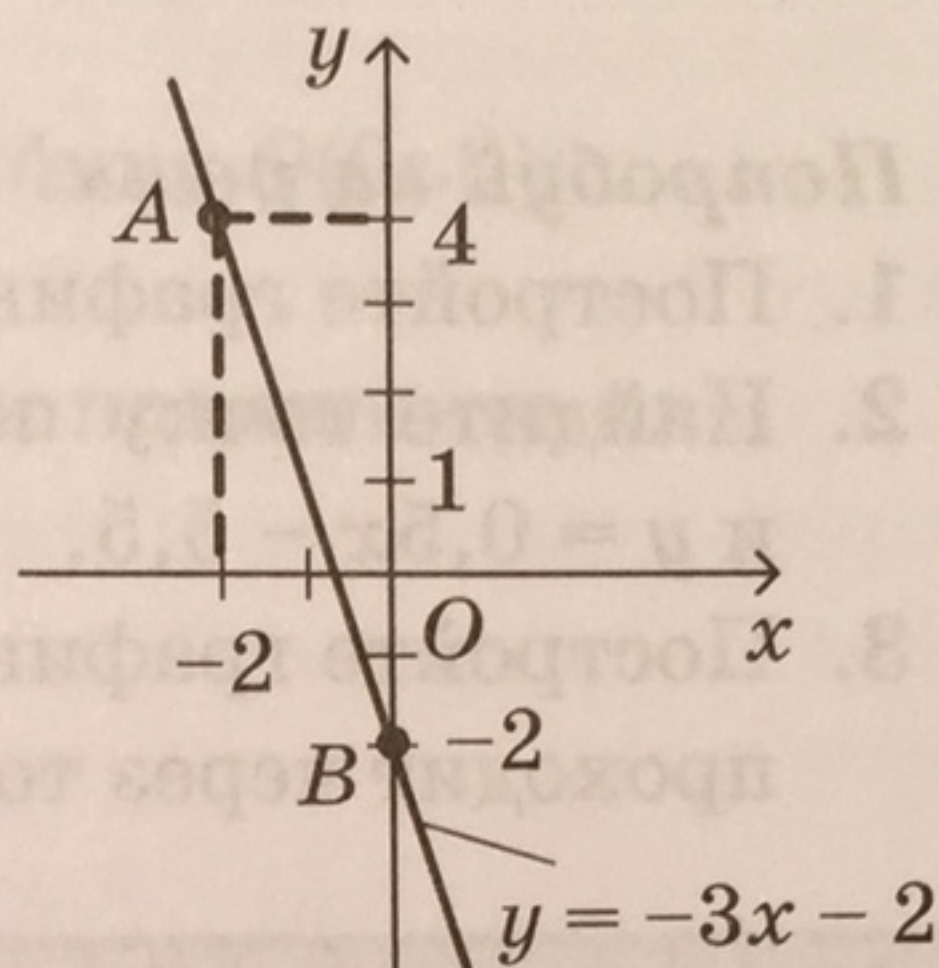


Рис. 64

**Полезный совет.** Если прямая  $y = kx + b$  проходит через две точки  $A(x_1; y_1)$  и  $A(x_2; y_2)$ , то, чтобы найти  $k$  и  $b$ , надо решить систему  $\begin{cases} y_1 = kx_1 + b \\ y_2 = kx_2 + b \end{cases}$ .

**Попробуй не реши!**

1. Какие из точек  $M(3; -8)$ ,  $N(-2; 5,5)$ ,  $T(3; -7,5)$  принадлежат графику функции  $y = -2,5x$ ?

*Ответ:*  $T(3; -7,5)$ .

2. ГИА. а) Постройте график функции  $y = 5 - 2,5x$ ; б) При каких значениях  $x$  функция принимает положительные значения?

*Ответ:* б)  $y > 0$  при  $x < 2$ .

3. Постройте график функции вида  $y = kx$ , если известно, что он параллелен графику функции  $y = -2,5x + 3$ .

*Ответ:*  $y = -2,5x$ .

4. Постройте график функции  $y = kx$ , который проходит через точку  $A(2; 5)$ , и определите:

1) при каких значениях аргумента функция принимает значения, равные 15; -5; -10;



2) какие значения принимает функция при значениях аргумента 8; -6; 12.

Ответ: 1).  $y = 2,5x$ ;  $x = 6$ ; -2; -4; 2).  $y = 20$ ; -15; 30.

5. Найдите точки пересечения графика функции  $y = 2x - 7$  с осями координат.

Ответ: (0; -7); (3,5; 0).

**Попробуй-ка реши!**

1. Постройте график функции  $-3x + 5y = 15$  (в отрезках).

2. Найдите точку пересечения графиков функций  $y = -2x + 7$  и  $y = 0,5x - 5,5$ .

3. Постройте график функции  $y = kx + 5$ , если известно, что он проходит через точку  $B(3; 4)$ . Определите значение  $k$ .

Ответ: 1).  $\frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1$ , график проходит через точки (-5; 0) и (0; 3);

2). (5; -3); 3).  $k = -\frac{1}{3}$ .

**Алгоритм**

**130**

**Построение графика функции  $y = |x|$**

1. Постройте график функции  $y = x$ .

2. Отобразите симметрично относительно оси  $Ox$  нижнюю часть графика ( $|x| \geq 0$ ), получите график функции  $y = |x|$  (рис. 65).

$x$	0	2
$y$	0	2

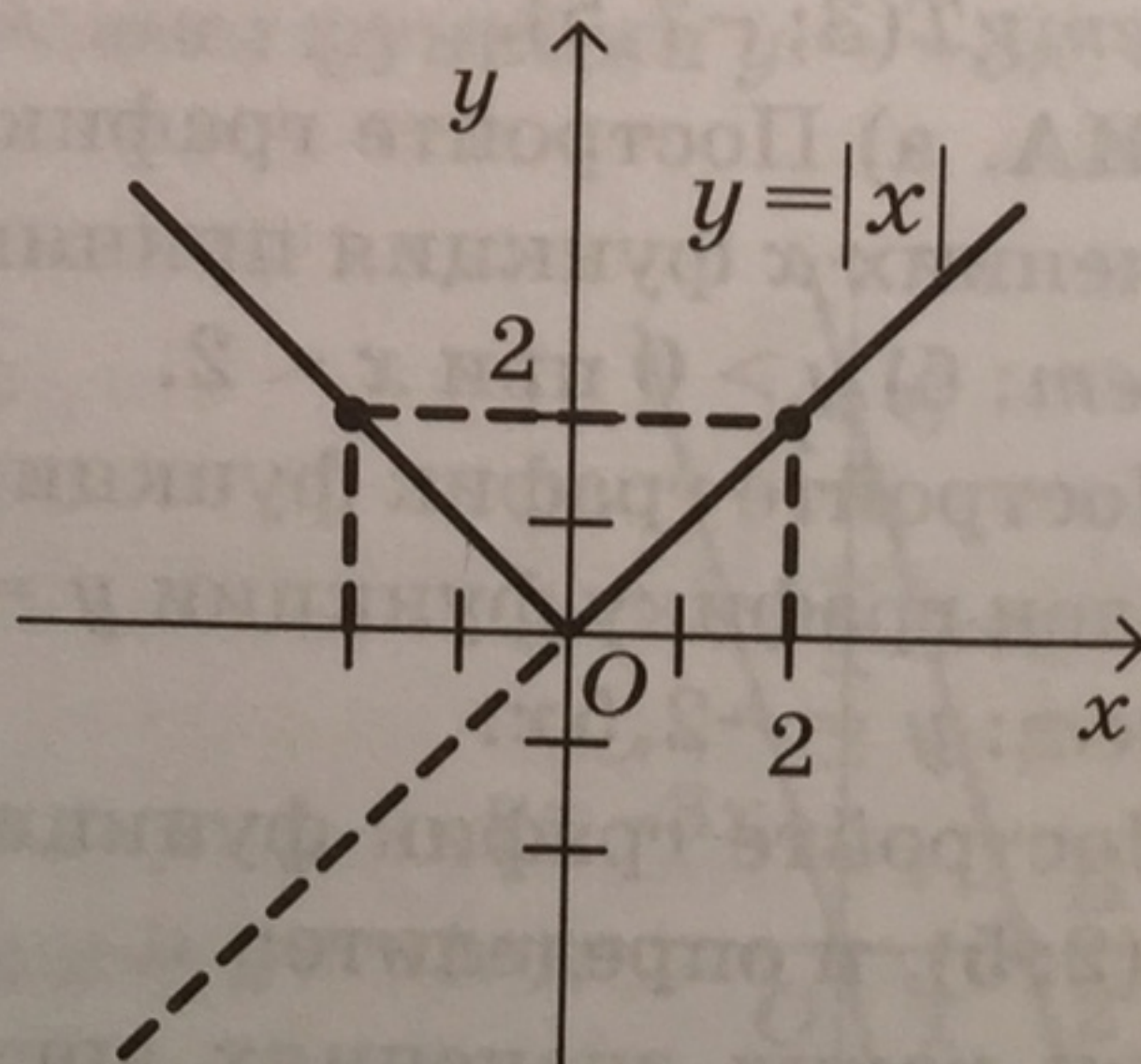


Рис. 65



## Алгоритм

131

Построение графика функции  $y = |x + a| + b$ 

1. Постройте график функции  $y = |x|$  (оси и начало координат не подписывайте).
2. Постройте точку  $(a; -b)$  и примите ее за точку  $O(0; 0)$ .
3. Проведите новые оси через точку  $(a; -b)$  и подпишите их.

## Пример

Постройте график функции  $y = |x - 3| + 2$ .

- 1). Постройте график функции  $y = |x|$

- 2). Постройте точку  $(a; -b)$ : это  $(-3; -2)$

- 3). Проведите новые оси  $Ox$  и  $Oy$  через точку  $(-3; -2)$  (рис. 66), приняв ее за новое начало координат  $O(0; 0)$

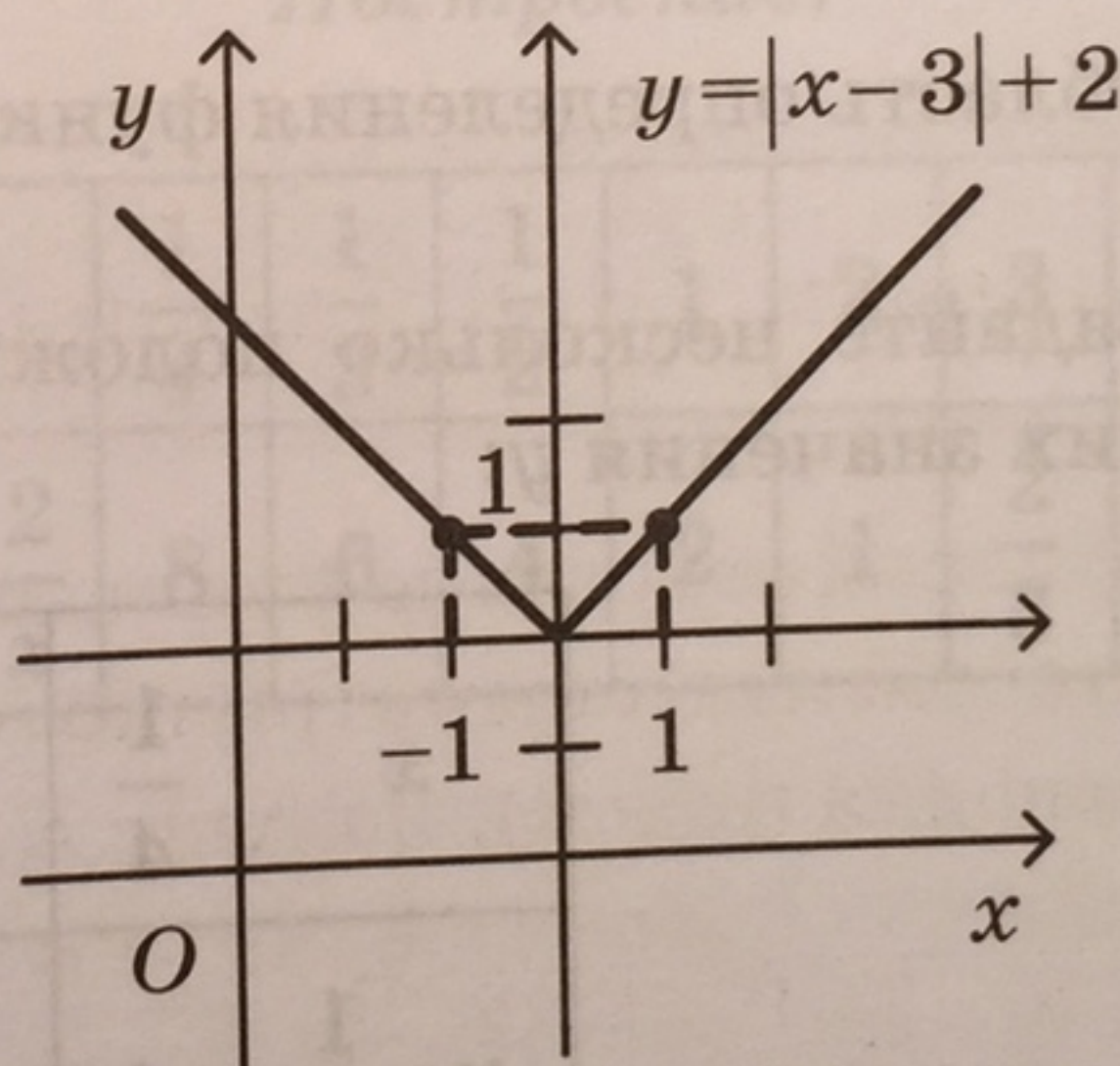


Рис. 66

## Проверь себя!

Постройте график функции  $y = |x + 4| - 1$ .

Ответ:  $(4; 1)$  — точка  $O(0; 0)$ .



## § 6.

Функция  $y = \frac{k}{x}$  и ее свойства

**Определение 1.** Обратной пропорциональной зависимостью называется функция вида  $y = \frac{k}{x}$ , где  $k > 0$  и  $x > 0$ .

Зависимость, при которой при увеличении значений  $x$  в несколько раз значение  $y$  уменьшается во столько же раз, называется **обратной пропорциональной зависимостью**.

Например, чем больше скорость движения на неизменном участке пути, тем меньше времени надо затратить; чем больше стоимость единицы товара, тем меньшее количество товара можно купить на одну и ту же сумму денег, и т. д.

## Алгоритм

## 132

Построение графика функции  $y = \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ )

1. Область определения функции:  $(0; +\infty)$ .
2. Задайте несколько положительных значений  $x$  и найдите для них значения  $y$ :

$x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$y = \frac{1}{x}$	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Получите точки с координатами:

$$\left(\frac{1}{4}; 4\right); \left(\frac{1}{3}; 3\right); \left(\frac{1}{2}; 2\right); (1; 1); \left(2; \frac{1}{2}\right); \left(3; \frac{1}{3}\right); \left(4; \frac{1}{4}\right)$$

3. Постройте точки п. 2 в системе координат (рис. 67). Соедините точки плавной кривой (рис. 68).



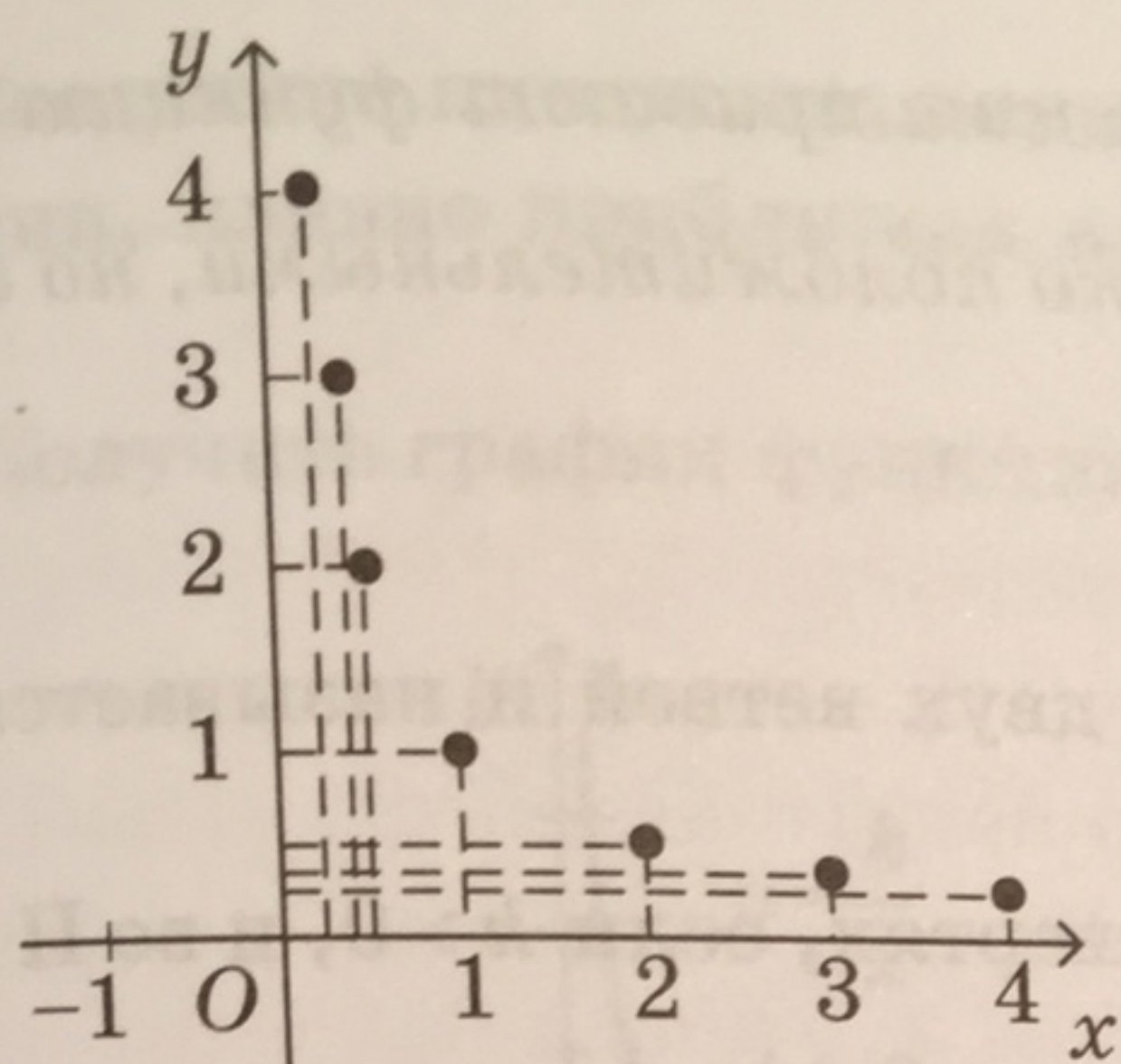


Рис. 67

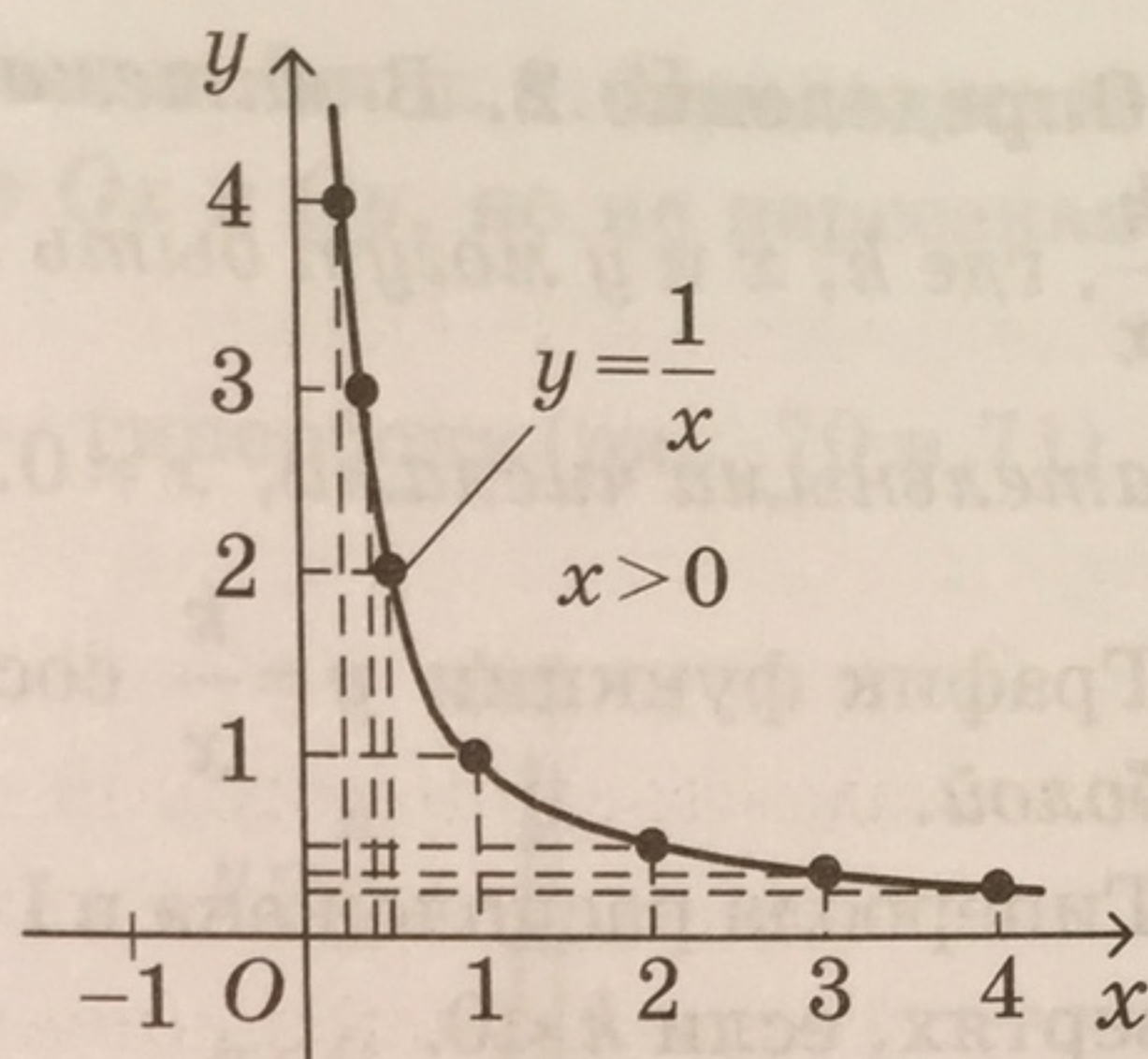


Рис. 68

Если дана функция  $y = \frac{k}{x}$ ,  $k > 0$  и  $x > 0$ , то, чтобы построить ее график, надо каждое значение  $y$  умножить на  $k > 0$ .

Например, построить график функции  $y = \frac{2}{x}$  (рис. 69)

Построение.

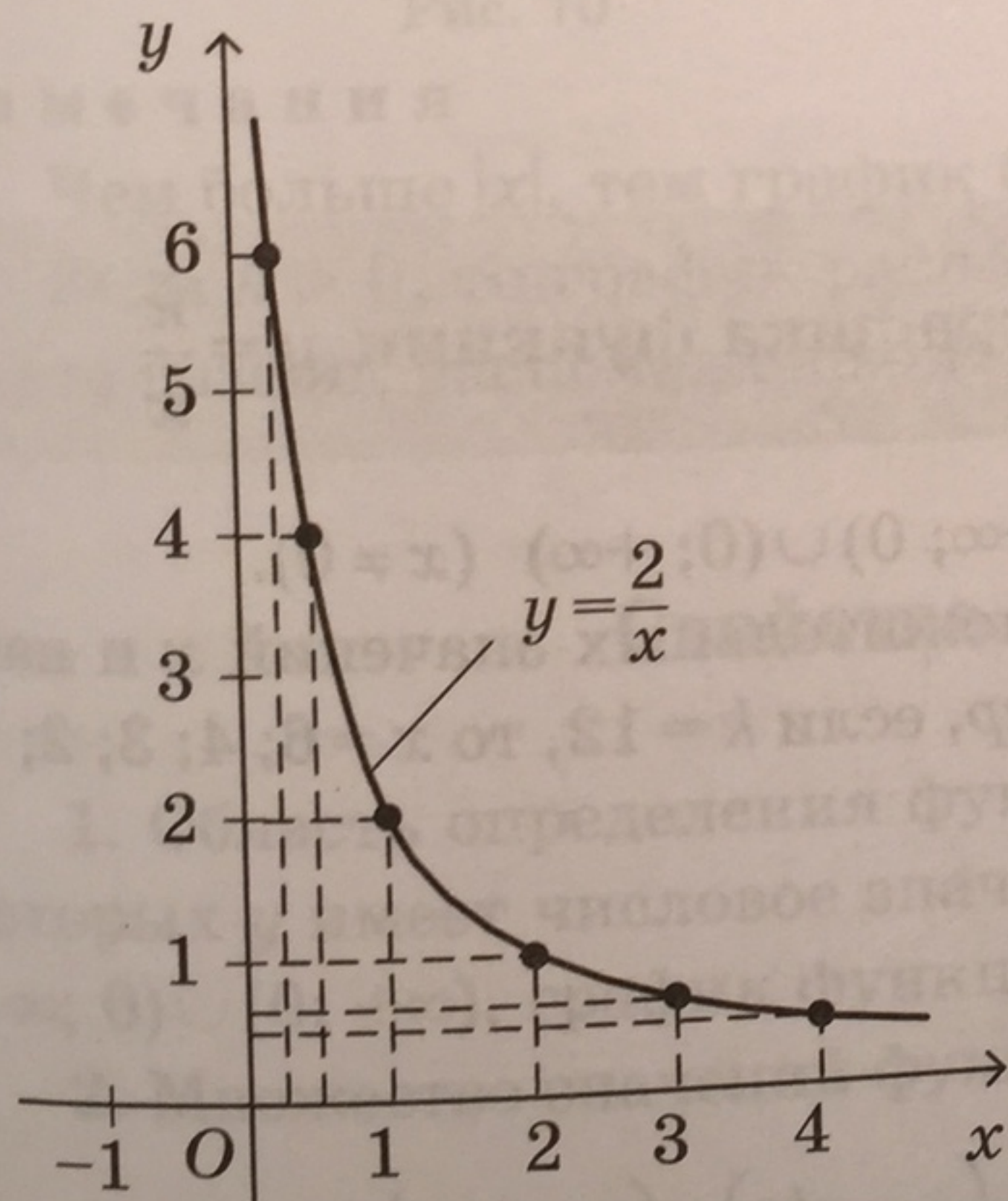


Рис. 69

$x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$y = \frac{2}{x}$	8	6	4	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

Все графики функции  $y = \frac{k}{x}$  при  $k > 0$  и  $x > 0$  расположены в I чет-  
верти. По графику хорошо видно, как с возрастанием значений  $x$  на  
оси  $Ox$  значения  $y$  убывают на оси  $Oy$ ; график направлен вниз-вправо.



**Определение 2.** В математике рассматривают функцию вида  $y = \frac{k}{x}$ , где  $k$ ,  $x$  и  $y$  могут быть не только положительными, но и отрицательными числами,  $x \neq 0$ .

График функции  $y = \frac{k}{x}$  состоит из двух ветвей и называется *гиперболой*.

Гипербола расположена в I и III четвертях, если  $k > 0$ , и во II и IV четвертях, если  $k < 0$ .

**Полезный совет.** Построив одну из ветвей гиперболы, можно построить вторую ветвь, используя симметрию графика относительно

точки  $O(0; 0)$ , так как точки графика  $\left(x; \frac{k}{x}\right)$  и  $\left(-x; -\frac{k}{x}\right)$  симме-

тричны относительно точки  $O(0; 0)$ , а значит, весь график, состоящий из двух ветвей, обладает симметрией относительно точки  $O(0; 0)$ :  $y(-x) = -y(x)$  — функция нечетная.

**Алгоритм****133****Построение графика функции  $y = \frac{k}{x}$** 

1. Область определения функции:  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$  ( $x \neq 0$ ).
2. Задайте несколько «удобных» положительных значений  $x$  и найдите для них значения  $y$ . Например, если  $k = 12$ , то  $x = 6; 4; 3; 2; 1$ ; если  $k = 8$ , то  $x = 8; 4; 2; 1$ .

$x$	$x_1$	$x_2$	...
$y = \frac{k}{x}$	$y = \frac{k}{x_1}$	$y = \frac{k}{x_2}$	...

3. Постройте точки с координатами:  $\left(x_1; \frac{k}{x_1}\right); \left(x_2; \frac{k}{x_2}\right)$  и т. д.
4. Постройте точки с противоположными координатами (п. 3):  $\left(-x_1; -\frac{k}{x_1}\right); \left(-x_2; -\frac{k}{x_2}\right)$ . Иначе, постройте график, симметричный графику в I четверти, при  $k > 0$ .



5. Соедините плавными линиями точки п. 3 и п. 4. Продолжите линии, плавно приближая их к осям  $Ox$  и  $Oy$ , но не пересекая их.

Получите график функции  $y = \frac{k}{x}$  — гиперболу (рис. 70 и 71).

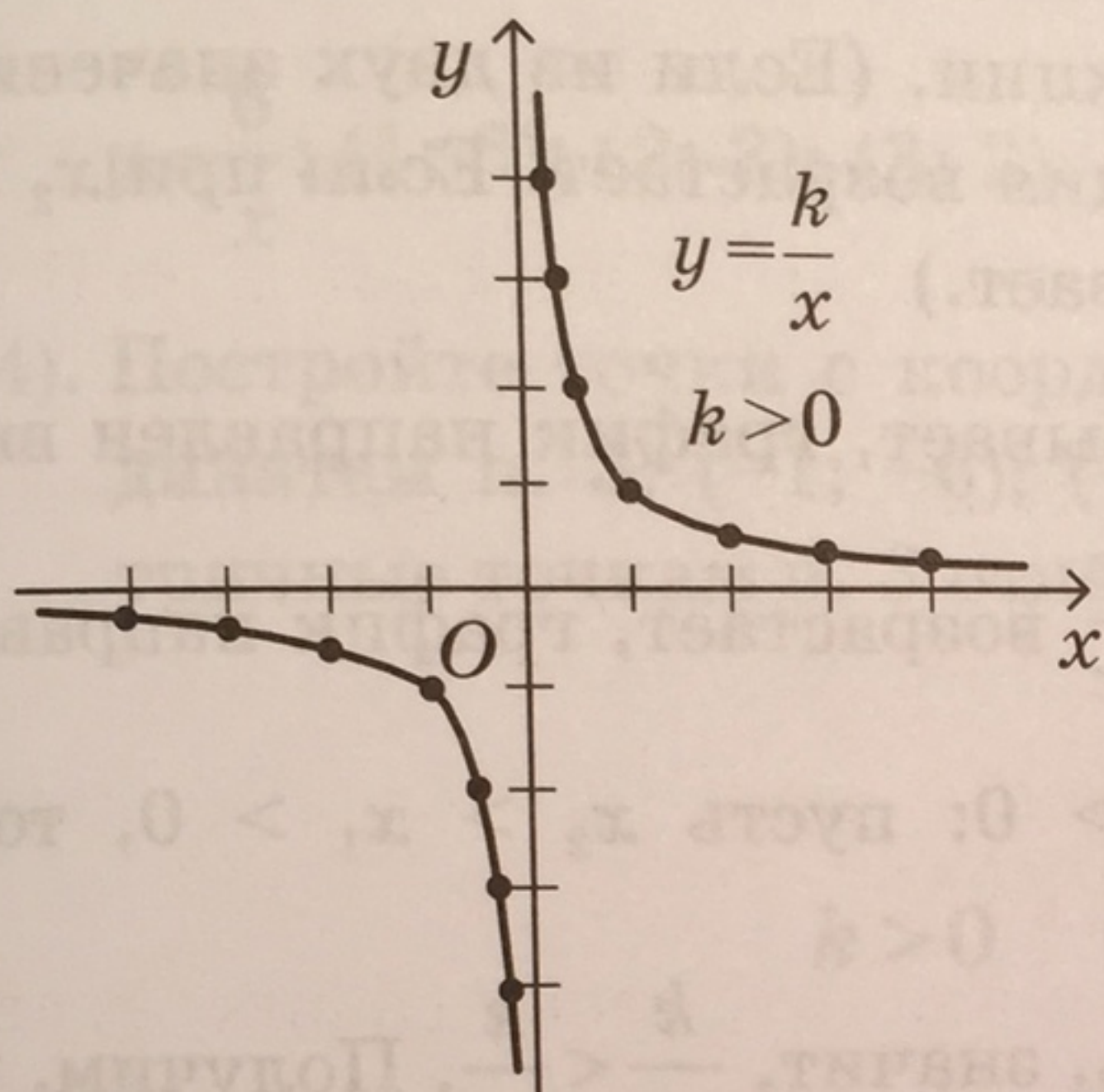


Рис. 70

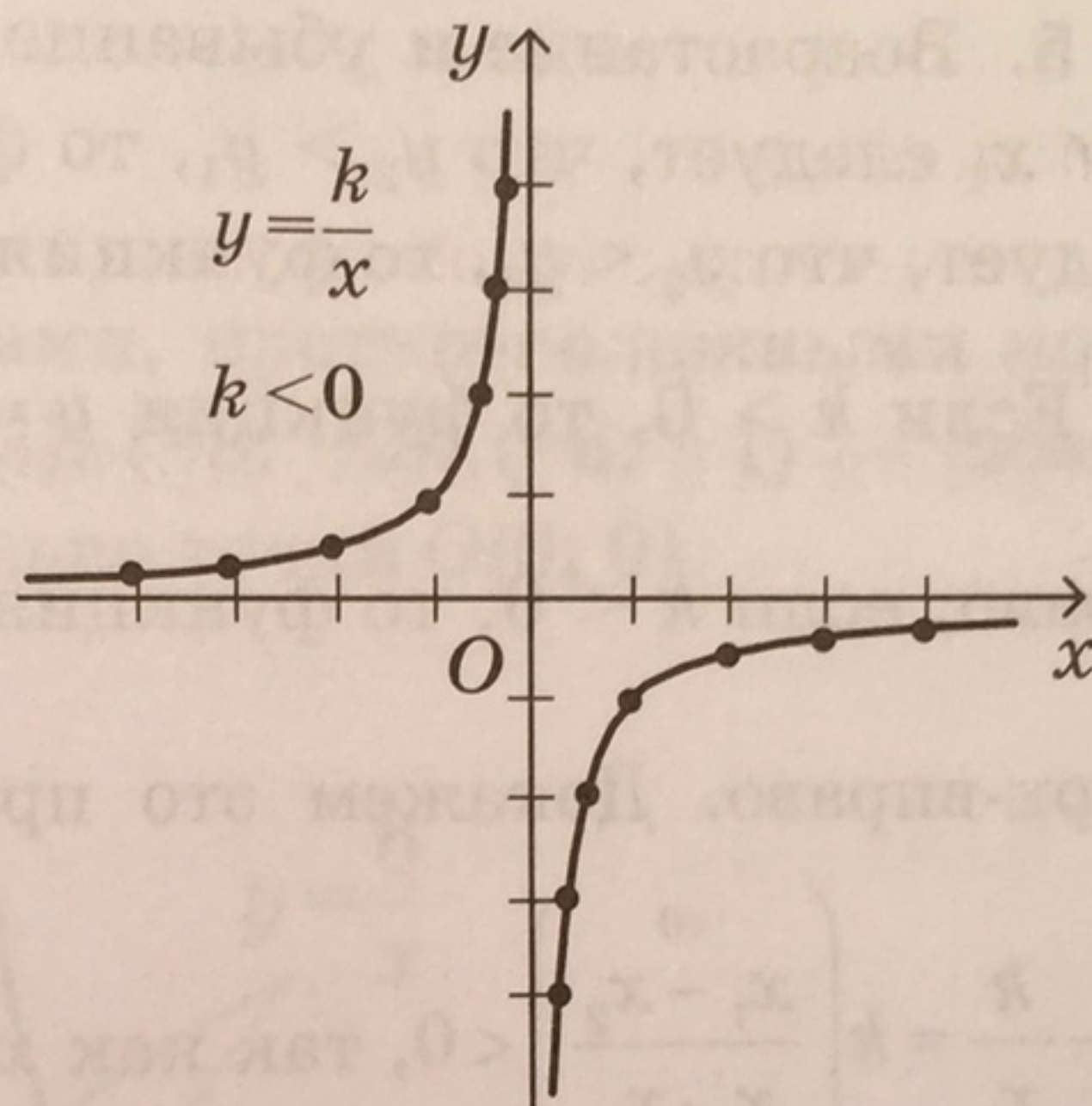


Рис. 71

### З а м е ч а н и я

1. Чем больше  $|x|$ , тем график ближе к осям  $Ox$  и  $Oy$ .
2. Если  $k > 0$ , то график расположен в I и III четвертях; если  $k < 0$ , то график расположен во II и IV четвертях.

### Свойства функции $y = \frac{k}{x}$

1. Область определения функции (все числовые значения  $x$ , при которых  $y$  имеет числовое значение):  $x$  — любое число, кроме  $x = 0$ ,  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ , график функции состоит из двух ветвей.

2. Множество значений функции (все значения  $y$ ):  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ ,

график в верхней и нижней полуплоскостях,  $\frac{k}{x} \neq 0$ , так как  $k \neq 0$ .

3. Нули функции (значения  $x$ , при которых  $y = 0$ ):  $\frac{k}{x} \neq 0$ , значит, нет нулей функции, график не пересекает ось  $Ox$ .

4. Промежутки знакопостоянства (знаки функции) — значения  $x$ , при которых  $y > 0$  или  $y < 0$ .



Если  $k > 0$ , то при  $x > 0$  и  $y > 0$ , а при  $x < 0$  и  $y < 0$ . График в I и III четвертях.  $y(-x) = -y(x)$  — функция нечетная, график симметричен относительно точки  $O(0; 0)$ .

Если  $k < 0$ , то при  $x > 0$  и  $y < 0$ , а при  $x < 0$  и  $y > 0$ . График во II и IV четвертях.  $y(-x) = -y(x)$  — функция нечетная.

5. Возрастание и убывание функции. (Если из двух значений  $x$   $x_2 > x_1$  следует, что  $y_2 > y_1$ , то функция возрастает. Если при  $x_2 > x_1$  следует, что  $y_2 < y_1$ , то функция убывает.)

Если  $k > 0$ , то функция  $y = \frac{k}{x}$  убывает, график направлен вниз-вправо; если  $k < 0$ , то функция  $y = \frac{k}{x}$  возрастает, график направлен вверх-вправо. Докажем это при  $k > 0$ : пусть  $x_2 > x_1 > 0$ , тогда

$$\frac{k}{x_2} - \frac{k}{x_1} = k \left( \frac{x_1 - x_2}{x_1 \cdot x_2} \right) < 0, \text{ так как } x_1 < x_2, \text{ значит, } \frac{k}{x_2} < \frac{k}{x_1}. \text{ Получим, что}$$

большему значению  $x_2$  соответствует меньшее значение  $y_2 = \frac{k}{x_2}$ . Аналогично доказывается для  $k < 0$ .

6. При  $x > 0$ , достаточно больших значениях,  $y$  становится очень малым, а значит, график неограниченно приближается к оси  $Ox$ , но не пересекает ее ( $y \neq 0$ ). При  $x > 0$ , близких к нулю, значение  $y$  неограниченно увеличивается и график приближается к оси  $Oy$ , но не пересекает ее ( $x \neq 0$ ).

### Пример

Постройте график функции  $y = \frac{6}{x}$  и по графику изучите свойства функции (устно).

Построение.

1). Область определения функции:  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$  ( $x \neq 0$ )



2).

$x$	1	2	3	6
$y = \frac{6}{x}$	6	3	2	1

3). Постройте точки с координатами:

$$y = \frac{6}{x}: (1; 6); (2; 3); (3; 2); (6; 1)$$

4). Постройте точки с координатами, противоположными координатам п. 3:  $(-1; -6); (-2; -3); (-3; -2); (-6; -1)$  — симметричные точкам п. 3 относительно точки  $O(0; 0)$

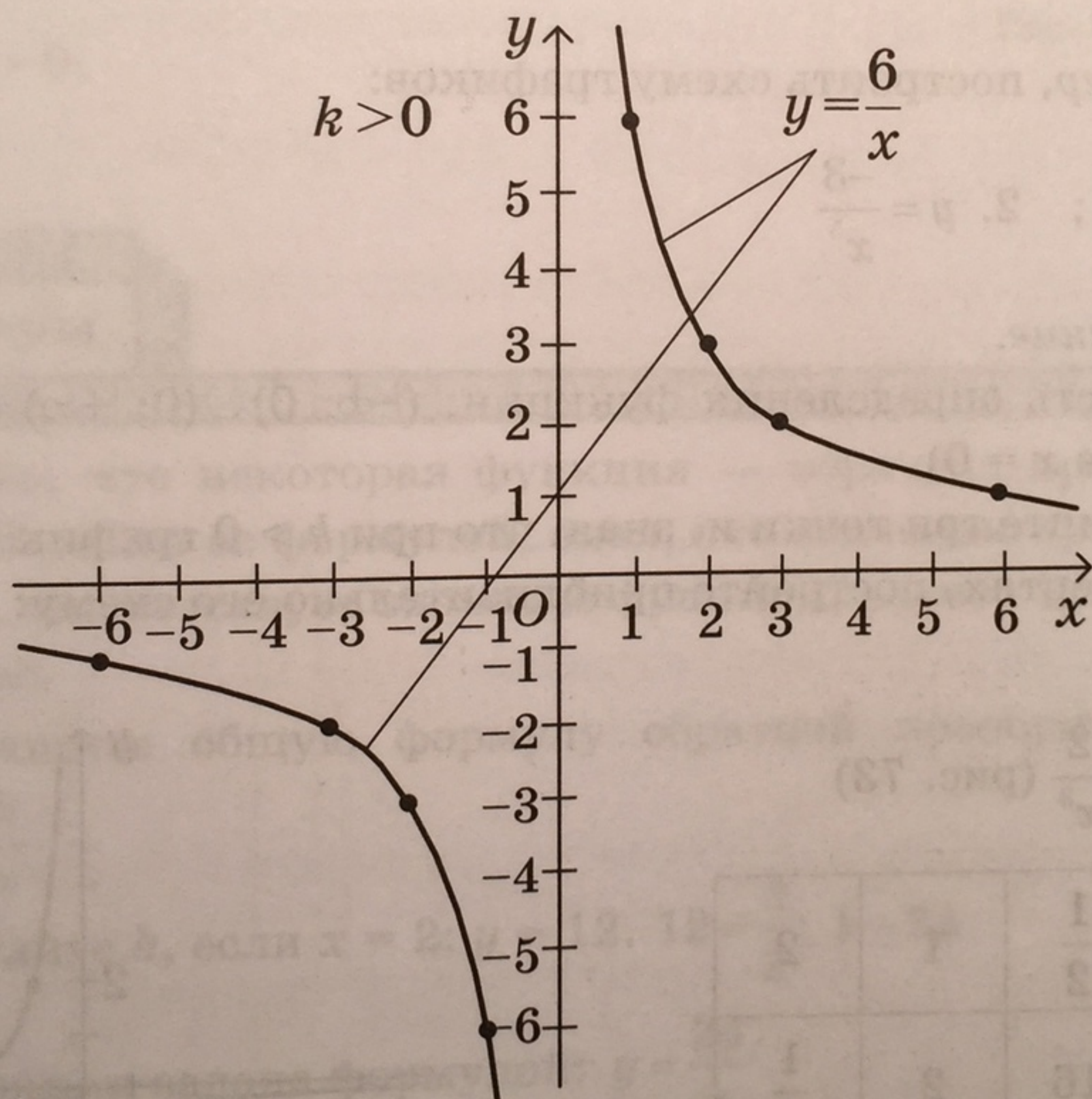


Рис. 72

5). Соедините точки, расположенные в I и III четвертях, плавными кривыми, приближая их к осям. Получите график функции

$$y = \frac{6}{x} \text{ — гиперболоу (рис. 72).}$$



## Построение схемы графика функции $y = \frac{k}{x^{2n+1}}$

**Замечание\*.** Все графики функций  $y = \frac{k}{x^3}$ ;  $y = \frac{k}{x^5}$ ;  $y = \frac{k}{x^7}$  ...  $y = \frac{k}{x^{2n+1}}$  имеют вид графика функции  $y = \frac{k}{x}$ . Чтобы построить схему графика

$y = \frac{k}{x^{2n+1}}$ , постройте три точки  $\left(\frac{1}{2}; k \cdot 2^{2n+1}\right)$ ;  $(1; k)$ ;  $\left(2; \frac{k}{2^{2n+1}}\right)$  и, плавно соединив эти точки, продолжите ветви, приближая их к осям.

Например, построить схему графиков:

1.  $y = \frac{2}{x^3}$ ; 2.  $y = \frac{-3}{x^5}$

**Построение.**

1). Область определения функции:  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$  ( $x$  — любое число, кроме  $x = 0$ ).

2). Возьмите три точки и, зная, что при  $k > 0$  график расположен в I и III четвертях, постройте приблизительно его схему:

$y = \frac{2}{x^3}$  (рис. 73)

$x$	$\frac{1}{2}$	1	2
$y$	16	2	$\frac{1}{4}$

$$y_1 = 2 : \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2 \cdot 2^3 = 2^4 = 16$$

$$y_2 = 2 : 2^3 = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

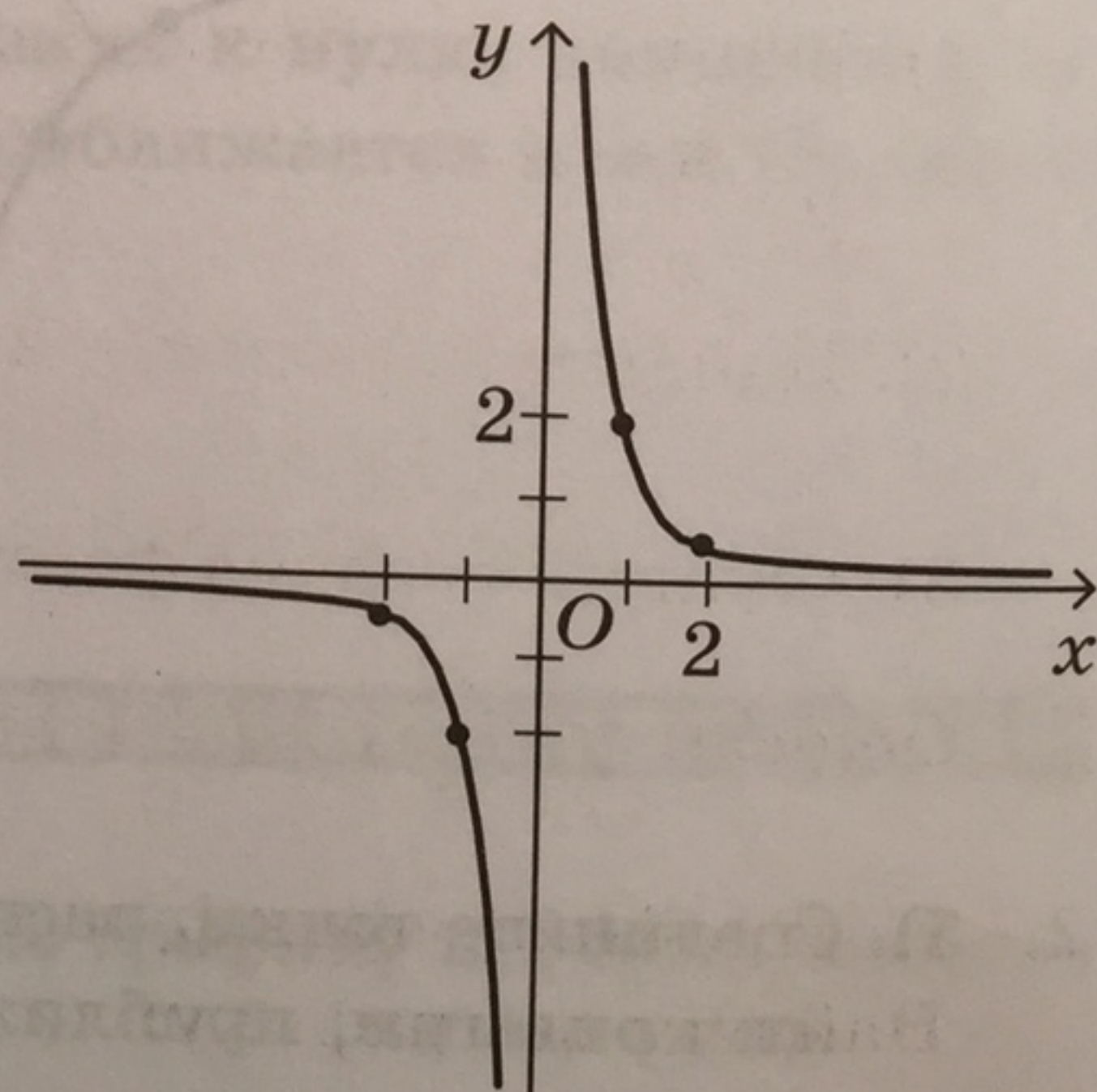


Рис. 73



$$y = \frac{-3}{x^5} \text{ (рис. 74)}$$

$x$	$\frac{1}{2}$	1	2
$y$	-96	-3	-0,1

$$y_1 = -3 : \left(\frac{1}{2}\right)^5 = -3 \cdot 2^5 = -3 \cdot 32 = -96$$

$$y_2 = -3 : 2^5 = -3 : 32 \approx -0,1$$

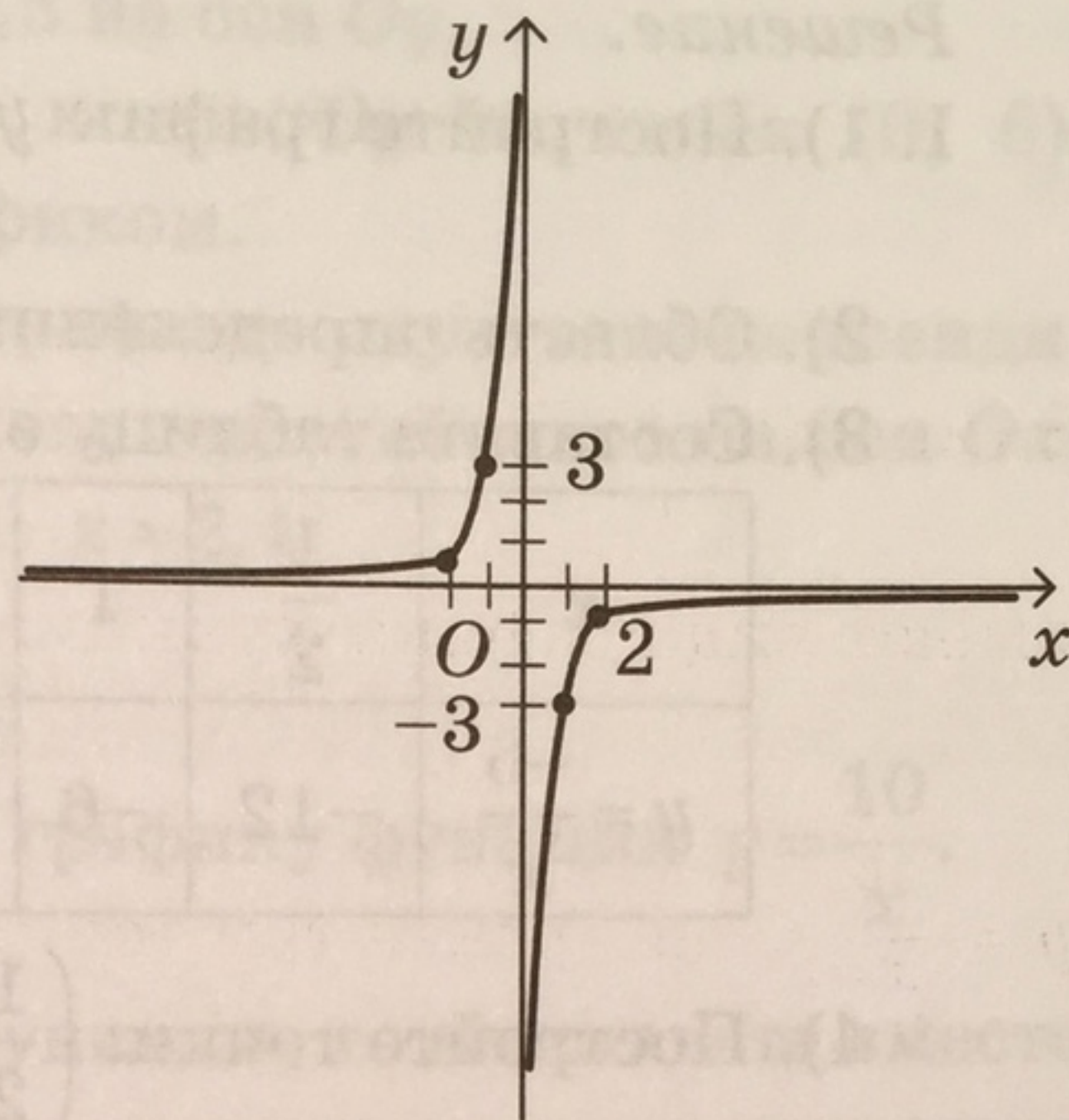


Рис. 74

**З а м е ч а н и е.** График функции

$y = \frac{1}{x^2}$  расположен в I и II четвертях, так как  $\frac{1}{x^2} > 0$ .

### Примеры

1. Известно, что некоторая функция — обратная пропорциональность. Задайте ее формулой, зная, что значению аргумента, равному 2, соответствует значение функции, равное 12.

*Решение.*

- 1). Запишите общую формулу обратной пропорциональности:

$$y = \frac{k}{x}$$

- 2). Найдите  $k$ , если  $x = 2$ ;  $y = 12$ .  $12 = \frac{k}{2}$ ;  $k = 24$

- 3). Функция задана формулой:  $y = \frac{24}{x}$

Ответ:  $y = \frac{24}{x}$ .

2. Постройте график функции, заданной формулой  $y = \frac{-6}{x}$  (рис. 75).

Найдите по графику:

- а) значение  $y$ , соответствующее значению  $x$ , равному 2; -3; -2,5;
- б) значение  $x$ , соответствующее значению  $y$ , равному 6; -2,5.



Решение.

I. 1). Постройте график  $y = \frac{-6}{x}$ 2). Область определения функции:  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$  ( $x \neq 0$ )3). Составьте таблицу значений  $x$  и  $y$ :

$x$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	6
$y = \frac{-6}{x}$	-12	-6	-3	-2	-1

$$-6 : \left(\frac{1}{2}\right) = -6 \cdot 2 = -12$$

4). Постройте точки:  $\left(\frac{1}{2}; -12\right); (1; -6); (2; -3); (3; -2); (6; -1)$ 5). Постройте точки, симметричные точкам п. 4, относительно точки  $O(0; 0)$ :  $\left(-\frac{1}{2}; 12\right); (-1; 6); (-2; 3); (-3; 2); (-6; 1)$ 

6). Соедините точки п. 4 в IV четверти и точки п. 5 во II четверти и продолжите ветви, приближая их к осям.

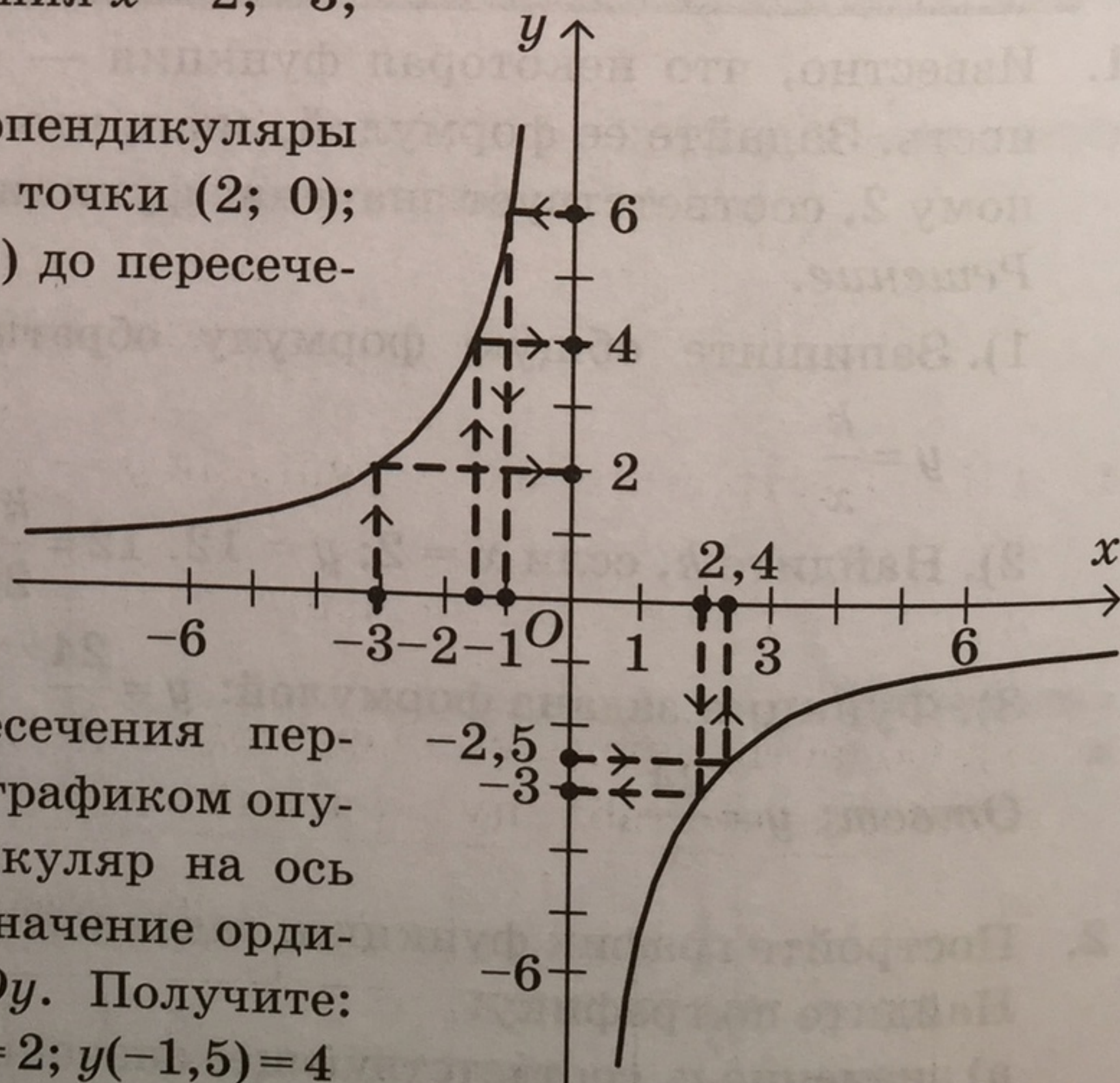
II. 1). Отложите значения  $x = 2; -3;$   
 $-1,5$  на оси  $Ox$ 2). Проведите перпендикуляры к оси  $Ox$  через точки  $(2; 0); (-3; 0); (-1,5; 0)$  до пересечения с графиком3). Из точек пересечения перпендикуляра с графиком опустите перпендикуляр на ось  $Oy$  и найдите значение ординаты на оси  $Oy$ . Получите:  $y(2) = -3; y(-3) = 2; y(-1,5) = 4$ 

Рис. 75



- III. 1). Отложите значения  $y = 6; -2,5$  на оси  $Oy$ .  
 2). Проведите перпендикуляры к оси  $Oy$  из точек  $(0; 6); (0; 2,5)$  до пересечения с графиком.  
 3). Из полученных точек на графике опустите перпендикуляры к оси  $Ox$  и найдите значение абсцисс на оси  $Ox$ :  
 $y(-1) = 6; y(2,4) = -2,5. x = -1; x \approx 2,4$

3. Определите, принадлежат ли точки:

- 1).  $A(-0,05; -200)$ ; 2).  $D(500; -0,02)$  графику функции  $y = \frac{10}{x}$ .

Решение.

Если точка принадлежит графику функции, то подставьте вместо  $x$  и  $y$  их значения и получите верное равенство; если равенство будет неверным, то точка не принадлежит графику.

1).  $A(-0,05; -200). y = \frac{10}{x}; x = -0,05; y = -200$

$$-200 = \frac{10}{-0,05}; -200 = -200 \text{ — верно, значит, точка } A \text{ лежит на графике}$$

$$\left| \begin{array}{l} 10 : (-0,05) = \\ = 1000 : (-5) = \\ = -200 \end{array} \right.$$

2).  $D(500; -0,02). y = \frac{10}{x}; x = 500; y = -0,02$

$$-0,02 = \frac{10}{500}; -0,02 = 0,02 \text{ — ложно, значит, точка } D \text{ не принадлежит графику}$$

4. ГИА. Постройте график функции  $y = -\frac{5}{2x}$ . При каких значениях  $x$

функция принимает значения больше  $-5$ ?

Решение.

1). Область определения функции:  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

2). Составьте таблицу значений  $x$  и  $y$ :

$x$	$\frac{1}{2}$	1	2	5	10
$y = -\frac{5}{2x}$	-5	-2,5	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$



3). Постройте точки:

$$\left(\frac{1}{2}; -5\right); (1; -2,5);$$

$$\left(2; -\frac{5}{4}\right); \left(5; -\frac{1}{2}\right)$$

и точки с противоположными координатами:

$$\left(-\frac{1}{2}; 5\right); (-1; 2,5);$$

$$\left(-2; \frac{5}{4}\right); \left(-5; \frac{1}{2}\right)$$

(рис. 76)

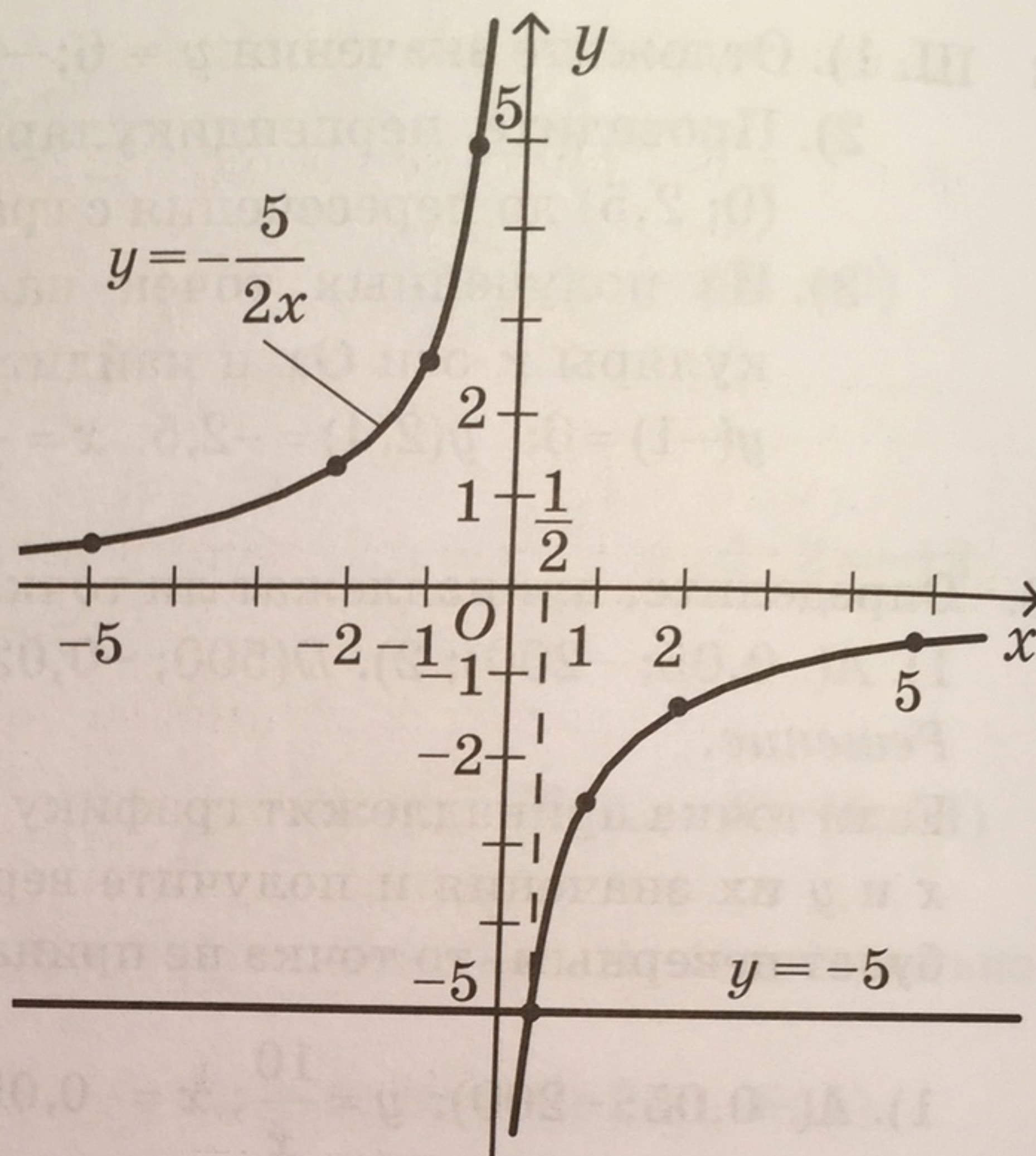


Рис. 76

4). При  $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$  (см. рис. 76) все точки графика расположены над прямой  $y = -5$ , а значит,  $y > -5$

Ответ:  $y > -5$  при  $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ .

Алгоритм

134

Построение графика функции  $y = \frac{k}{x+a} + b$

### I способ

1. Постройте график функции  $y = \frac{k}{x}$  в системе координат  $Oxy$  (оси и начало координат не подписывайте).
2. Задайте параллельный перенос оси  $Oy$  на  $a$  единиц, а оси  $Ox$  на  $(-b)$  единиц и проведите новые оси параллельно осям  $Ox$  и  $Oy$  (новое начало координат  $O(0; 0)$  будет иметь координаты в I системе  $(a; -b)$ ).



3. Назовите новые оси координат и точку  $O(0; 0)$ . Подпишите график в новой системе координат.  $y = \frac{k}{x+a} + b$  — это и будет заданный график.

### Пример

Постройте график функции  $y = \frac{2}{x+3} - 4$ .

Решение.

1). Постройте график функции  $y = \frac{2}{x}$ .

Построение.

$x$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$y = \frac{2}{x}$	4	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

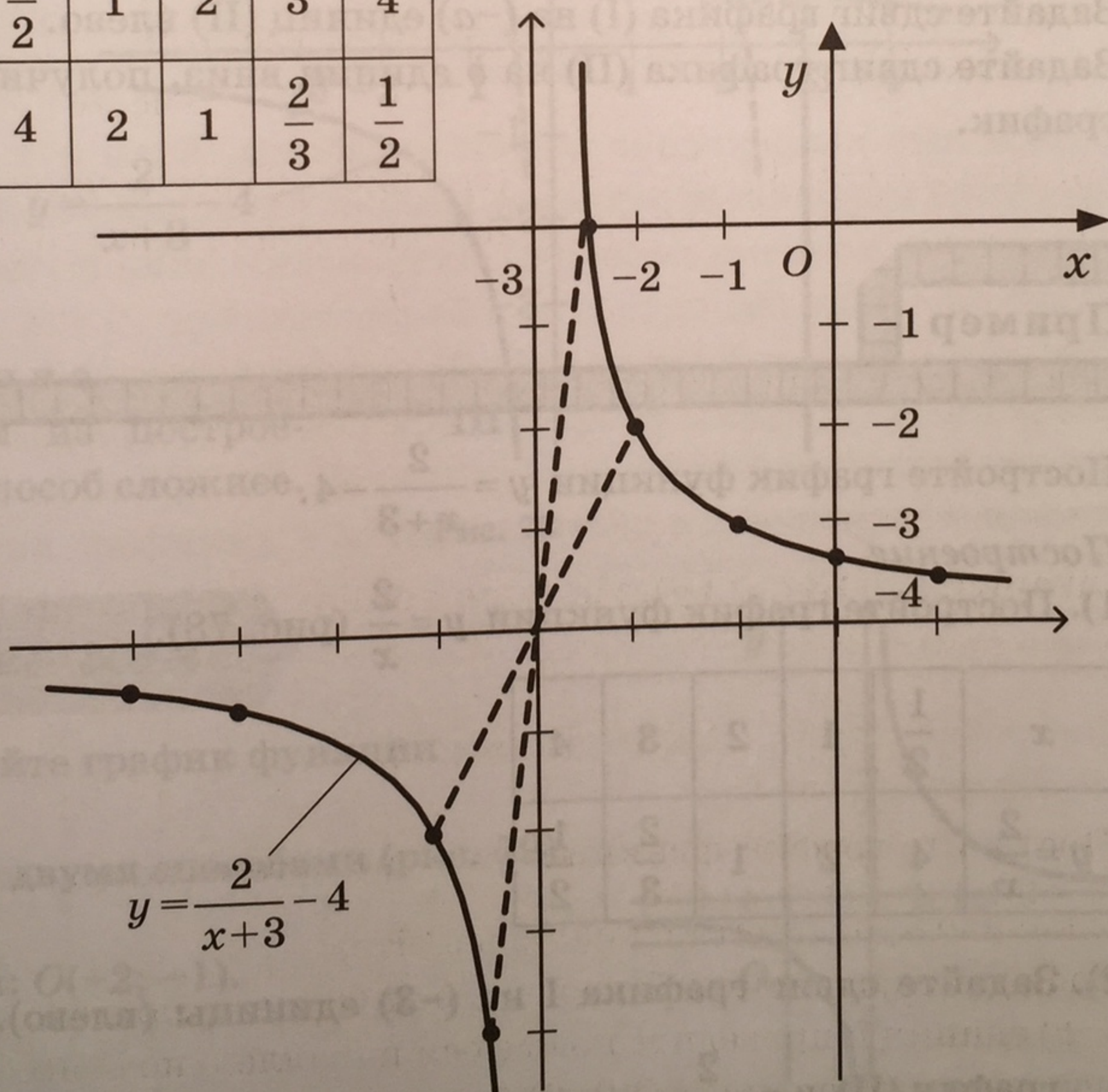


Рис. 77



2). Задайте параллельный перенос осей:  $Oy$  на  $a = 3$  единицы вправо, ось  $Ox$  на  $-b = 4$  единицы вверх.

3). Новое начало координат в точке  $(3; 4)$  (рис. 77).

**З а м е ч а н и е.** Для построения графика  $y = \frac{k}{x+a} + b$  нужно постро-

ить график функции  $y = \frac{k}{x}$ , найти новое начало координат в точке

$(a; -b)$  и провести новые оси.

## II способ (сдвиг графика)

1. Постройте график функции  $y = \frac{k}{x}$  (I).

2. Задайте сдвиг графика (I) на  $(-a)$  единиц (II) влево.

3. Задайте сдвиг графика (II) на  $b$  единиц вниз, получите искомый график.

### Пример

Постройте график функции  $y = \frac{2}{x+3} - 4$ .

*Построение.*

1). Постройте график функции  $y = \frac{2}{x}$  (рис. 78).

$x$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$y = \frac{2}{x}$	4	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

2). Задайте сдвиг графика I на  $(-3)$  единицы (влево). Получите

график (II)  $y = \frac{2}{x+3}$ .



3). Задайте сдвиг графика II на  $(-4)$  единицы (вниз). Получите график III, он и будет графиком функции

$$y = \frac{2}{x+3} - 4$$

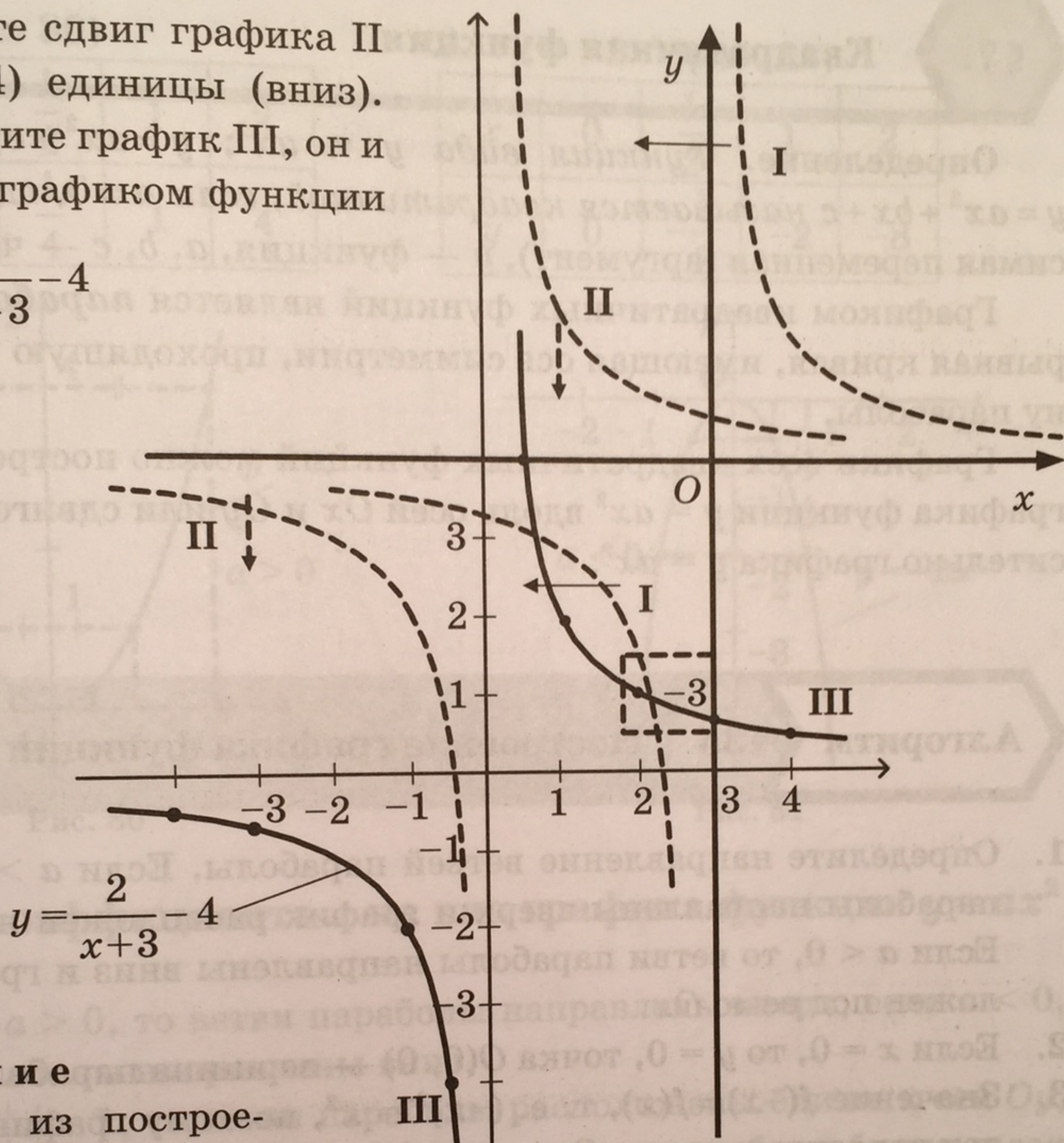


Рис. 78

### З а м е ч а н и е

Как видим из построения, этот способ сложнее.

### Проверь себя!

Постройте график функции

$$y = \frac{3}{x-2} + 1 \text{ двумя способами (рис. 79).}$$

Ответ:  $O(-2; -1)$ .

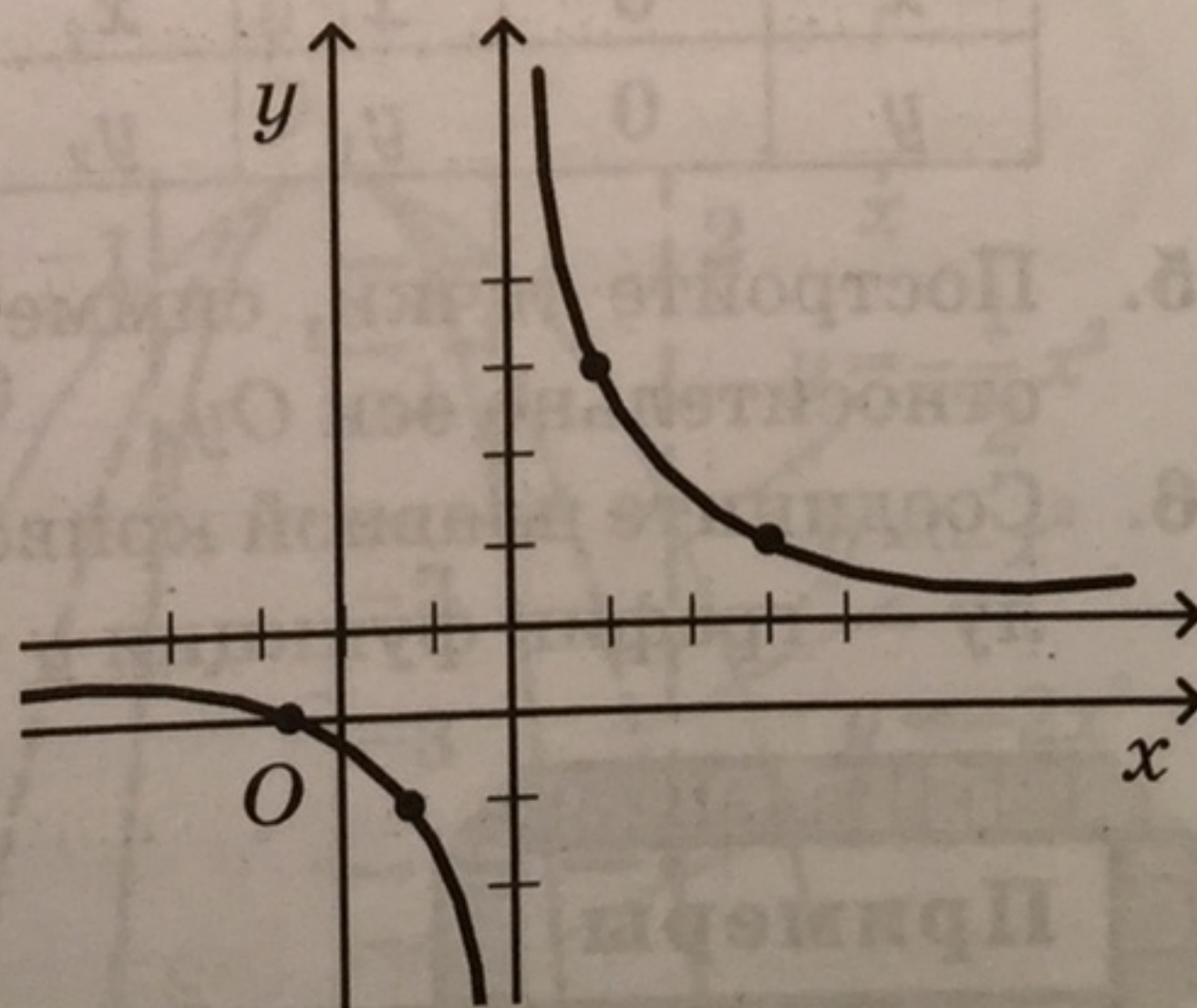


Рис. 79



## § 7.

## Квадратичная функция

**Определение.** Функция вида  $y = ax^2$ ;  $y = ax^2 + c$ ;  $y = ax^2 + bx$ ;  $y = ax^2 + bx + c$  называется квадратичной, если  $a \neq 0$ , где  $x$  — независимая переменная (аргумент),  $y$  — функция,  $a, b, c$  — числа.

Графиком квадратичных функций является **парабола** — непрерывная кривая, имеющая ось симметрии, проходящую через вершину параболы.

Графики всех квадратичных функций можно построить сдвигом графика функции  $y = ax^2$  вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  или сдвигом осей относительно графика  $y = ax^2$ .

## Алгоритм

135

Построение графика функции  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ )

1. Определите направление ветвей параболы. Если  $a > 0$ , то ветви параболы направлены вверх и график расположен над осью  $Ox$ . Если  $a < 0$ , то ветви параболы направлены вниз и график расположен под осью  $Ox$ .
2. Если  $x = 0$ , то  $y = 0$ , точка  $O(0; 0)$  — вершина параболы.
3. Значение  $f(-x) = f(x)$ , т. е.  $(-x)^2 = x^2$ , поэтому график симметричен относительно оси  $Oy$ .
4. Занесите значения  $x$  и  $y$  в таблицу:

$x$	0	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$y$	0	$y_1$	$y_2$	$y_3$

5. Постройте точки, симметричные точкам  $(x_1; y_1)$ ;  $(x_2; y_2)$ ;  $(x_3; y_3)$  относительно оси  $Oy$ .
6. Соедините плавной кривой полученные точки, получите параболу — график функции  $y = ax^2$ .

## Примеры

Постройте график функции.



1.  $y = x^2$  (рис. 80)

$x$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y$	0	$\frac{1}{4}$	1	4

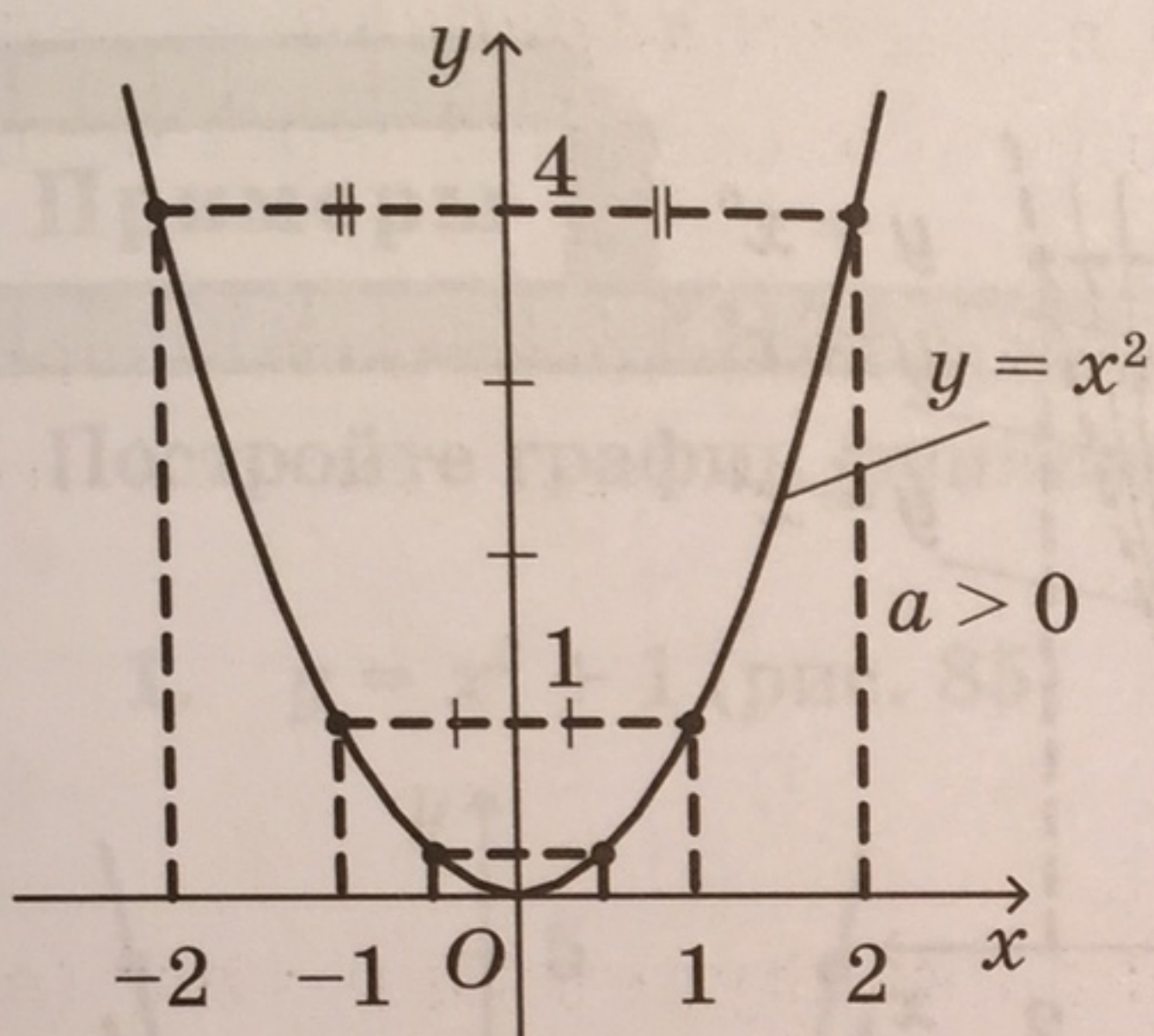


Рис. 80

2.  $y = -2x^2$  (рис. 81)

$x$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	-8

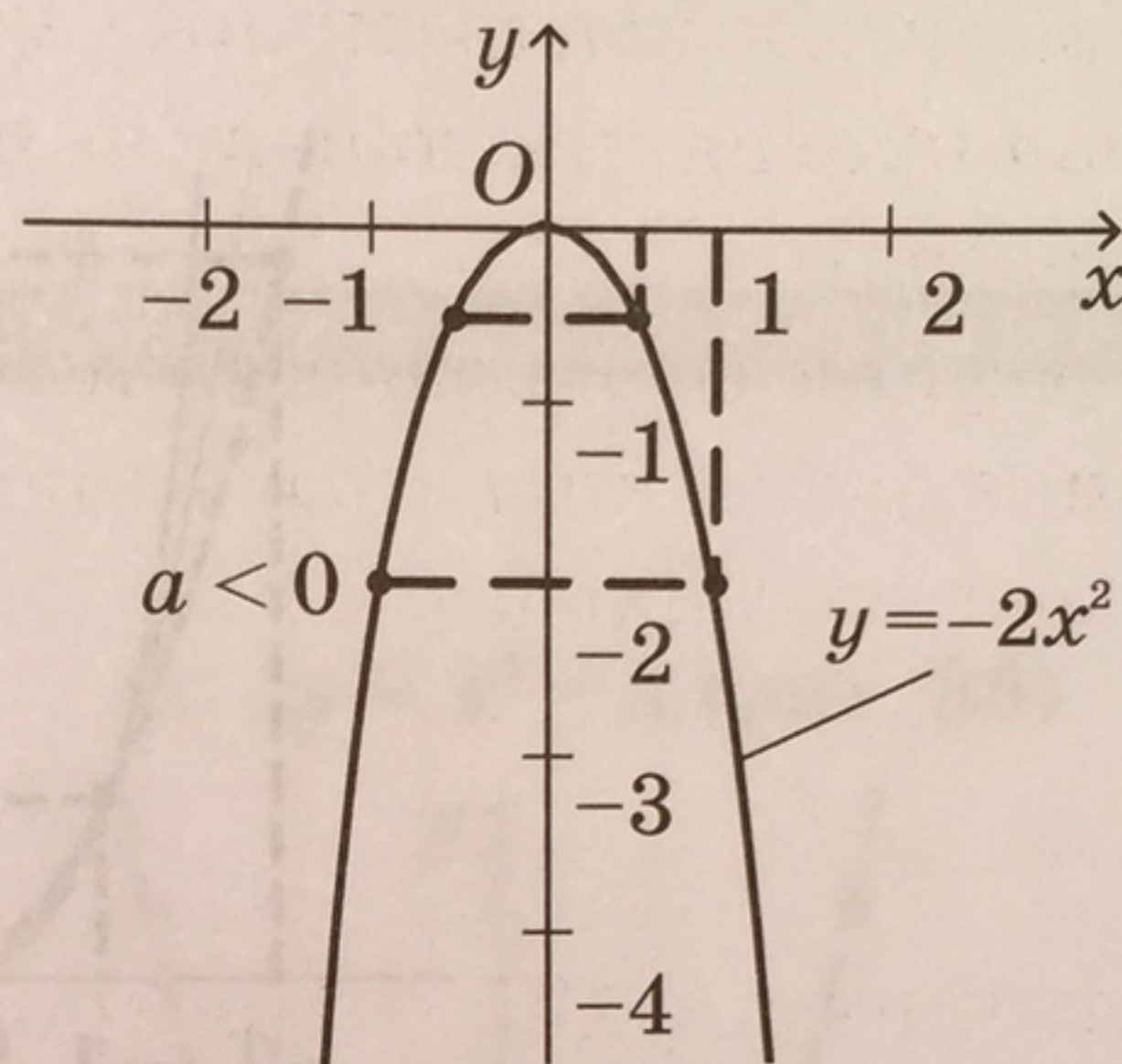


Рис. 81

### Влияние коэффициента $a$ на вид графика функции $y = ax^2$

1. Если  $a > 0$ , то ветви параболы направлены вверх; если  $a < 0$ , то ветви параболы направлены вниз.

2. Если  $|a| > 1$ , то ветви параболы расположены ближе к оси  $Oy$ , чем ветви графика  $y = x^2$ . Если  $|a| < 1$ , то ветви параболы ближе к оси  $Ox$ , чем ветви графика  $y = x^2$  (рис. 82, 83).

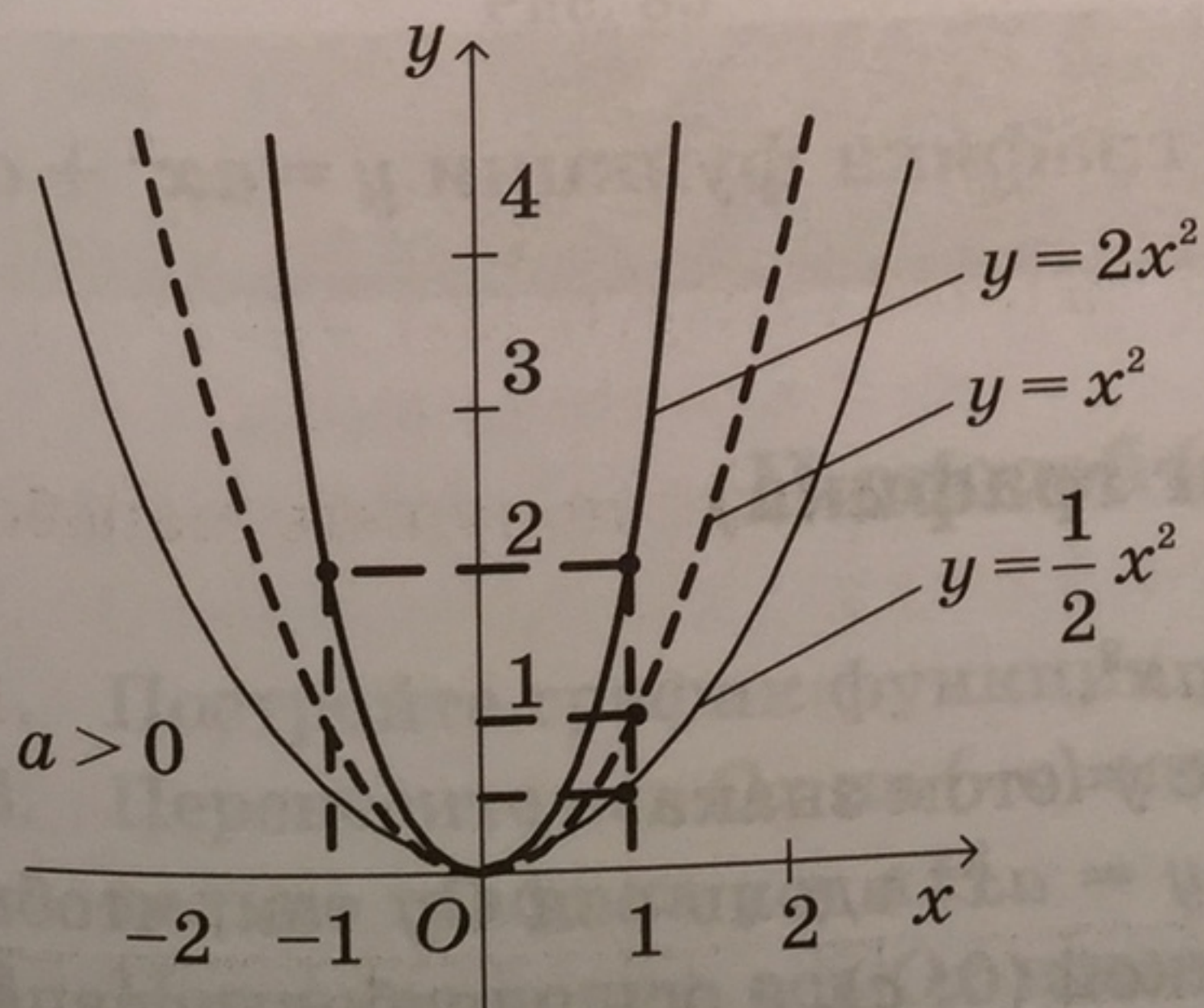


Рис. 82

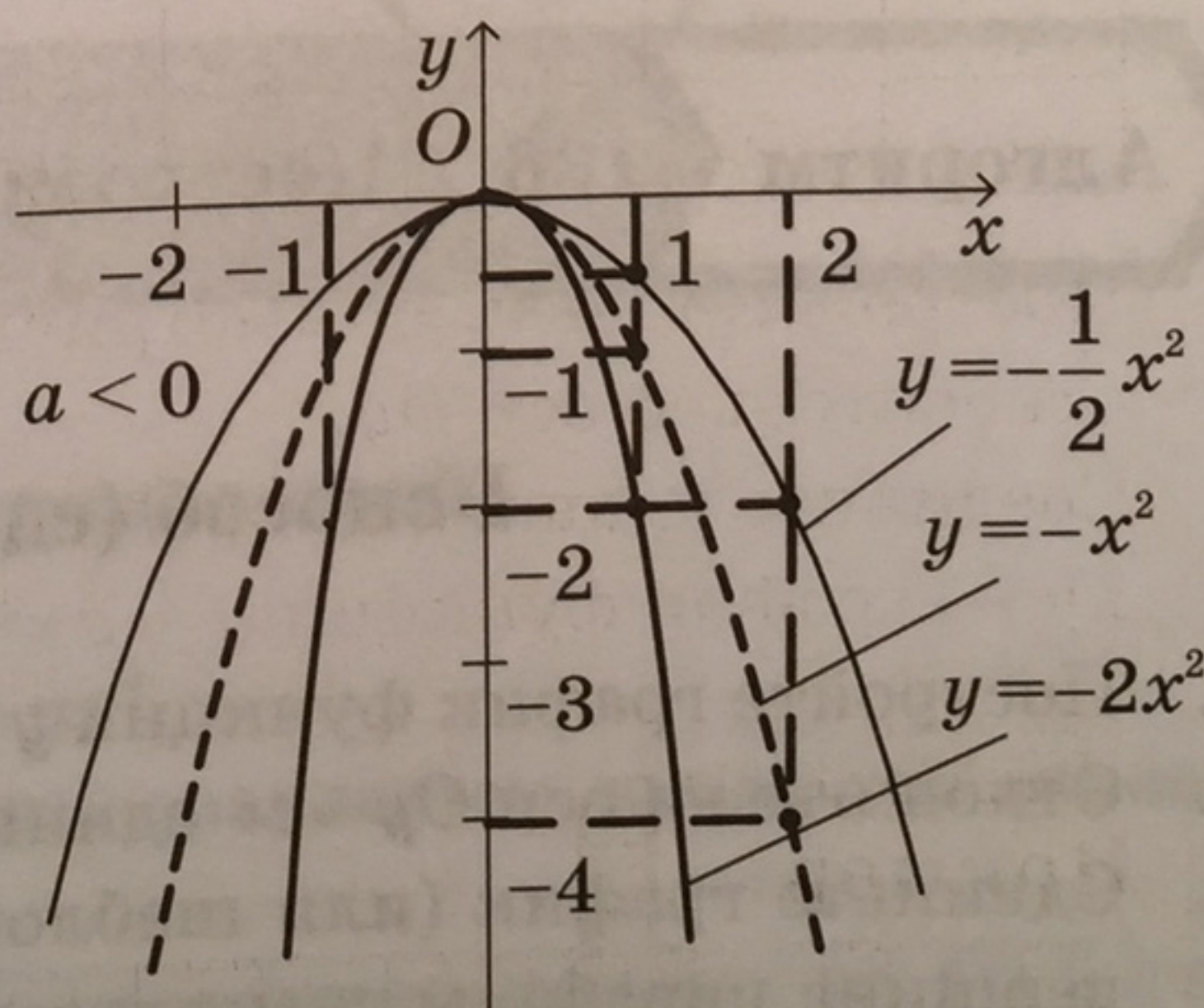


Рис. 83



**З а м е ч а н и е.** Графики функции ( $y = x^4$ ;  $y = x^6$ ; ...  $y = x^{2n}$ )  $n = 1; 2; 3; \dots$  имеют вид графика функции  $y = x^2$ . Чтобы построить схему графика  $y = x^{2n}$ , надо построить график функции  $y = x^2$ , и при  $|x| < 1$  график  $y = x^{2n}$  пройдет ниже графика  $y = x^2$ , а при  $|x| > 1$  график  $y = x^{2n}$  пройдет выше графика  $y = x^2$  (рис. 84).

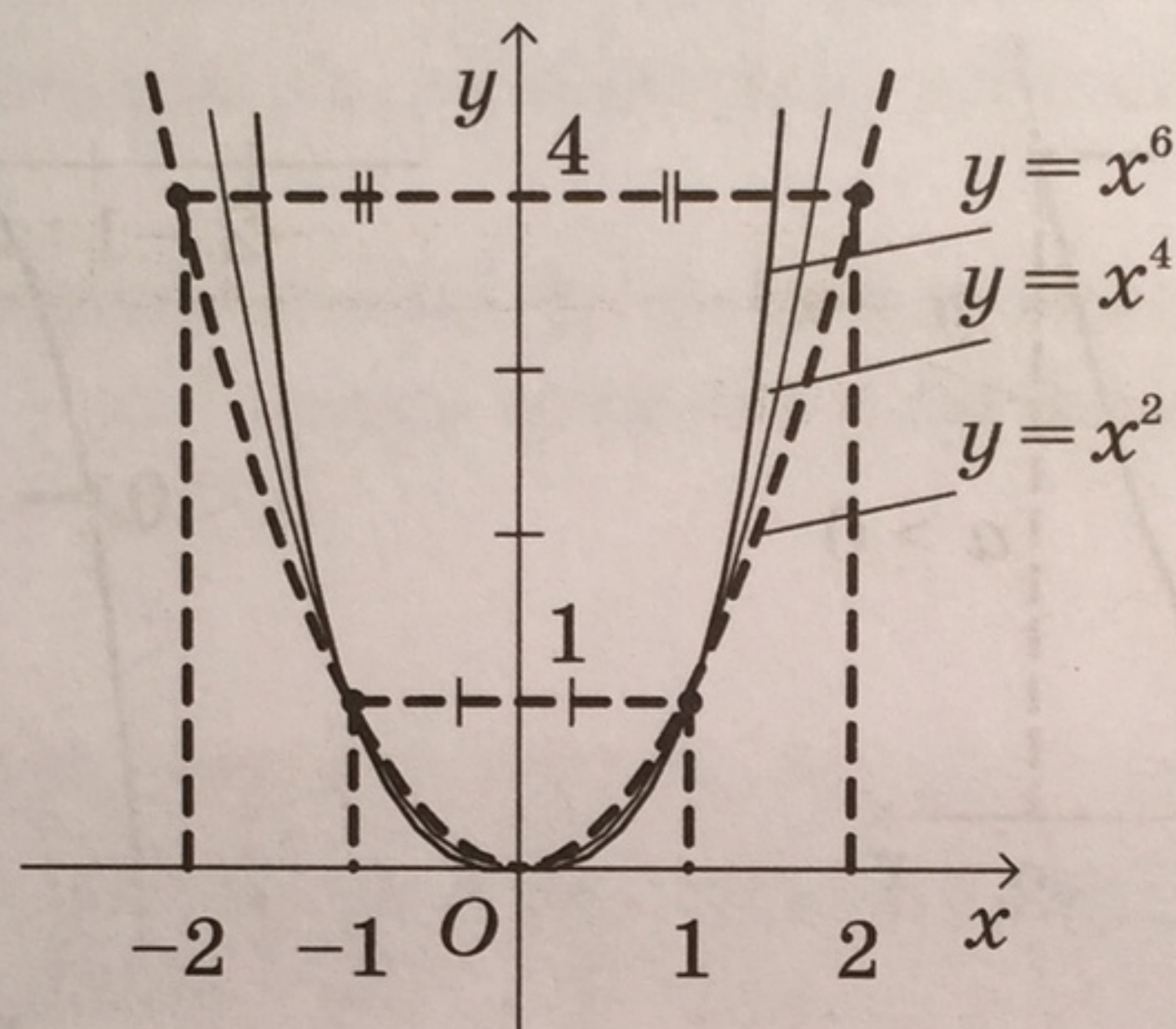


Рис. 84

**П о л е з н ы й с о в е т.** Для удобства построения графиков функций  $y = ax^2 + c$ ;  $y = a(x + b)^2$ ;  $y = a(x + b)^2 + c$  сделайте шаблон графиков:

$$y = x^2; y = 2x^2; y = \frac{1}{2}x^2; y = 3x^2; y = \frac{1}{3}x^2$$

**Алгоритм****136****Построение графика функции  $y = ax^2 + c$** **I способ (сдвиг графика)**

1. Постройте график функции  $y = ax^2$ .
2. Отложите на оси  $Oy$  « $c$ » единиц с учетом знака.
3. Сдвиньте график (или шаблон)  $y = ax^2$  вдоль оси  $Oy$  так, чтобы вершина параболы совпала с точкой  $(0; c)$ , а ось параболы совпала с осью  $Oy$ .



**З а м е ч а н и е.** Если нет шаблона графика, то при  $c < 0$  найдите корни уравнения  $ax^2 + c = 0$ ; получите три точки: вершину  $(0; c)$  и точки  $(x_1; 0)$  и  $(x_2; 0)$  на оси  $Ox$ , задайте еще значение  $(x_3; y_3)$  и симметричную ей точку относительно оси  $Oy$ .

### Примеры

Постройте график функции.

1.  $y = x^2 + 1$  (рис. 85)

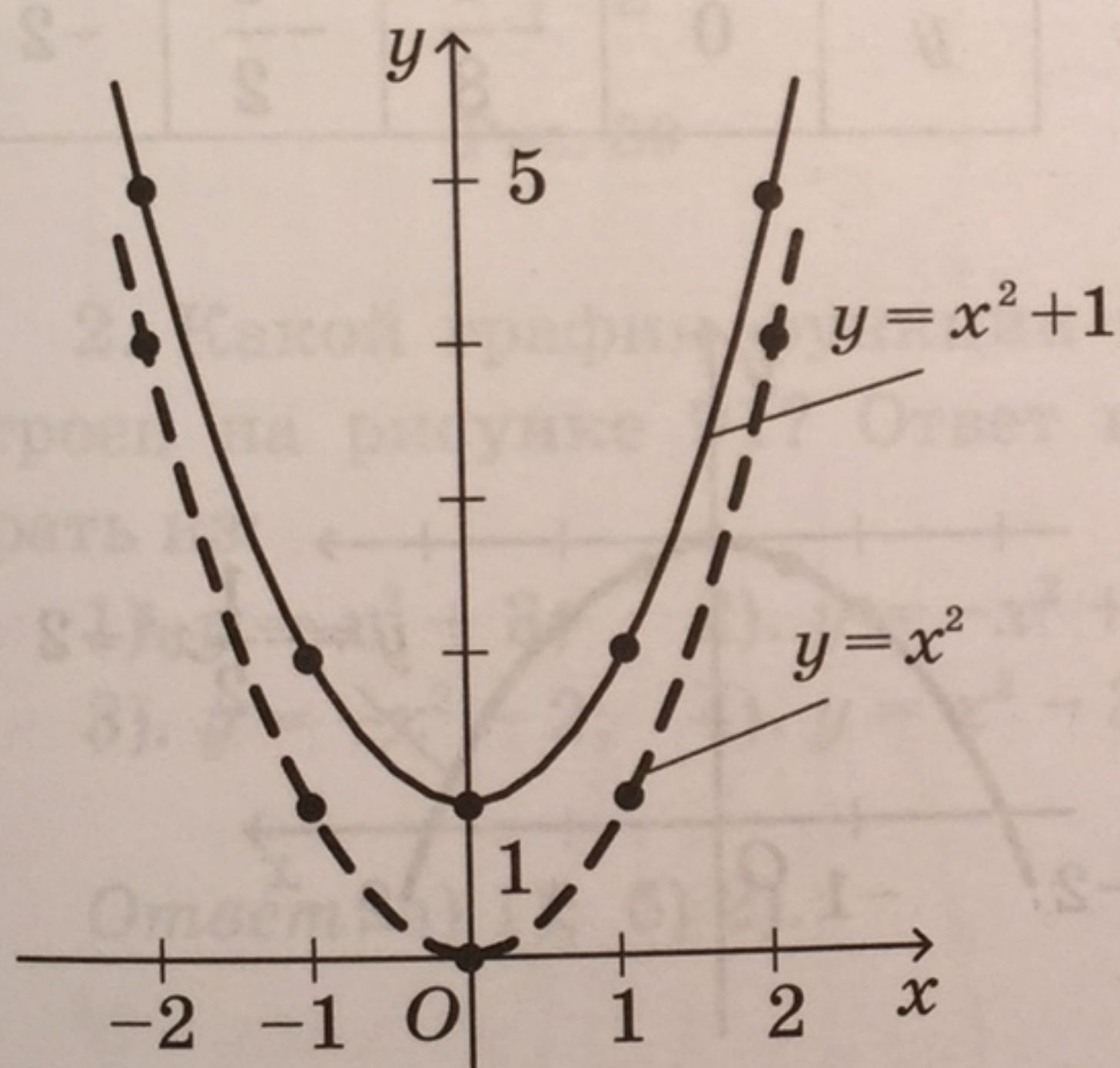


Рис. 85

2.  $y = x^2 - 4$  (рис. 86)

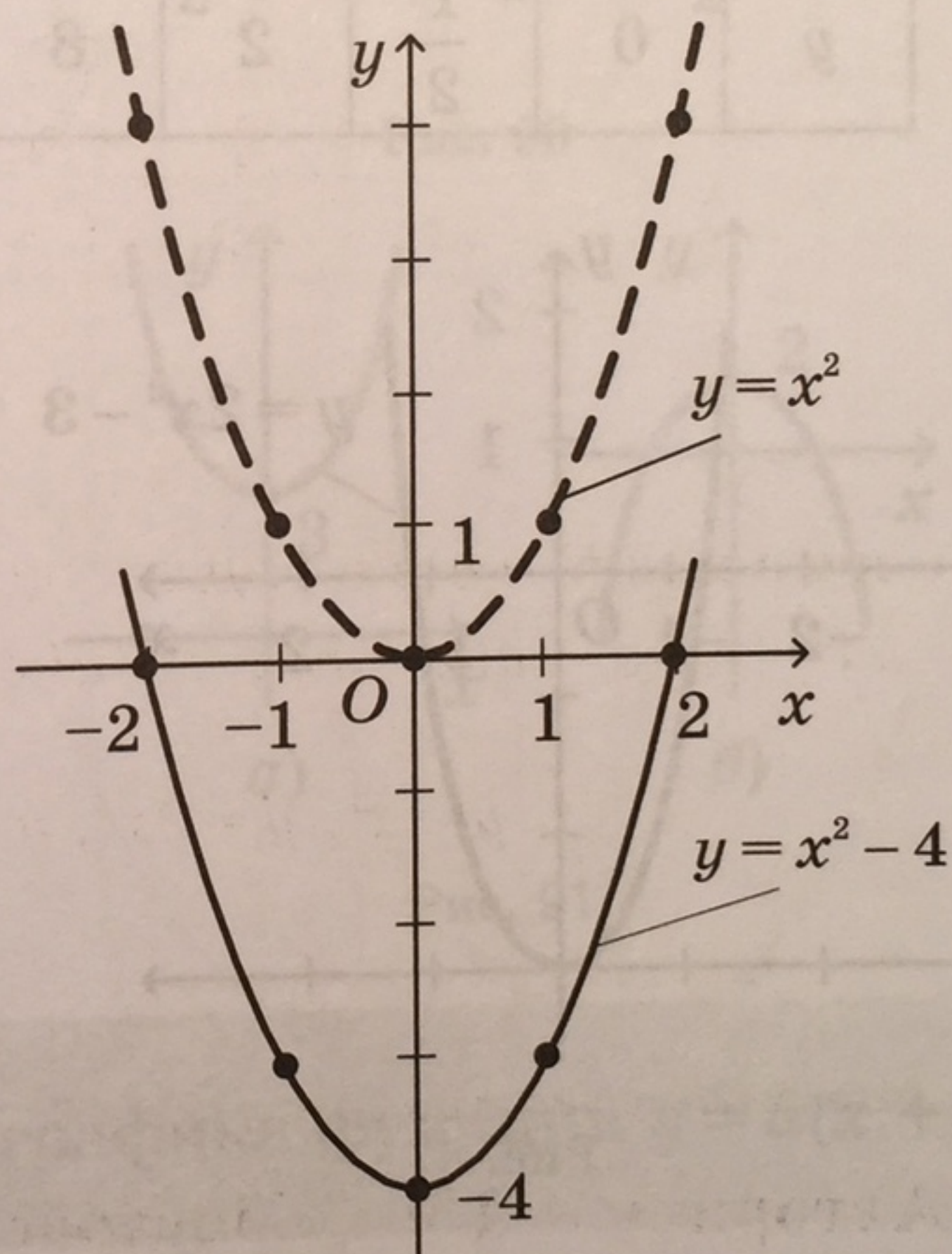


Рис. 86

### II способ (перенос осей)

1. Постройте график функции  $y = ax^2$ .
2. Перенесите ось  $Ox$  на  $(-c)$  единиц параллельно самой себе относительно графика  $y = ax^2$ .
3. Назовите новую ось  $Ox$  и начало координат (первую ось  $Ox$  и точку  $O(0; 0)$  не подписывайте).



## Примеры

Постройте график функции.

1.  $y = 2x^2 - 3$  (рис. 87)

1).  $y = 2x^2$

$x$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y$	0	$\frac{1}{2}$	2	8

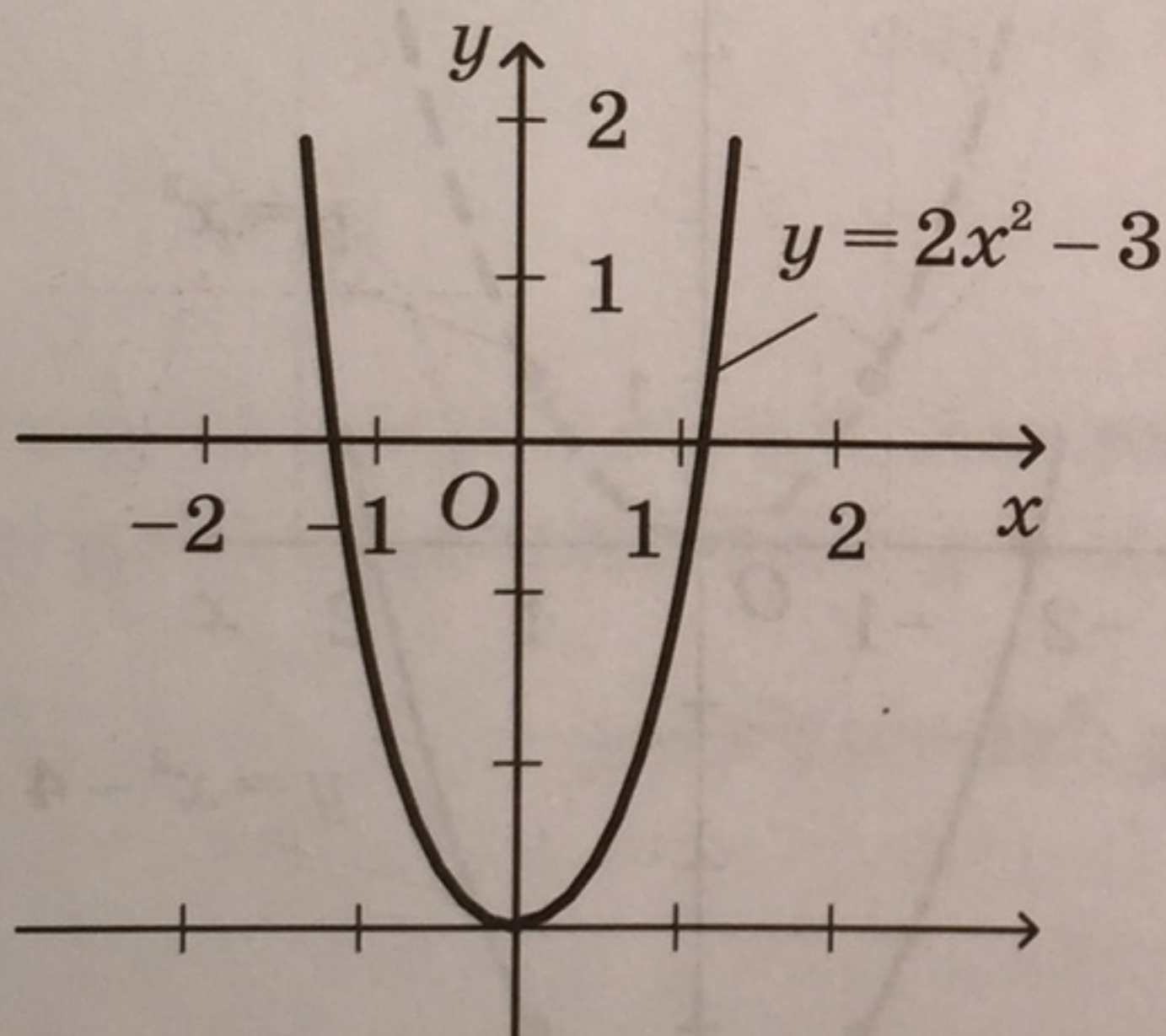


Рис. 87

2.  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$  (рис. 88)

1).  $y = -\frac{1}{2}x^2$

$x$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y$	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	-2

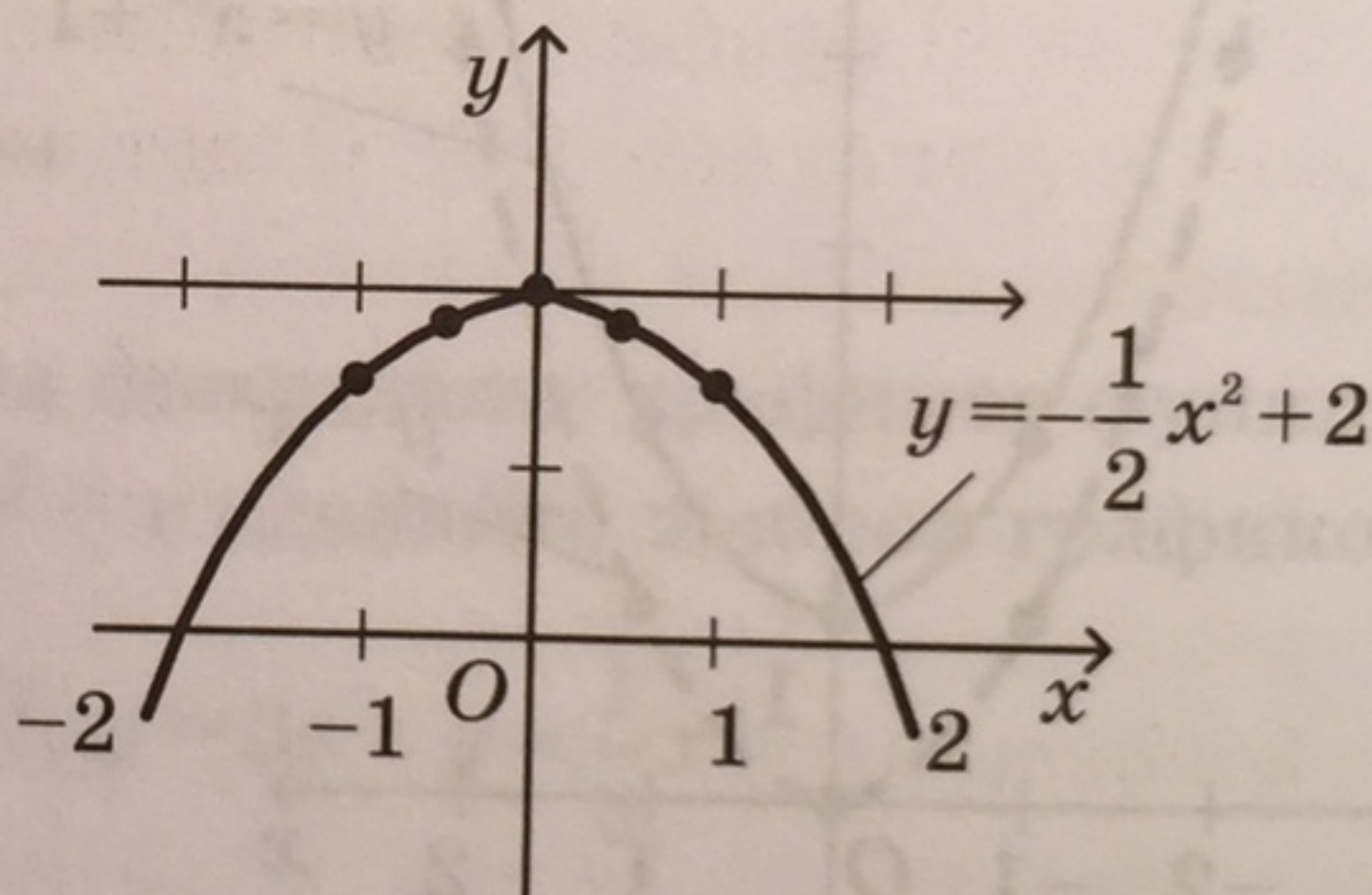


Рис. 88

2). Перенесите ось  $Ox$  на 3 единицы вверх.

3). Подпишите новую ось  $Ox$  и получите искомый график в новой системе  $xOy$ .

2). Перенесите ось  $Ox$  на 2 единицы вниз.

**Вывод.** Чтобы построить график функции  $y = ax^2 + c$ , надо или сдвинуть график  $y = ax^2$  на « $c$ » единиц вдоль оси  $Oy$ , или перенести ось  $Ox$  на « $-c$ » единиц относительно графика  $y = ax^2$ ; если нет шаблона, то удобнее II способ.



## Проверь себя!

1. Постройте график функции  $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$  двумя способами и сравните построенные графики.

Ответ: рис. 89, 90.

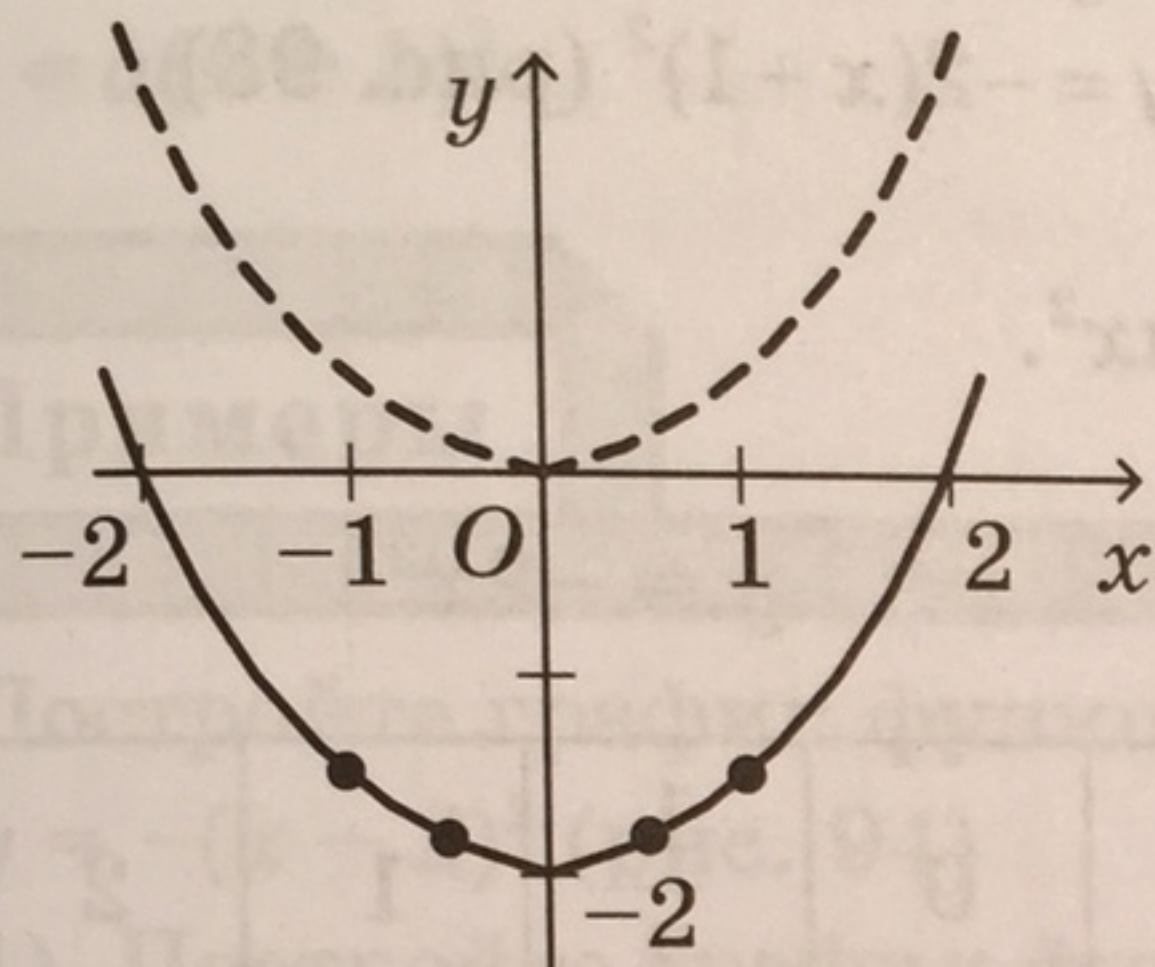


Рис. 89

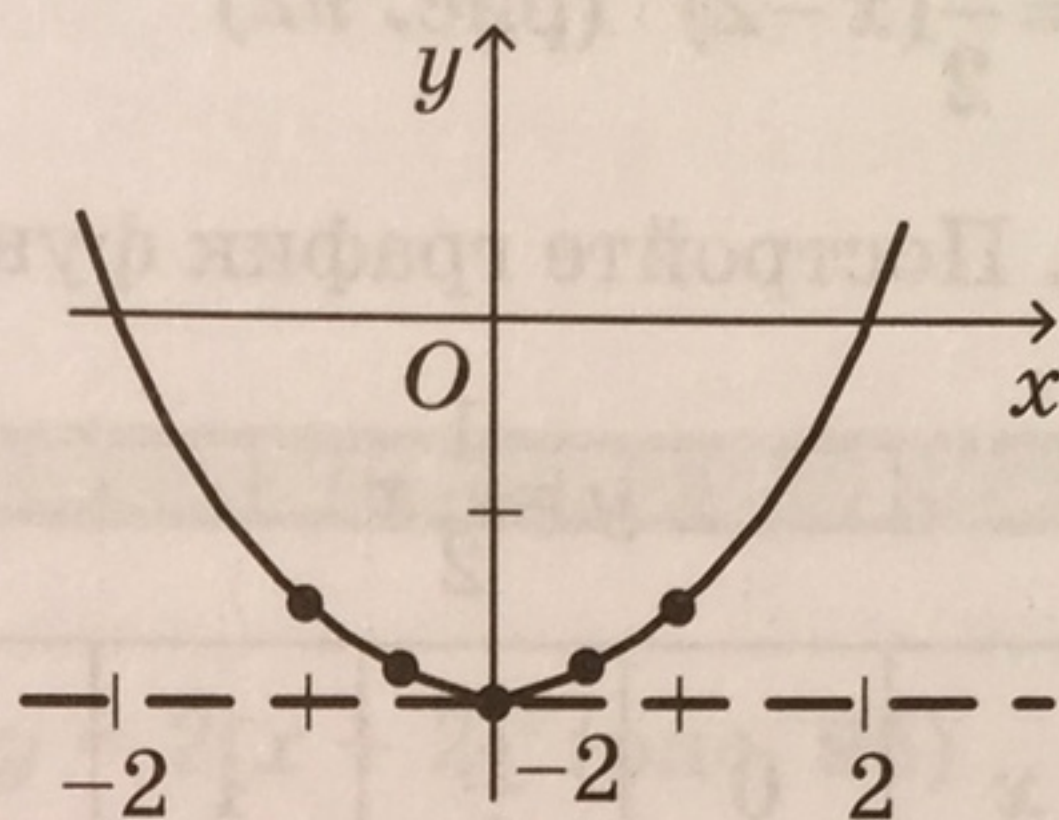


Рис. 90

2. Какой график функции построен на рисунке 91? Ответ выбрать из:

- 1).  $y = x^2 + 3$ ; 2).  $y = -x^2 + 2$ ;  
3).  $y = -x^2 - 2$ ; 4).  $y = x^2 - 3$

Ответ: а) 1); б) 2).

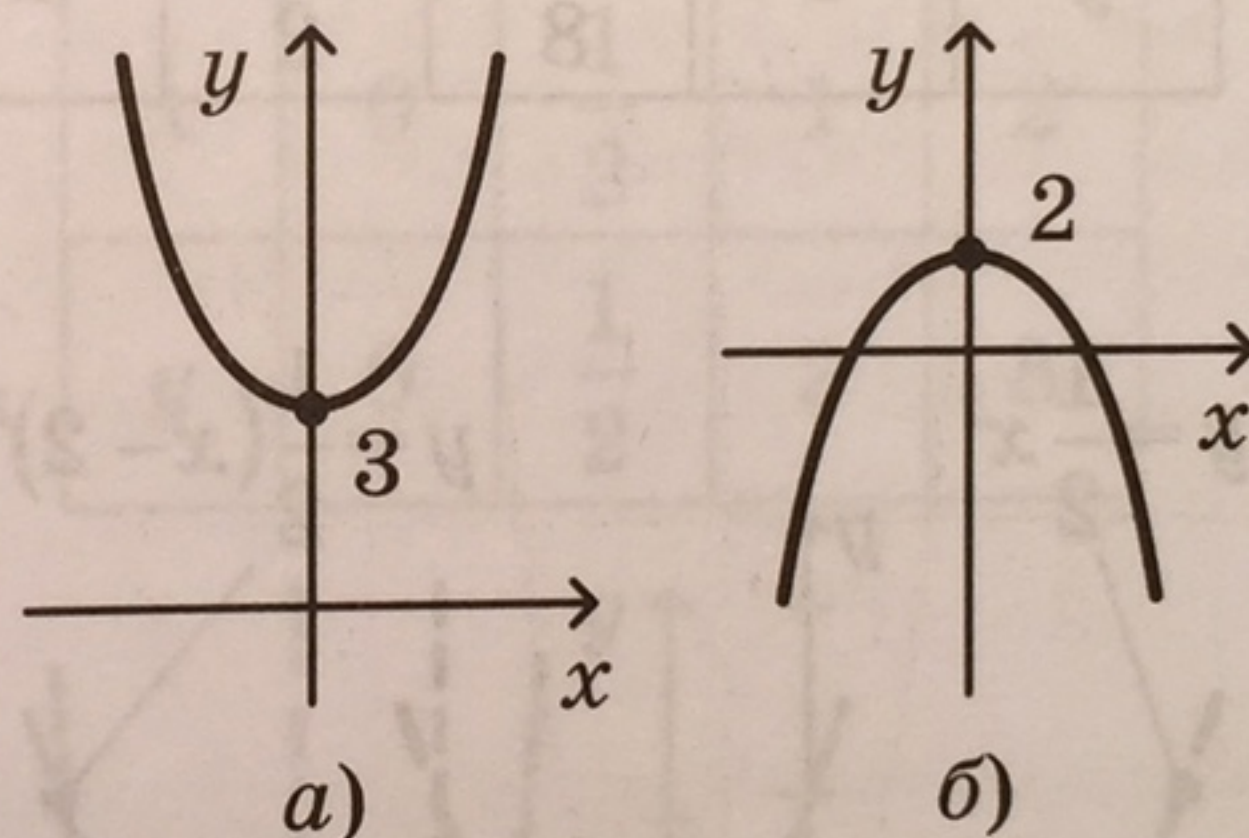


Рис. 91

Алгоритм

137

Построение графика функции  $y = a(x + b)^2$

### I способ

1. Постройте график функции  $y = ax^2$ .
2. Отложите на оси  $Ox$   $(-b)$  единиц.
3. Постройте перпендикуляр к оси  $Ox$  в точке  $(-b; 0)$ .
4. Сдвиньте график (шаблон)  $y = ax^2$  на  $(-b)$  вдоль оси  $Ox$  так, чтобы вершина параболы совпала с точкой  $(-b; 0)$ , а ось симметрии параболы с перпендикуляром к оси  $Ox$  (п. 3), получите график функции  $y = a(x + b)^2$ .



## Примеры

Постройте график функции.

1.  $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$  (рис. 92)

2.  $y = -2(x+1)^2$  (рис. 93)

1). Постройте график функции  $y = ax^2$ .

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

$x$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	2

$$y = -2x^2$$

$x$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	-8

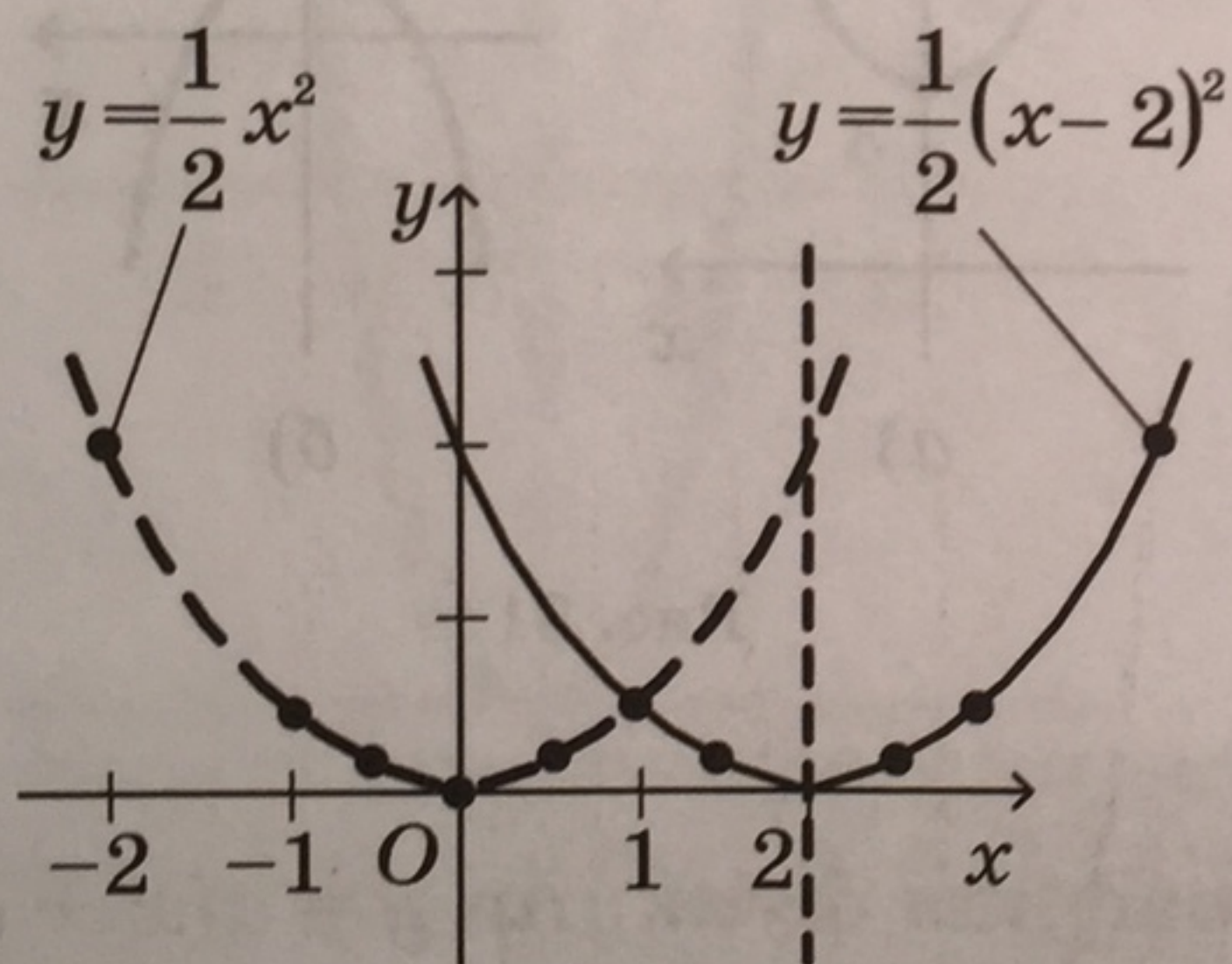


Рис. 92

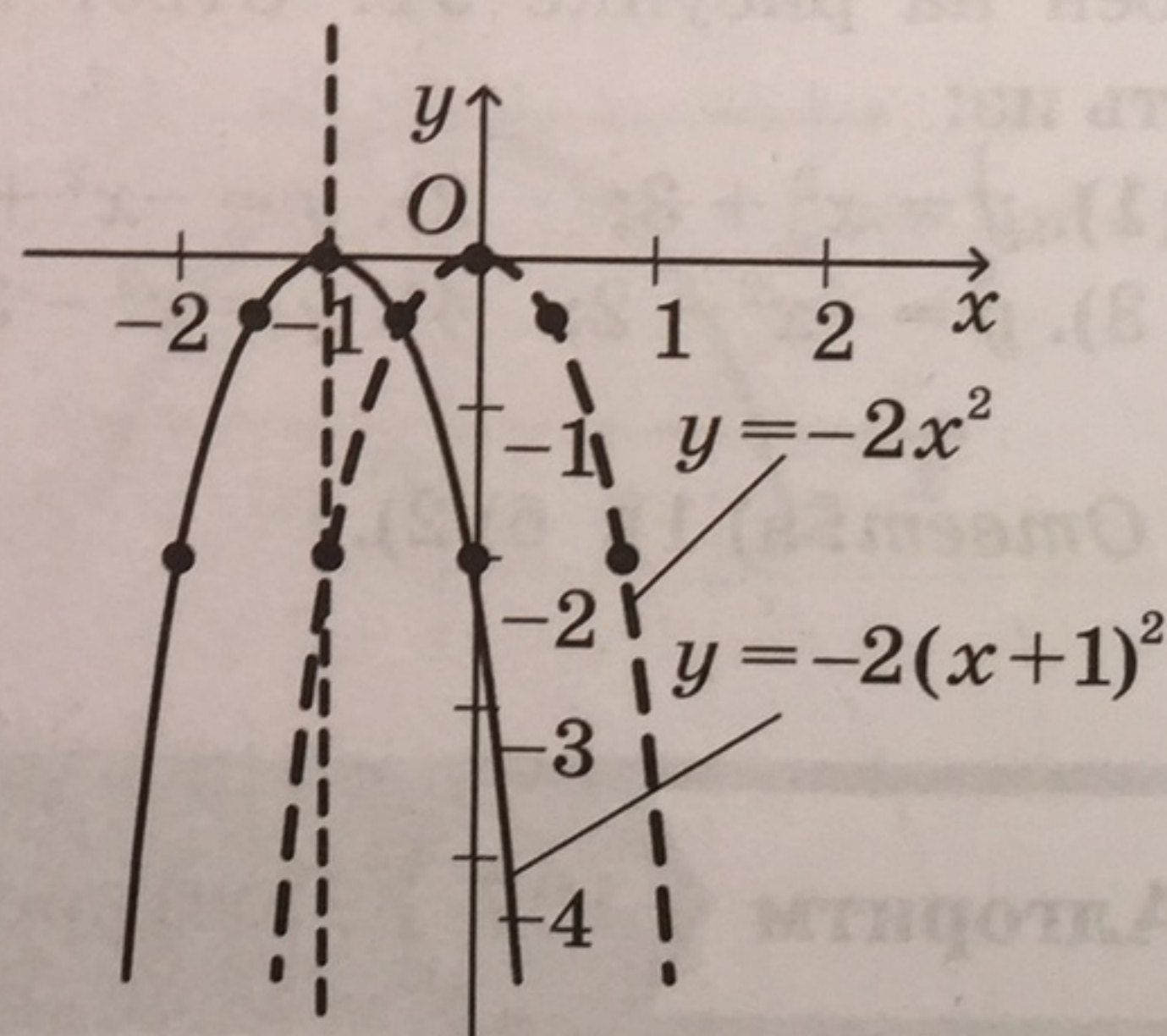


Рис. 93

2).  $b = -2$ ;  $-b = 2$

3). Через точку  $(2; 0)$  перпендикуляр к оси (ось симметрии графика).

4). Сдвиг графика (шаблона) на 2 единицы вправо.

2).  $b = 1$ ;  $-b = -1$

3). Через точку  $(-1; 0)$  перпендикуляр к оси (ось симметрии графика).

4). Сдвиг графика (шаблона) на 1 единицу влево.



## II способ (перенос осей)

1. Постройте график функции  $y = ax^2$ .
2. Перенесите ось  $Oy$  на « $b$ » единиц параллельно самой себе.
3. Назовите новую ось  $Oy$  и начало координат, получите график  $y = a(x + b)^2$ .

## Примеры

Постройте график функции.

1.  $y = -(x - 2)^2$  (рис. 94)
2.  $y = 2(x + 2)^2$  (рис. 95)

1). Постройте график функции  $y = ax^2$ .

$$y = -x^2$$

$x$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-4

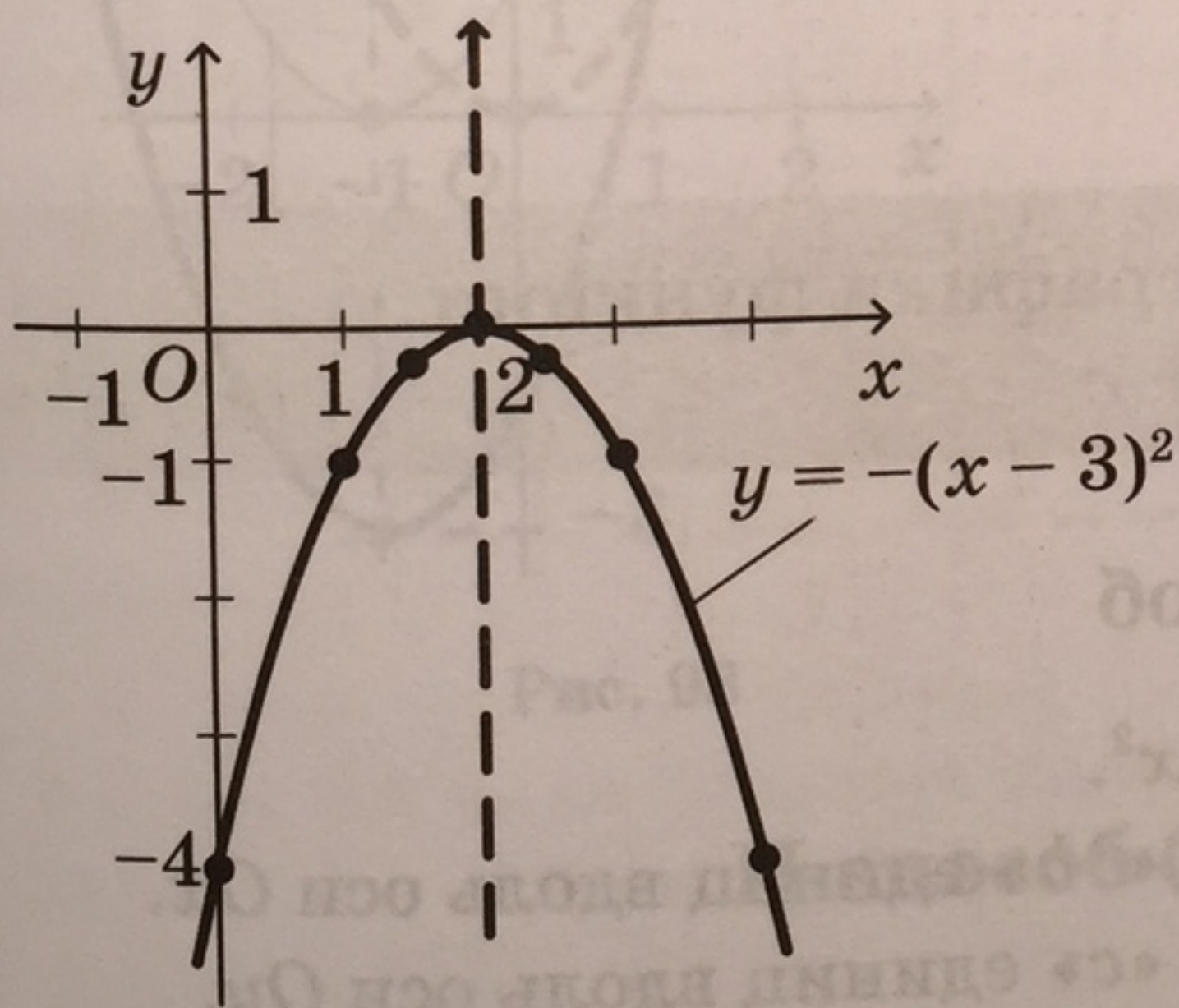


Рис. 94

$$y = 2x^2$$

$x$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y$	0	$\frac{1}{2}$	2	8

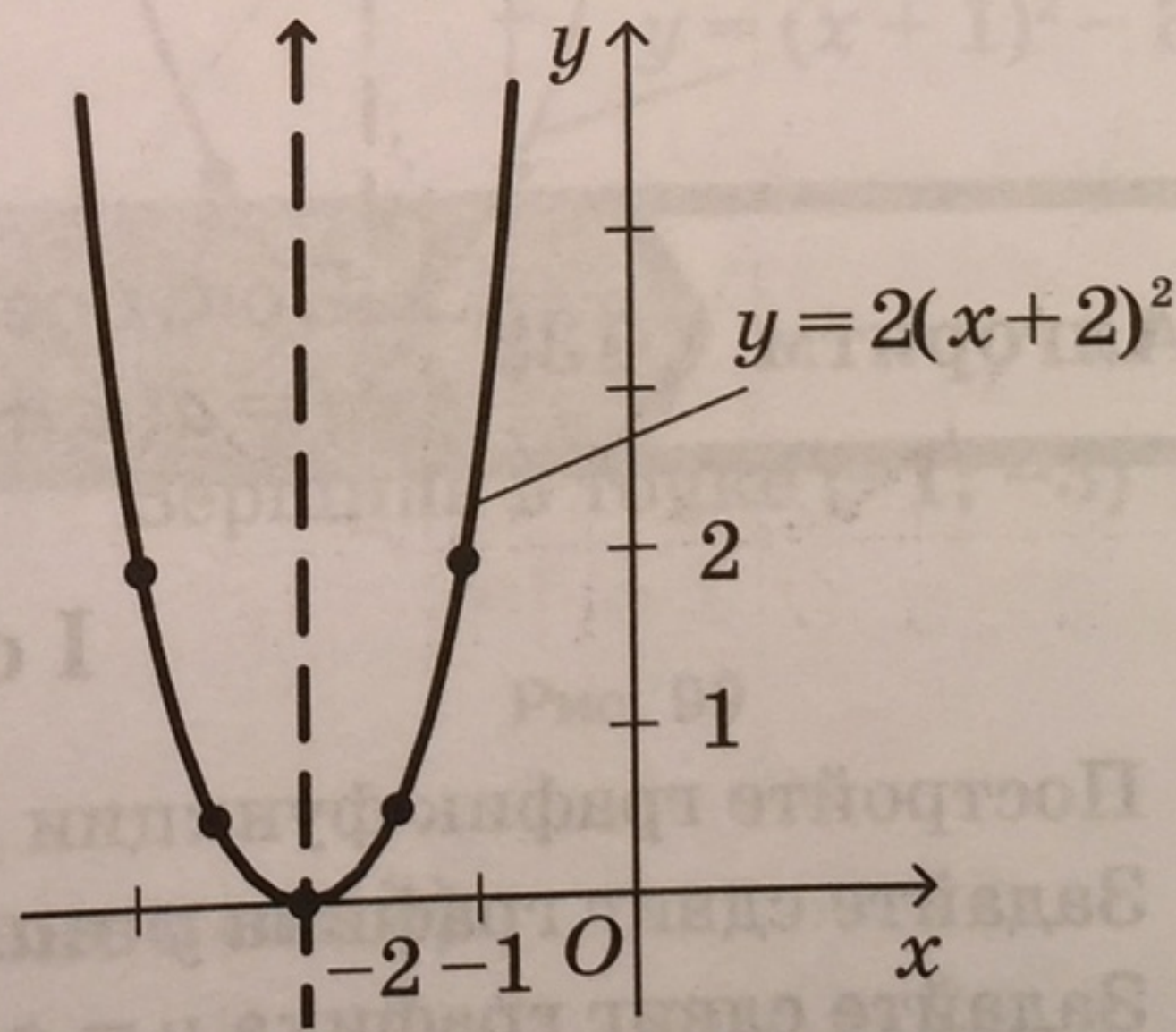


Рис. 95

2).  $b = -2$ , перенесите ось  $Oy$  на  $(-2)$  единицы влево.

2).  $b = 2$ , перенесите ось  $Oy$  на 2 единицы вправо.

3). Назовите график в новой системе координат.

3. Задача. Задайте формулой квадратичную функцию, график которой изображен на рисунке 96: 1).  $y = x^2 + 3$ ; 2).  $y = (x + 3)^2$ ; 3).  $y = -(x - 3)^2$ ; 4).  $y = (x - 3)^2$



Решение.

- 1). По графику видно, что вершина в точке  $(3; 0)$ , значит,  $x = +3$ .
- 2).  $a > 0$ , ветви направлены вверх, график сдвинут на  $-b$  на  $+3$  вправо.

Ответ: 4).  $y = (x - 3)^2$ .

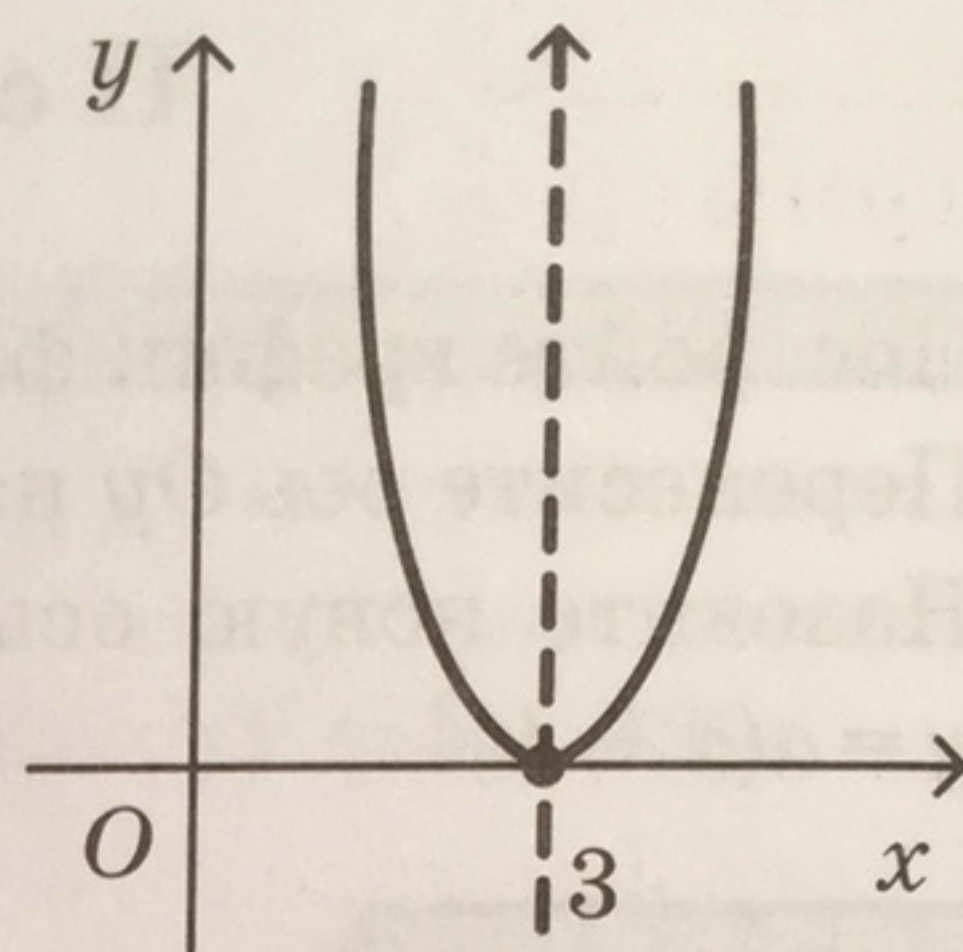


Рис. 96

4. Постройте график функции  $y = 2(x + 3)^2$ .

Ответ: рисунок 97.

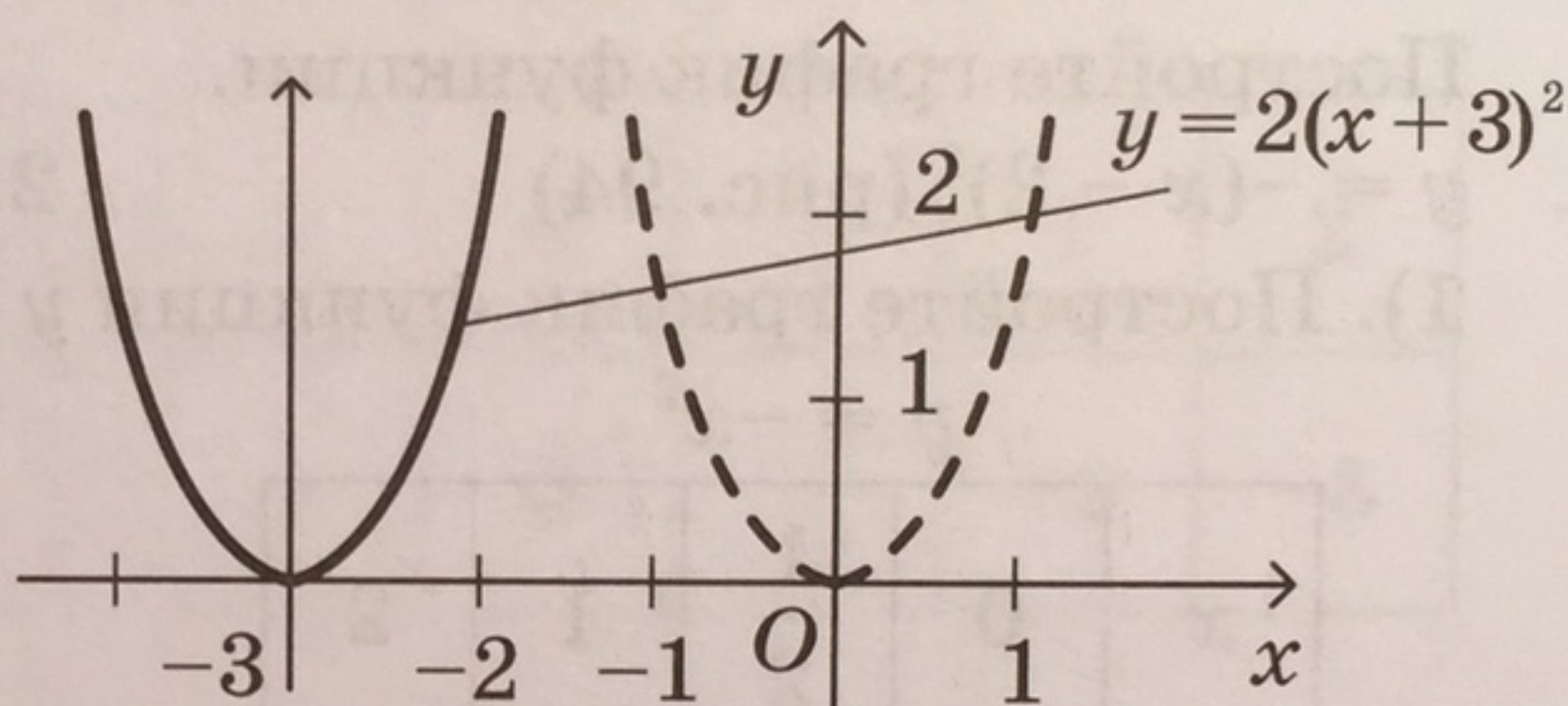


Рис. 97

**Полезный совет.** График и ось переносятся в противоположных направлениях при применении I и II способов построения.

Алгоритм

138

Построение графика функции  
 $y = a(x + b)^2 + c$

### I способ

1. Постройте график функции  $y = ax^2$ .
2. Задайте сдвиг графика  $y = ax^2$  на « $-b$ » единиц вдоль оси  $Ox$ .
3. Задайте сдвиг графика  $y = ax^2$  на « $c$ » единиц вдоль оси  $Oy$ .
4. Подпишите полученный график.

**Полезный совет.** При сдвиге графика параллельно осям вершина графика получит координаты  $(-b; c)$ , поэтому можно сразу по функции  $y = (x + 1)^2 - 3$  строить точку  $(-b; c)$ , провести ось симметрии  $x = -b$  и построить график  $y = ax^2$  с вершиной в точке (удобно обвести шаблон).



## Пример

Постройте график функции  $y = (x + 1)^2 - 3$ .

Построение по алгоритму  
(рис. 98)

1. Постройте график функции  $y = ax^2$ .
2. Задайте сдвиг графика  $y = ax^2$  на  $-1$  вдоль оси  $Ox$  (влево).
3. Задайте сдвиг графика  $y = ax^2$  на 3 единицы вниз вдоль оси  $Oy$ .
4. Подпишите полученный график.

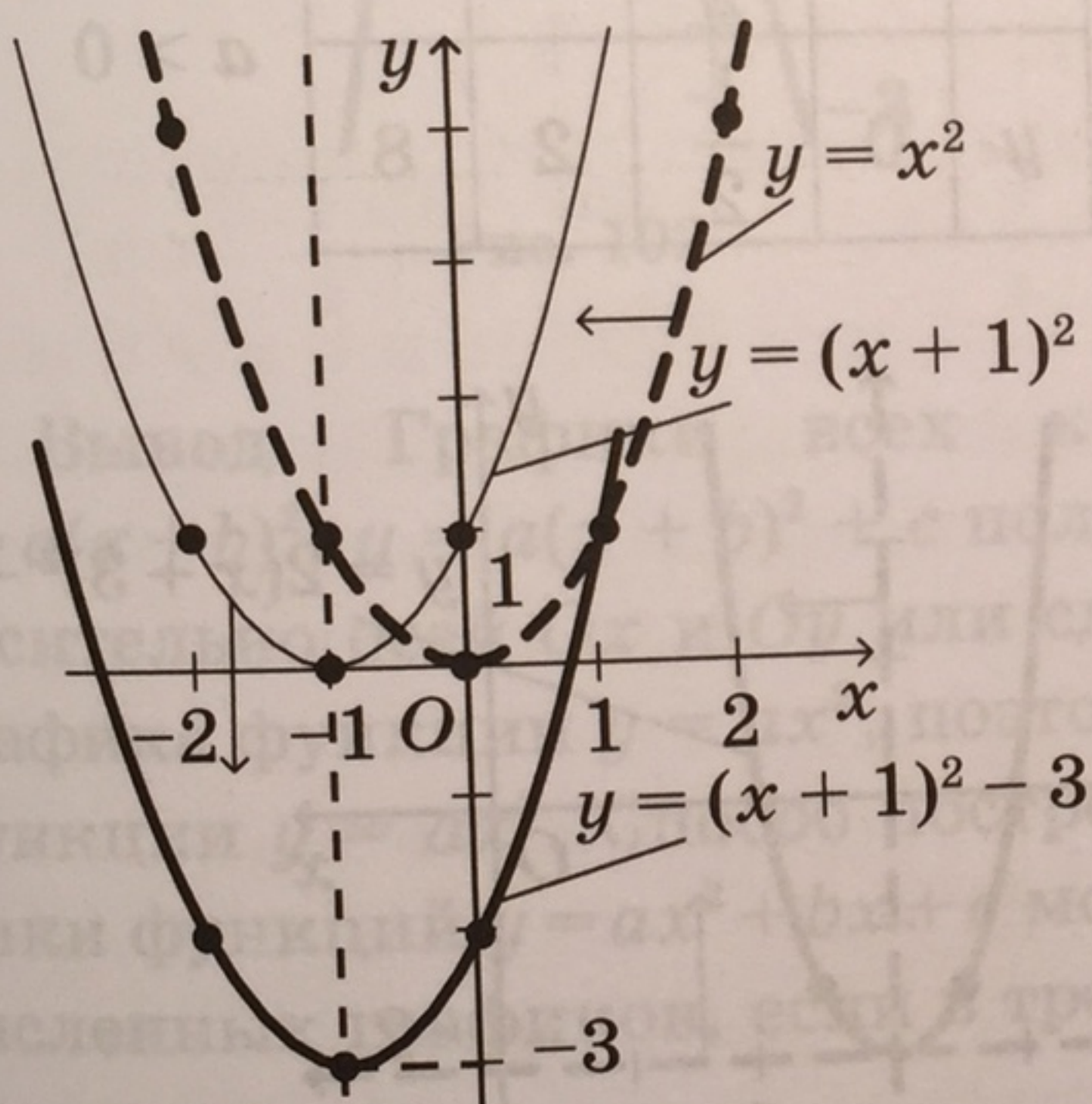
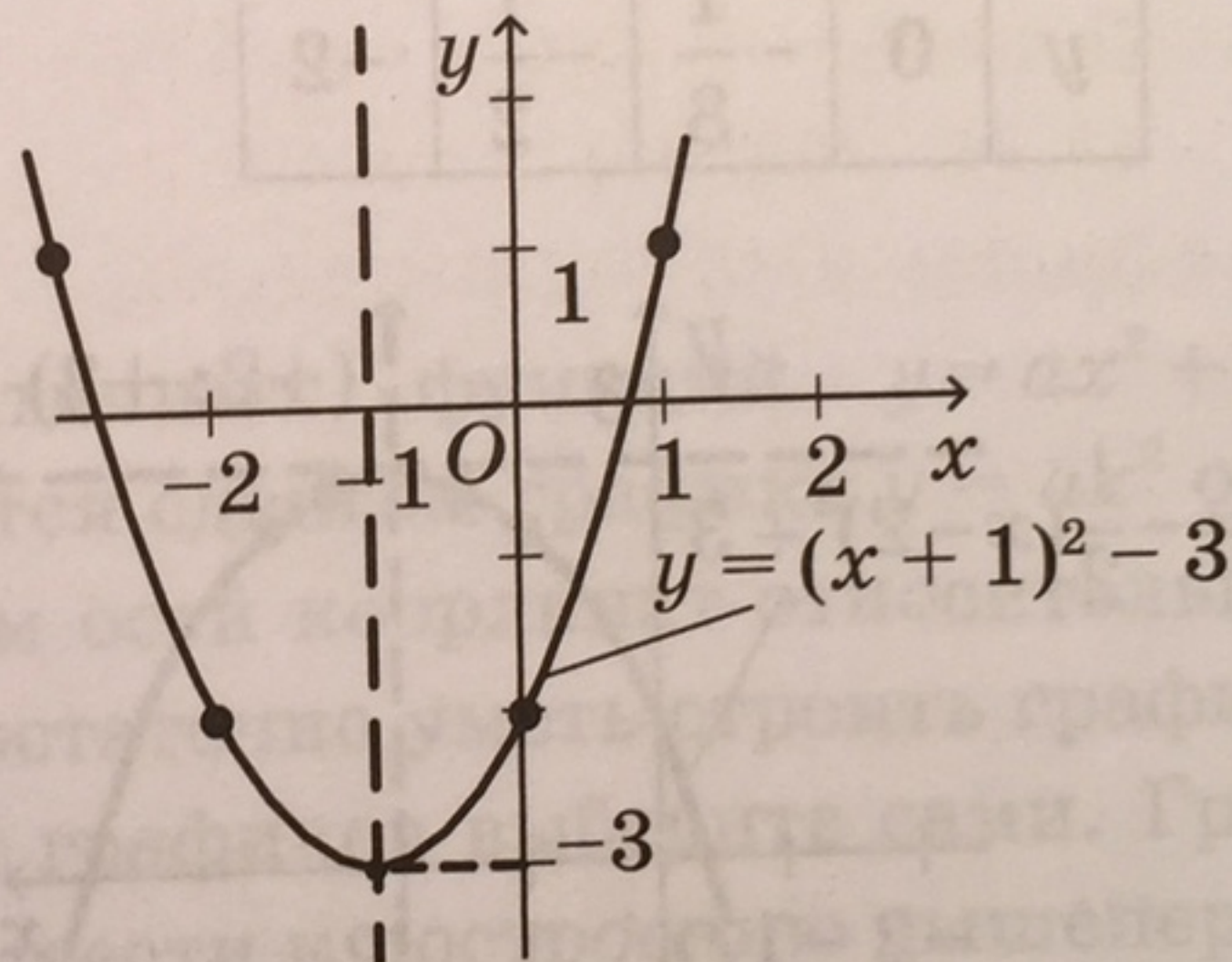


Рис. 98

Построение с помощью полезного совета (рис. 99)

1. Найдите вершину параболы
 

$y = (x + b)^2 + c$
$x_0 = -b = -1$
$c = -3$
$-b = -1$
$c = -3$
$A(-1; -3)$
2. Проведите ось  $x = -1$ .
3. Обведите шаблон  $y = x^2$ .



Вершина в точке  $(-1; -3)$

Рис. 99

## II способ (перенос осей)

1. Постройте график функции  $y = ax^2$  (оси и начало координат не подписывайте).
2. При переносе оси  $Ox$  на  $(-c)$  единиц, а оси  $Oy$  на  $(b)$  единиц новое начало координат попадет в точку  $(b; -c)$  — точку пересечения новых осей.
3. Назовите оси  $Ox$ ,  $Oy$  и точку  $(b; -c)$   $O(0; 0)$ . Получите искомый график  $y = a(x + b)^2 + c$  в новой системе координат.



## Примеры

Постройте график функции.

1.  $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$  (рис. 100)

2.  $y = 2(x+3)^2 - 2$  (рис. 101)

1). Постройте график функции  $y = ax^2$ .

$$y = -\frac{1}{2}x^2$$

$x$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y$	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	-2

$a < 0$

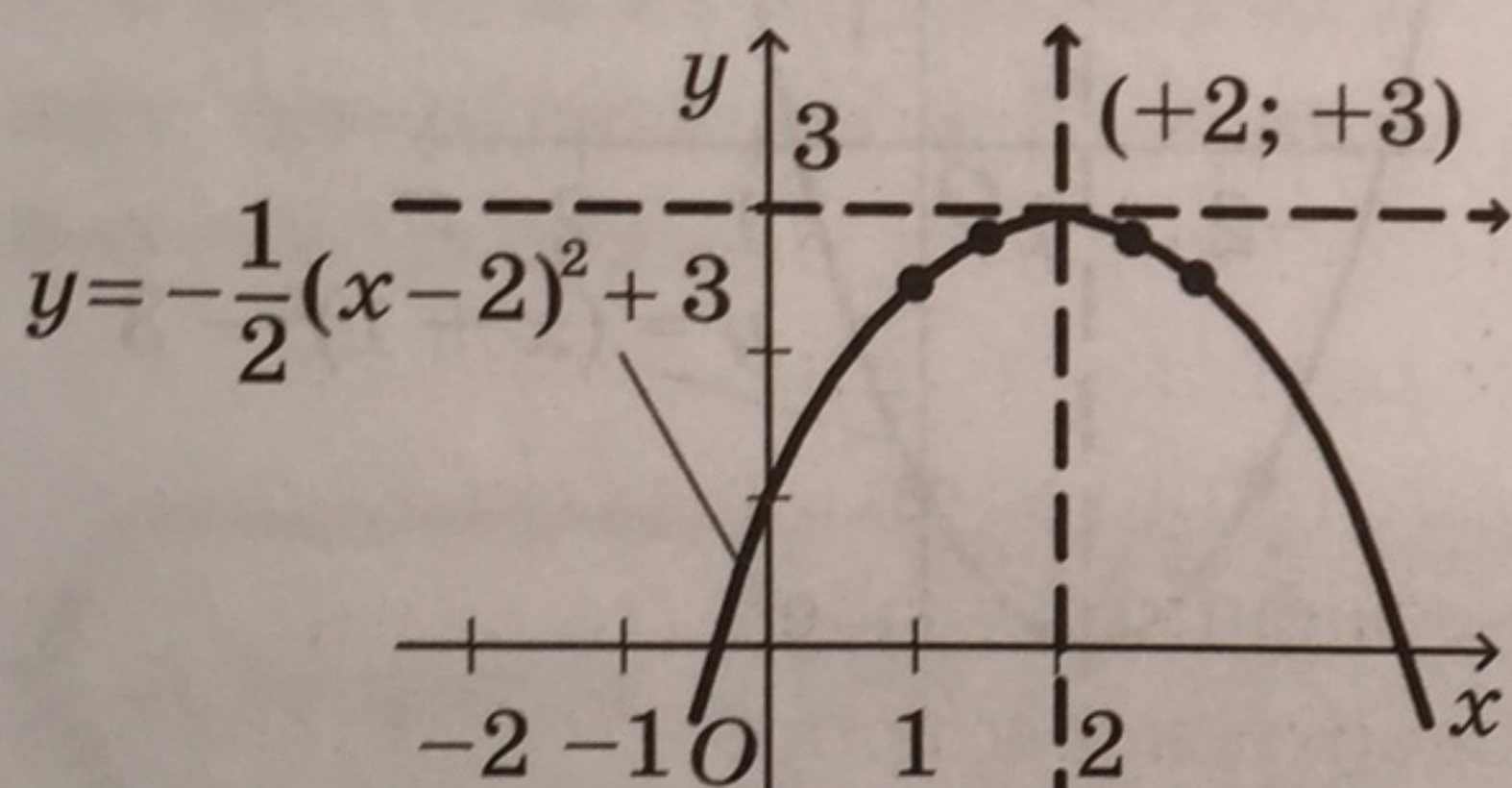


Рис. 100

$$y = 2x^2$$

$x$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y$	0	$\frac{1}{2}$	2	8

$a > 0$

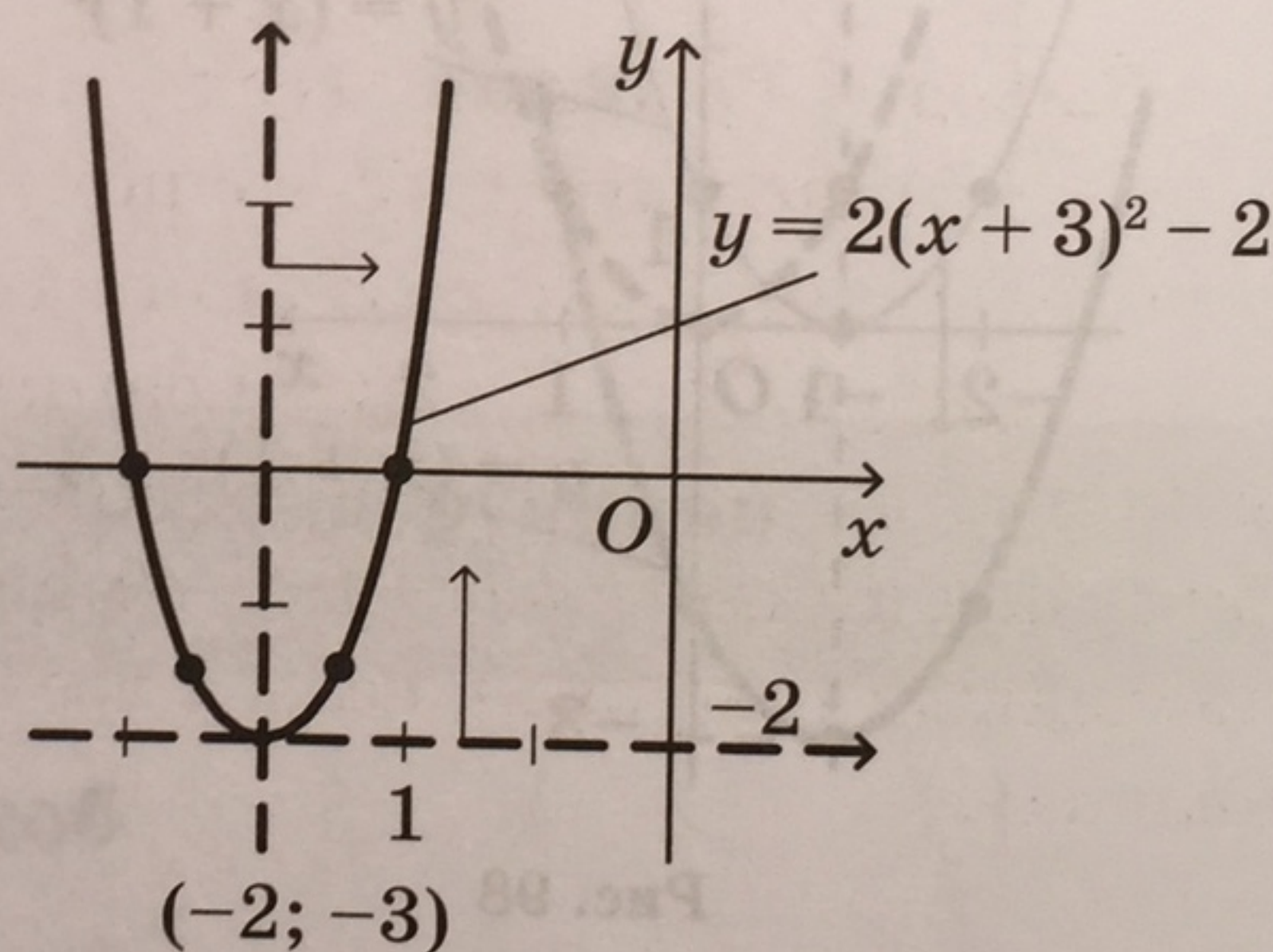


Рис. 101

2).  $b = -2; c = 3$

Точка  $(-2; -3)$  — новое начало координат  $(b; -c)$

3). График  $y = -\frac{1}{2}x^2$  в новой

системе координат и будет искомым графиком

$$y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$$

2).  $b = 3; c = -2$

Точка  $(3; 2)$  — новое начало координат  $(b; -c)$

3). График функции  $y = 2x^2$  в новой системе координат и будет искомым графиком

$$y = 2(x+3)^2 - 2$$



## Проверь себя!

1. Постройте график функции  $y = 2(x - 4)^2 + 5$  переносом осей.  
 Ответ: новое начало координат  $(-4; -5)$ , вершина  $(4; 5)$ .

2. Задайте формулой квадратичную функцию, график которой изображен на рисунке 102.

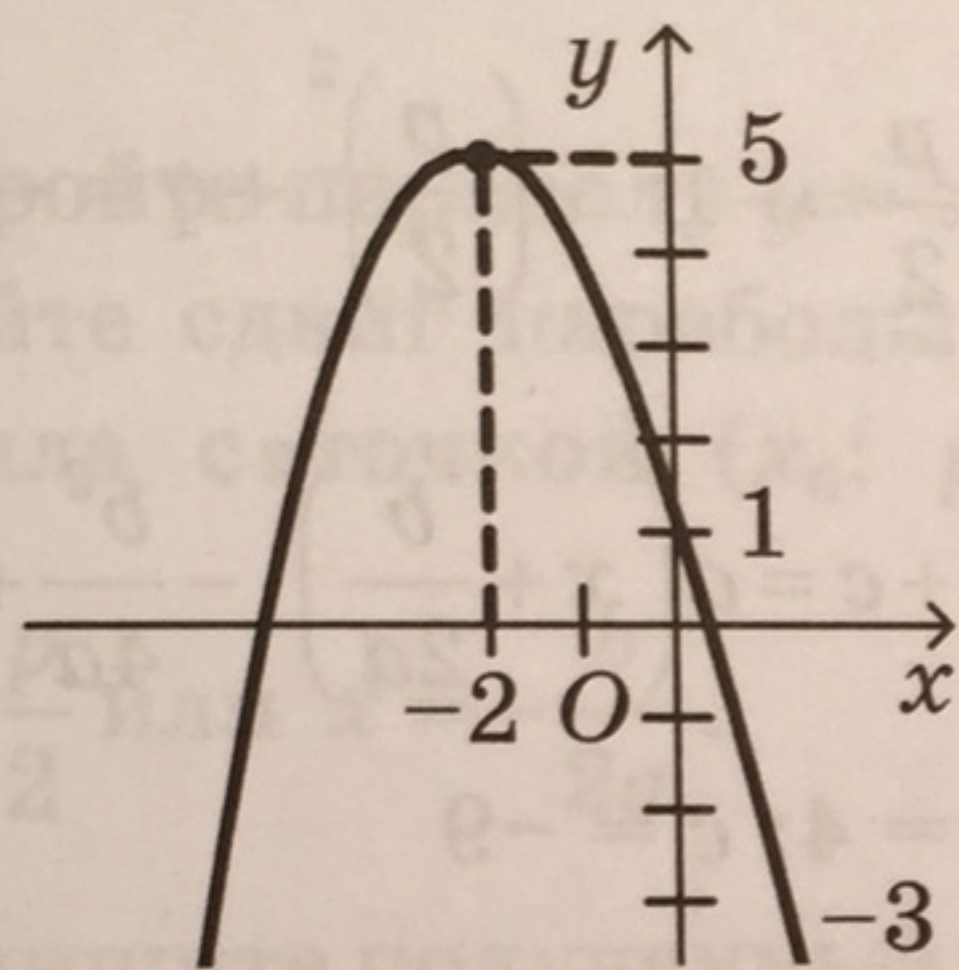


Рис. 102

1).  $y = -x^2 + 4x + 1$

2).  $y = -x^2 + 4x + 5$

3).  $y = -x^2 - 4x + 1$

4).  $y = -x^2 - 4x + 5$

Ответ: 4).

**Вывод.** Графики всех квадратичных функций  $y = ax^2 + c$ ;  $y = a(x + b)^2$ ;  $y = a(x + b)^2 + c$  получаются сдвигом графика  $y = ax^2$  относительно осей  $Ox$  и  $Oy$  или сдвигом осей координат относительно графика функции  $y = ax^2$ , поэтому достаточно уметь строить график функции  $y = ax^2$ . Способ построения графиков выберите сами. Графики функций  $y = ax^2 + bx + c$  можно свести к построению вышеперечисленных графиков, если в трехчлене  $ax^2 + bx + c$  выделить полный квадрат.

**У к а з а н и е.** Выделение полного квадрата в трехчленах  $x^2 + px + q$  и  $ax^2 + bx + c$  дано подробно в алгоритме 82. Напомним:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$\text{или } ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$$

$$-\frac{b}{4a} + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{D}{4a}$$



## Примеры

Выделите полный квадрат в трехчлене.

1.  $x^2 - 2x + 5$

$$x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 4$$

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$

$$p = -2; \frac{p}{2} = -1; -\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = -1 + 5 = 4$$

2.  $2x^2 + 4x - 9$

$$2x^2 + 4x - 9 = 2(x + 1)^2 - 11$$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$a = 2; b = 4; c = -9$$

Ответ:

1).  $(x - 1)^2 + 4$

2).  $2(x + 1)^2 - 11$

$$\frac{b}{2a} = \frac{4}{4} = 1; \frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{16 + 72}{8} = 11$$

## Проверь себя!

Выделите полный квадрат в трехчлене.

1.  $x^2 - 4x + 3$ ; 2.  $-2x^2 + 4x - 3$

Ответ: 1).  $(x - 2)^2 - 1$ ; 2).  $-2(x - 1)^2 - 1$ .

## Алгоритм

139

Построение графиков функций  $y = x^2 + px + q$  и  $y = ax^2 + bx + c$  выделением полного квадрата

1. Выделите полный квадрат в трехчлене

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \quad (\text{I})$$

или в трехчлене

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \quad (\text{II})$$



2. Найдите координаты вершин параболы и постройте точку  $(x_0; y_0)$ :

1)  $x_0 = -\frac{p}{2}; y_0 = -\frac{p^2 - 4q}{4}$  или найдите  $y_0 = f(x_0)$  (I)

2)  $x_0 = -\frac{b}{2a}; y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$  или вычислите  $y_0 = f(x_0)$  (II)

3. Проведите ось симметрии:  $x = -\frac{p}{2}$  (I) или  $x = -\frac{b}{2a}$  (II).

4. Постройте параболу  $y = x^2$  (I) или  $y = ax^2$  (II).

5. Задайте сдвиг параболы  $y = x^2$  или  $y = ax^2$ , чтобы ее вершина совпала с точкой  $(x_0; y_0)$  и ось симметрии параболы с осью

$$x = -\frac{p}{2} \text{ или } x = -\frac{b}{2a}.$$

6. Подпишите полученный график:  $y = x^2 + px + q$  или  $y = ax^2 + bx + c$ .

**З а м е ч а н и е.** Если есть шаблон  $y = x^2$  или  $y = ax^2$ , то совместите вершину шаблона с вершиной параболы и ось параболы с осью симметрии, проходящую через  $x = x_0$ ; получите искомый график.

**П о л е з н ы й с о в е т.** Постройте график  $y = x^2$  или  $y = ax^2$ , найдите новое начало координат  $\left(\frac{p}{2}; \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right)$  или  $\left(\frac{b}{2a}; \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$  и постройте новые оси относительно графика  $y = x^2$  или  $y = ax^2$ ; получите искомый график.

### Примеры

Постройте график функции выделением полного квадрата.

1.  $2x^2 + 6x - 1$  (построение графика по алгоритму)

*Решение.*

1). Выделите полный квадрат в трехчлене:

$$2x^2 + 6x - 1 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 5\frac{1}{2} \quad \left| \quad ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right.$$



2). Вершина параболы:

$$\left(-\frac{3}{2}; -5\frac{1}{2}\right)$$

3). Ось симметрии:  $x = -\frac{3}{2}$ 

4). Постройте параболу

$$y = 2x^2$$

5). Совместите вершину графика  $y = 2x_0^2$  с вершиной  $\left(-\frac{3}{2}; -5\frac{1}{2}\right)$ и ось параболы с осью  $x = -\frac{3}{2}$  (рис. 103)

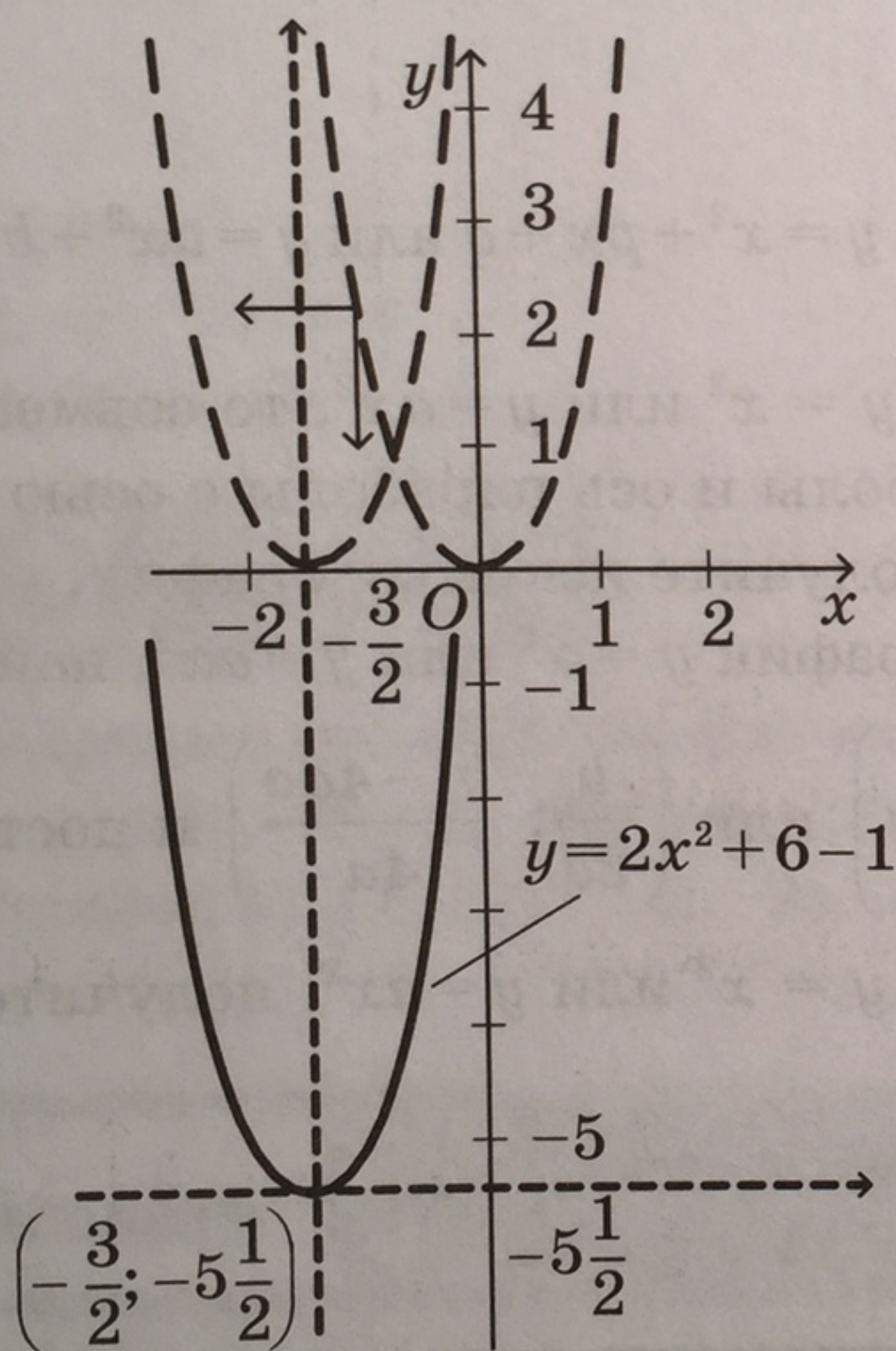
$$a = 2; b = 6; c = 1$$

$$\frac{b}{2a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{36 + 8}{8} = -\frac{44}{8} = -\frac{11}{2} = -5\frac{1}{2}$$

 $(-b; c)$  — вершина параболы

$$y = a(x + b)^2 + c$$



$x$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = 2x^2$	0	$\frac{1}{2}$	2	8

**З а м е ч а н и е.** Можно было построить параболу  $y = 2x^2$  и новые оси с началом координат в точке  $\left(-\frac{3}{2}; 5\frac{1}{2}\right)$ , тогда не надо делать перенос графика.

Рис. 103

2.  $y = x^2 - 2x + 5$  (построение графика сдвигом осей)

1). Выделите полный квадрат в трехчлене:

$$y = x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 4$$

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4}$$



- 2). Постройте график  $y = x^2$
- 3). Постройте новое начало координат  $(-1; -4)$  и проведите оси
- 4). Подпишите график (рис. 104)

**Полезный совет.** Проверить правильность построения графика можно через координаты вершины параболы по графику:  $A(1; 4)$ ;  $y = (x + b)^2 + c$ ;  $A(-b; +c)$

$x$	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = x^2$	$\frac{1}{4}$	1	4

$$p = -2; \frac{p}{2} = -1; q = 5$$

$$-\frac{p^2 - 4q}{4} = -\frac{4 - 20}{4} = 4$$

$$y = (x + b)^2 + c; (b; -c) \text{ — точка } O(0; 0)$$

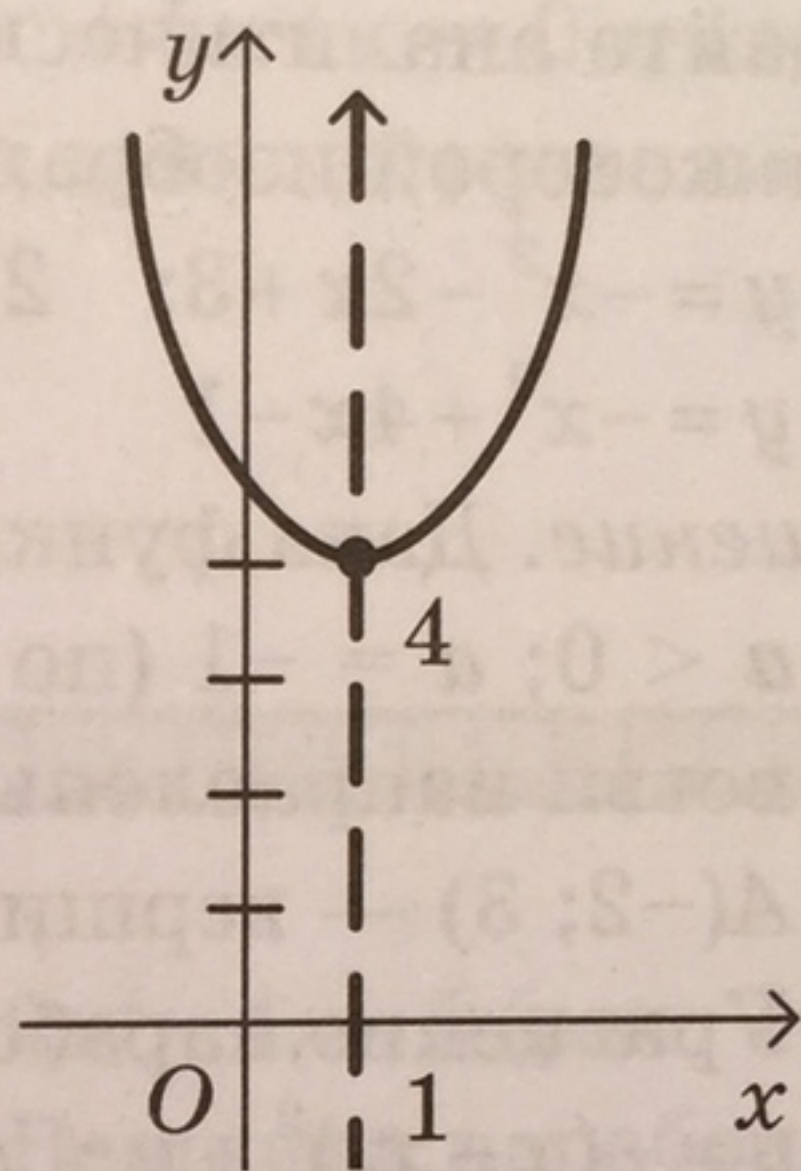


Рис. 104

## Проверь себя!

Постройте график функции  $y = x^2 - 4x + 3$ .

Ответ:  $O(-2; 1)$  — новое начало координат.

3. Исследуя график (рис. 105, а-в), укажите график функции  $y = x^2 + 4x - 5$ .

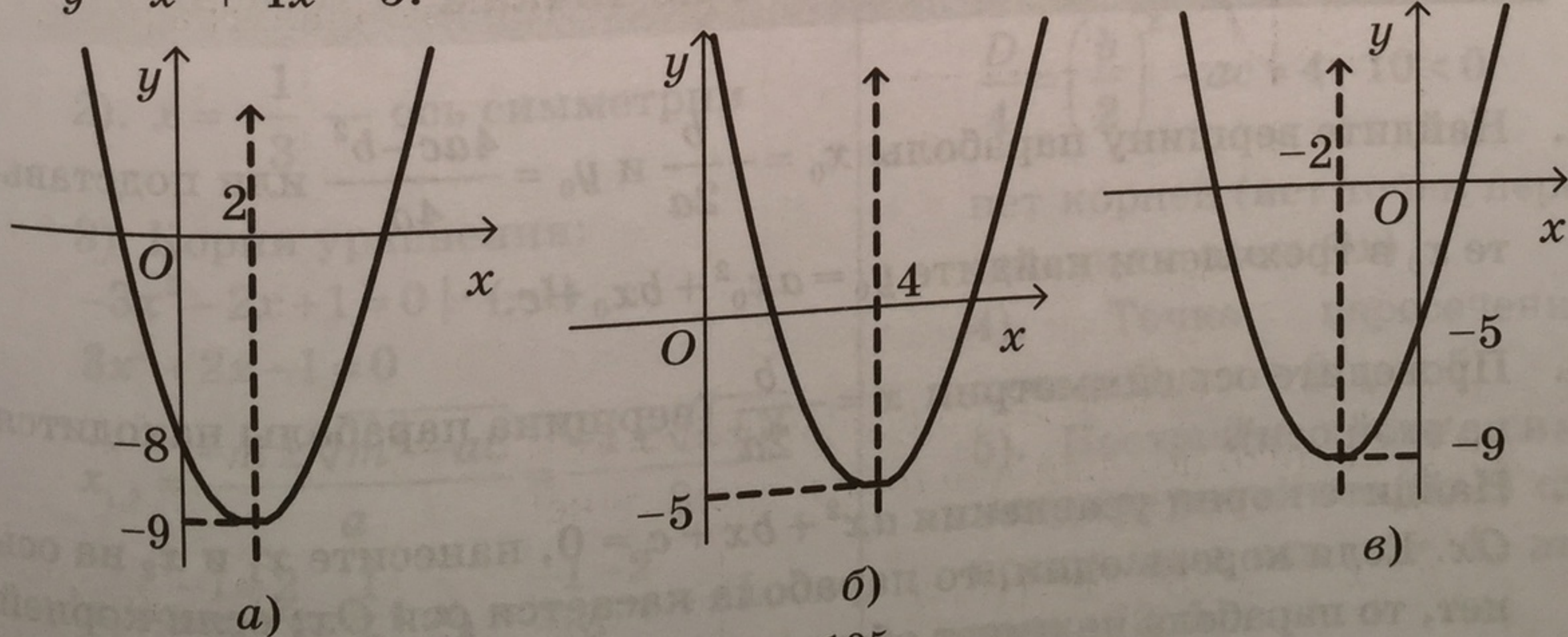


Рис. 105



Решение.

$$1). \text{ Найдем вершину параболы: } -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2 \quad \left| \begin{array}{l} a = 1; b = 4; \\ c = -5; \end{array} \right.$$

$$y_0 = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 5 = 4 - 8 - 5 = -9 \quad \left| \begin{array}{l} A(x_0; y_0); A(-2; -9) \end{array} \right.$$

2). Найдем точку пересечения с осью  $Oy$   $(0; c)$  — это  $(0; -5)$ .

Получим график  $v$ ).

Ответ:  $v$ ).

4. Задайте аналитически (формулой) квадратичную функцию, график которой изображен на рисунке 106.

$$1). y = -x^2 - 2x + 3; \quad 2). y = -x^2 - 4x - 1; \quad 3). y = -x^2 - 4x + 7;$$

$$4). y = -x^2 + 4x - 1$$

Решение. Дана функция  $y = ax^2 + bx + c$ .

1).  $a < 0$ ;  $a = -1$  (по построению графика ветви направлены вниз)

2).  $A(-2; 3)$  — вершина.  $x_0 = -2$ ;  $y_0 = 3$

3). Уравнение параболы:

$$y = -(x - x_0)^2 + y_0; \quad y = -(x + 2)^2 + 3;$$

$$y = -x^2 - 4x - 4 + 3 = -x^2 - 4x - 1$$

На графике точка пересечения с осью  $Oy$   $(0; -1)$  — верно

Ответ: 2).

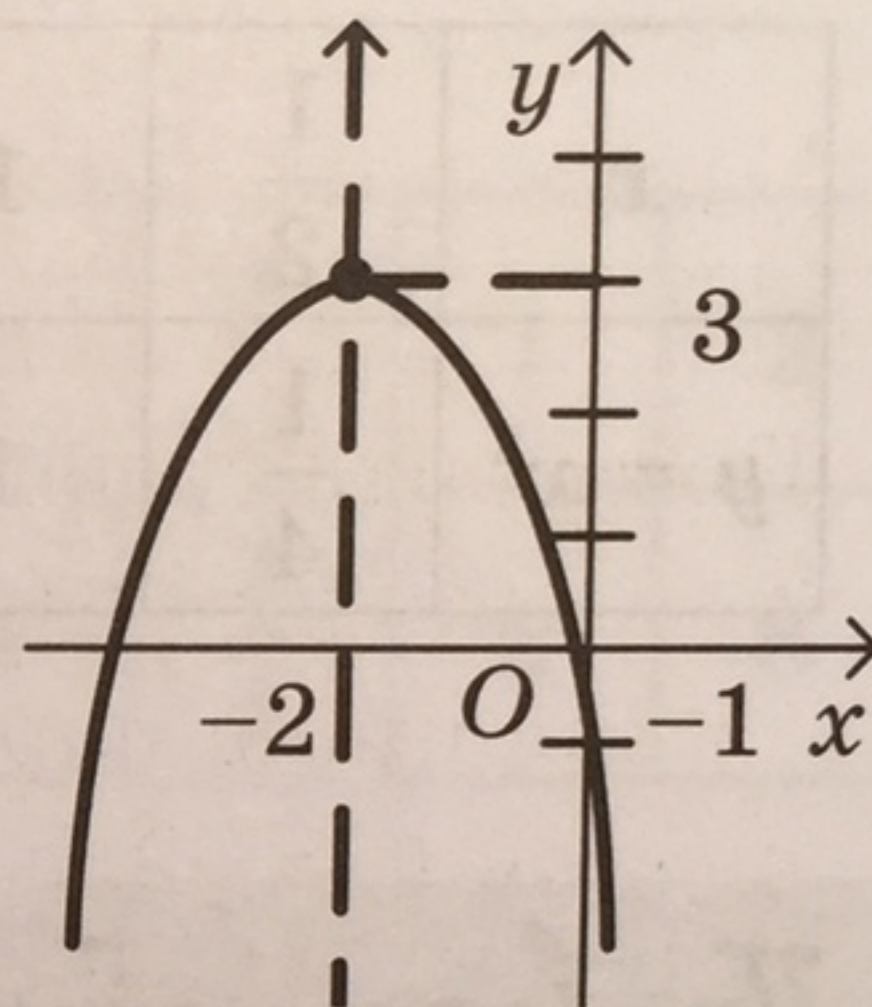


Рис. 106

### Алгоритм

140

### Построение графика функции $y = ax^2 + bx + c$ по точкам

1. Найдите вершину параболы  $x_0 = -\frac{b}{2a}$  и  $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$  или подставьте

$x_0$  в трехчлен и найдите  $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ .

2. Проведите ось симметрии  $x = -\frac{b}{2a}$  (вершина параболы находится на этой оси).

3. Найдите корни уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ , нанесите  $x_1$  и  $x_2$  на ось  $Ox$ . Если корень один, то парабола касается оси  $Ox$ ; если корней нет, то парабола не имеет общих точек с осью  $Ox$ .



4. Найдите точку пересечения с осью  $Oy$ :  $x = 0$ ;  $y = c$ .
5. Постройте точку, симметричную точке  $(0; c)$  относительно оси  $x = -\frac{b}{2a}$  ( $2x_0; c$ ).
6. Определите направление ветвей параболы. Если  $a > 0$ , то ветви направлены вверх ( $\cup$ ); если  $a < 0$ , то ветви направлены вниз ( $\cap$ ).
7. Соедините точки плавной линией, получите искомую параболу.
- Полезный совет.** Если уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет один корень или не имеет корней, то возьмите две дополнительные точки. Например:  $(x_0 \pm 1; y_0(x_0 \pm 1))$

### Примеры

Постройте график функции.

1.  $y = -3x^2 - 2x + 1$  (рис. 107)

1). Вершина параболы:

$$a = -3; b = -2; c = 1$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

$$y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-12 - 4}{-12} = \frac{-16}{-12} = \frac{4}{3}$$

$$A\left(-\frac{1}{3}; 1\frac{1}{3}\right) \text{ — вершина параболы}$$

2).  $x = -\frac{1}{3}$  — ось симметрии

3). Корни уравнения:

$$-3x^2 - 2x + 1 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - ac}}{a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{3}$$

$$x_1 = \frac{-1+2}{3} = \frac{1}{3}; \quad x_2 = \frac{-1-2}{3} = -1$$

2.  $y = 2x^2 - 4x + 5$  (рис. 108)

1). Вершина параболы:

$$a = 2; b = -4; c = 5$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{4} = 1$$

$$y_0 = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 5 = 3$$

$A(1; 3)$  — вершина параболы

2).  $x = 1$  — ось симметрии

3). Корни уравнения:

$$2x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 4 - 10 < 0$$

нет корней (нет точек пересечения с осью  $Ox$ )

4). Точка пересечения с осью  $Oy$ :  $x = 0$ ;  $y = 5$

5). Постройте точку, симметричную точке  $(0; c)$  относительно оси  $x = 1$ , это точка  $(2; 5)$



Нанесите на ось  $Ox$ :  $x_1 = \frac{1}{3}$ ;  
 $x_2 = -1$

4). Точка пересечения с осью  
 $Oy$ :  $x = 0$ ;  $y = 1$

5). Постройте точку, симметричную точке  $(0; 1)$  относительно  $x = \frac{1}{3}$

6).  $a = -3$ ;  $a < 0$  — ветви направлены вниз

7). Соедините точки и продолжите ветви параболы вниз

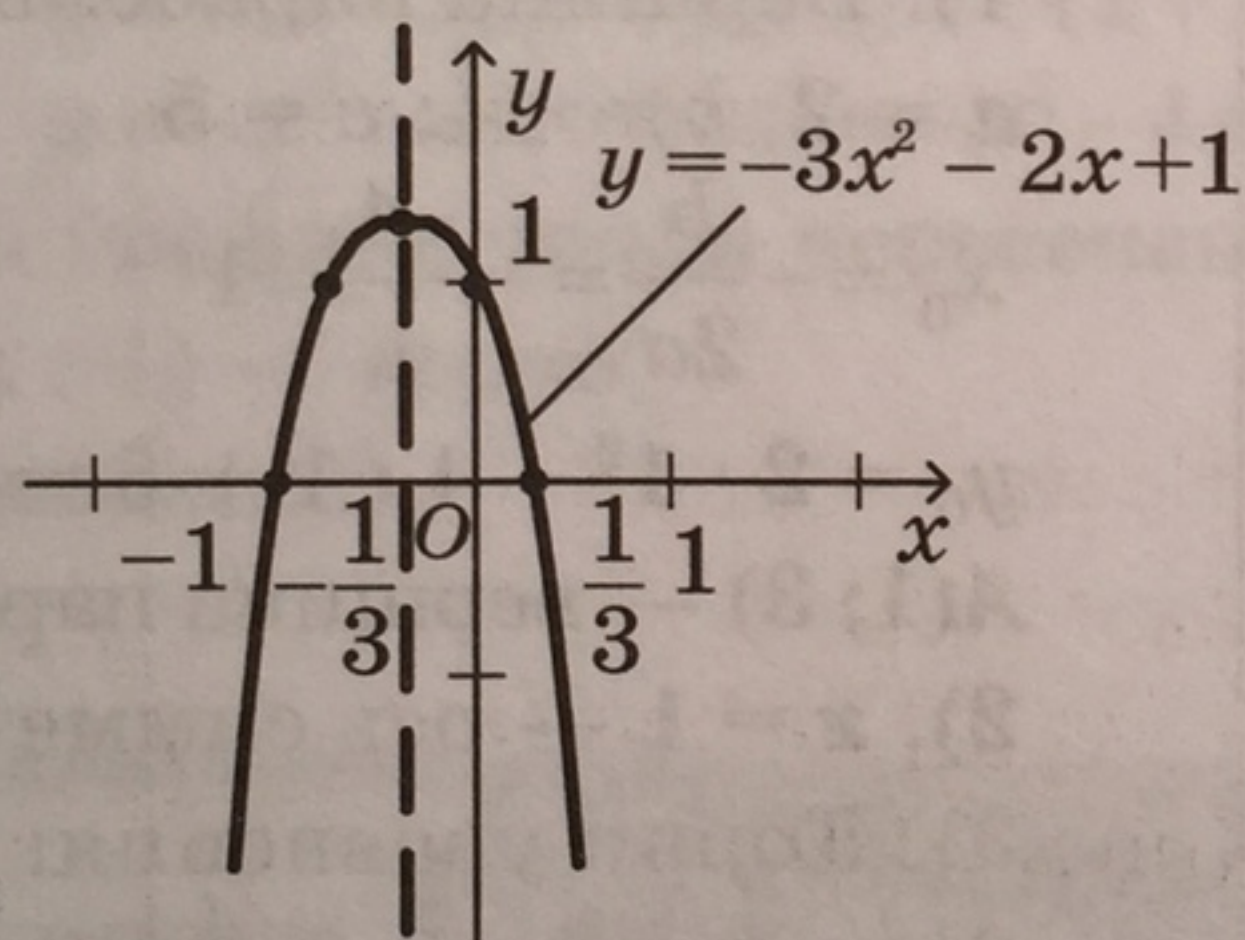


Рис. 107

6).  $a = 2$ ;  $a > 0$  — ветви направлены вверх

7). Дополнительные точки:  
 $\left(x_0 \pm \frac{1}{2}\right)$

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; x_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y_1\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{1}{2} + 5 = 3\frac{1}{2}$$

$$y_2\left(\frac{3}{2}\right) = 3\frac{1}{2}$$

Постройте точку, симметричную  $(x_1; y_1)$  относительно оси  $x = 1$ :  $\left(\frac{3}{2}; 3\frac{1}{2}\right)$

8). Соедините точки и продолжите ветви параболы вверх

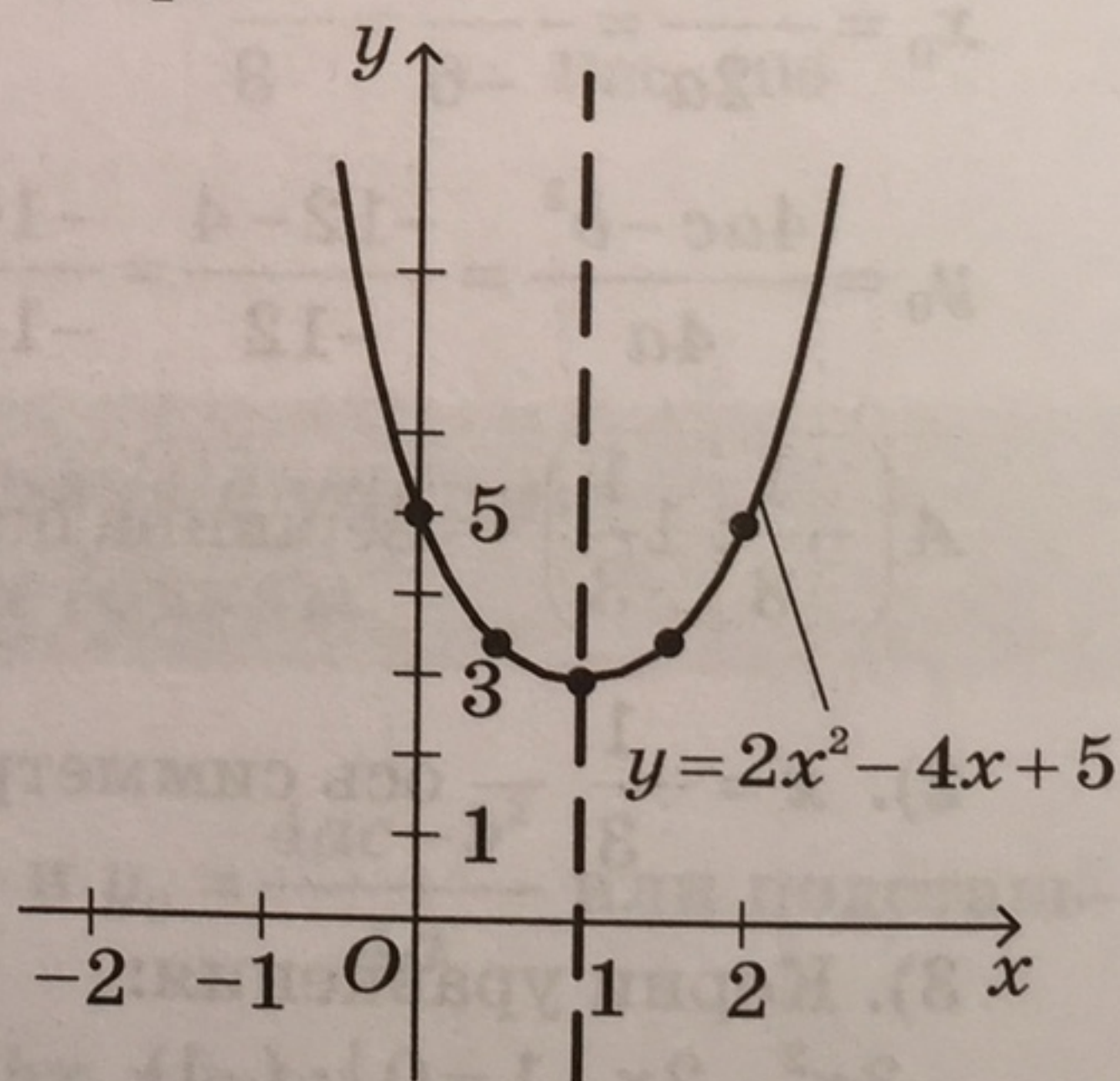


Рис. 108

**Проверь себя!**

Постройте график функции  $y = 2x^2 + 4x - 3$ .

Ответ:  $(-1; -5)$  — вершина параболы.



## § 8.

## Исследование квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$

Исследуем функцию  $y = ax^2 + bx + c$  по семи свойствам для функций.

### Свойства графиков функций-параболы

1. Парабола имеет ось симметрии  $x = x_0; x = -\frac{b}{2a}$ .
2. Парабола имеет вершину в точке  $(x_0; y_0(x_0))$  и концы графиков.
3. Парабола  $y = x^2$  имеет фокус в точке  $(0; \frac{1}{4})$ .
4. Если  $a > 0$ , то ветви параболы направлены вверх ( $\cup$ ).
5. Если  $a < 0$ , то ветви параболы направлены вниз ( $\cap$ ).

### Алгоритм

141

### Исследование функции $y = ax^2 + bx + c$

1. Область определения:  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x$  — любое действительное число (вся ось  $Ox$ ).
2. Множество значений.

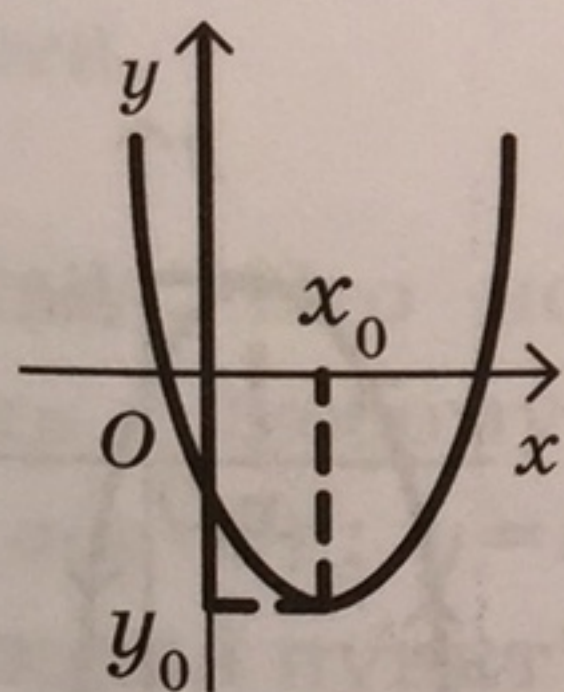


Рис. 109

Если  $a > 0$ ,  $y \geq y_0$ ;  
 $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$   
 $[y_0; +\infty)$  на оси  $Oy$   
 (рис. 109)

Если  $a < 0$ ,  $y \leq y_0$ ;  
 $y_0 = f(x_0)$   
 $(-\infty; y_0]$  на оси  $Oy$   
 (рис. 110)

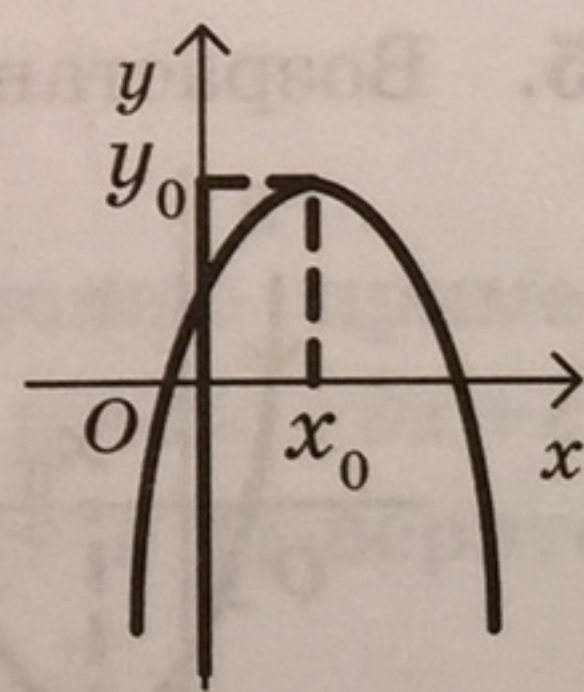


Рис. 110

3. Нули функции (значения  $x$ , при которых  $y = 0$ )  $y = ax^2 + bx + c$

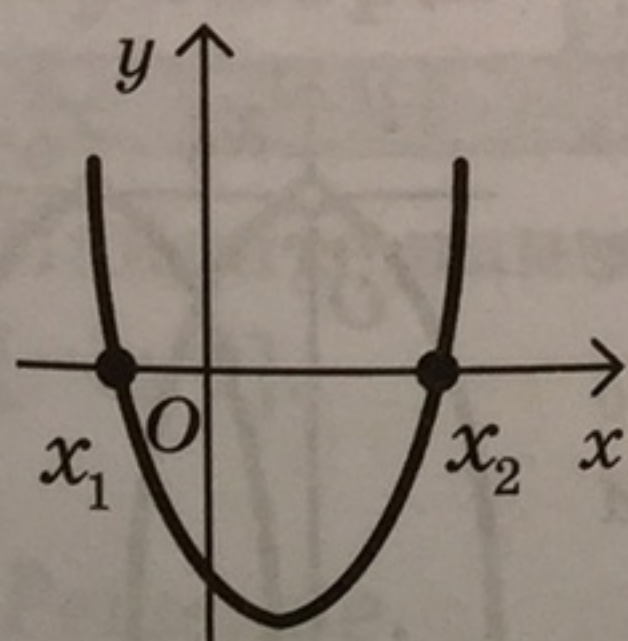


Рис. 111

1). Если  $D > 0$ , то  $x_1 \neq x_2$  — два  
 корня  
 Две точки пересечения графика  
 с осью  $Ox$  (рис. 111, 112)

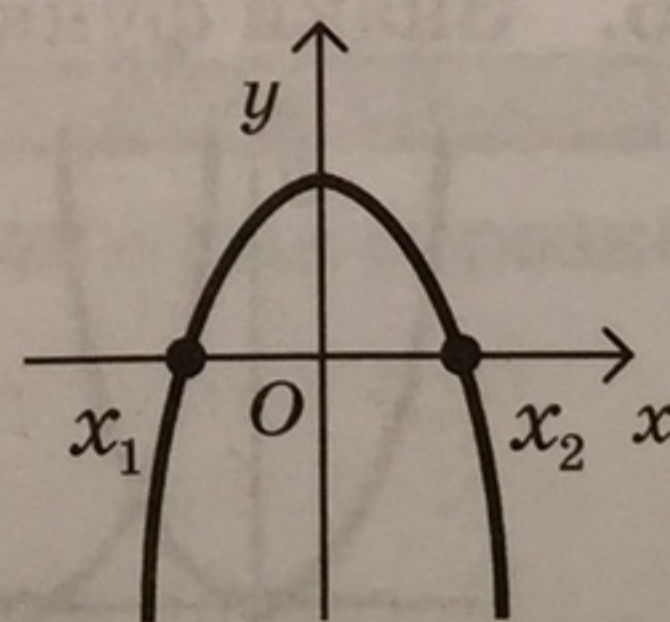


Рис. 112



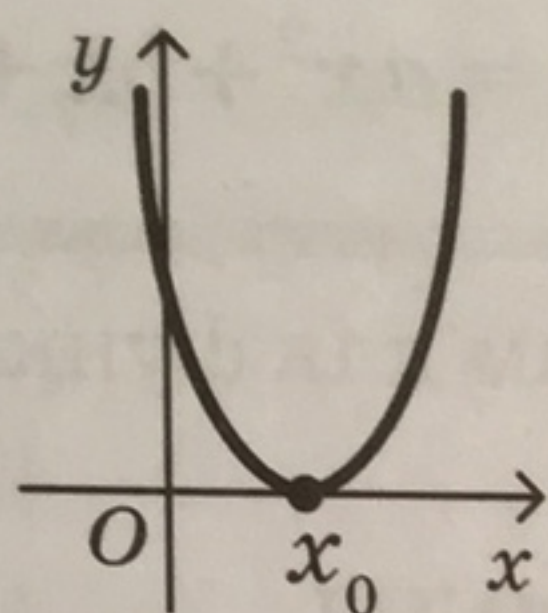


Рис. 113

2). Если  $D = 0$ , то  $x_1 = x_2$  — один корень

График касается оси  $Ox$  в точке  $x_0$  (рис. 113, 114)

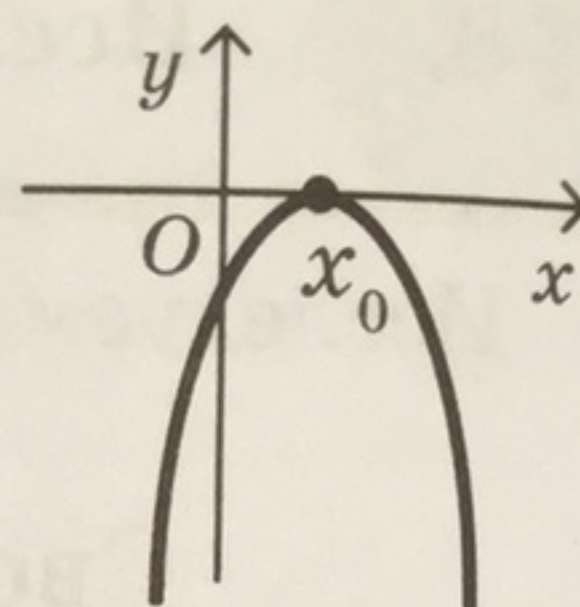


Рис. 114

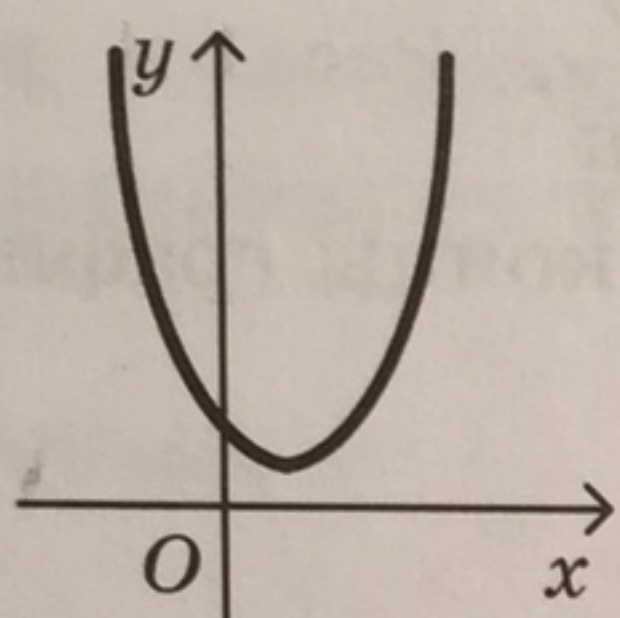


Рис. 115

3). Если  $D < 0$ , то нет действительных корней. Нет общих точек с осью  $Ox$  (рис. 115, 116)

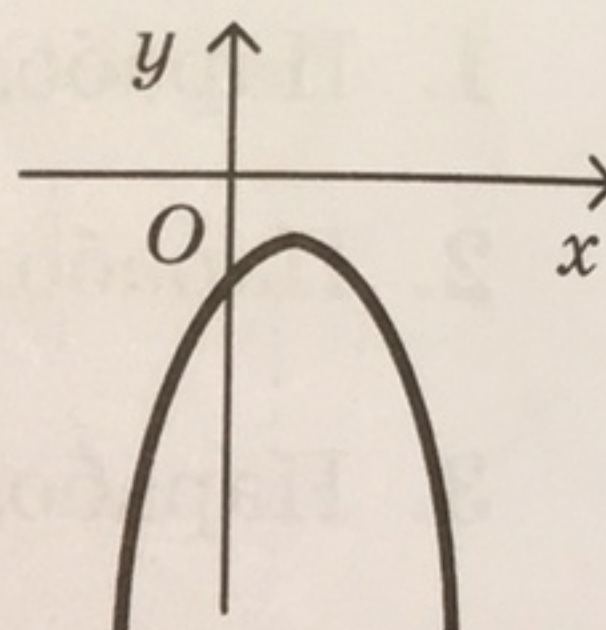


Рис. 116

4. Наибольшее, наименьшее значение функции

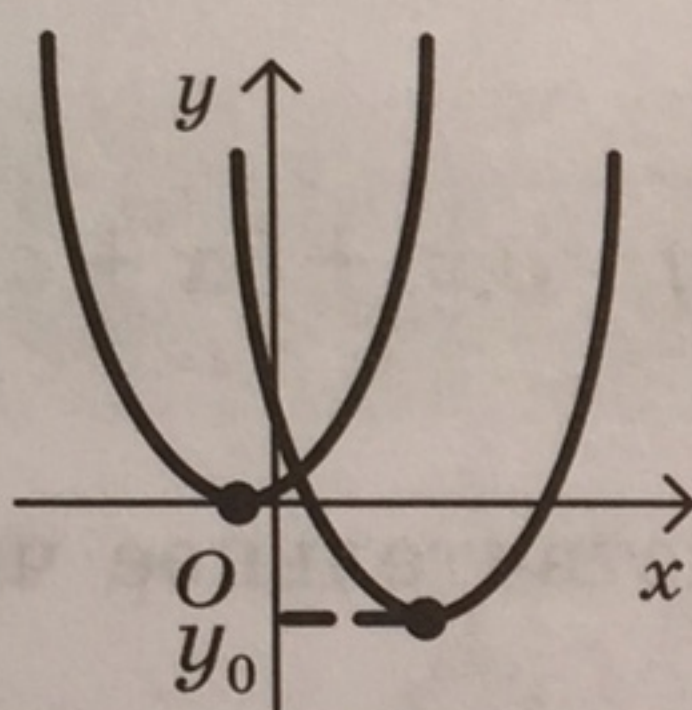


Рис. 117

$a > 0$   
 $y = y_0$  — наименьшее  
 $y_0 = f(x_0)$  — ордината вершины (рис. 117)

$a < 0$   
 $y = y_0$  — наибольшее  
 $y_0 = f(x_0)$  (рис. 118)

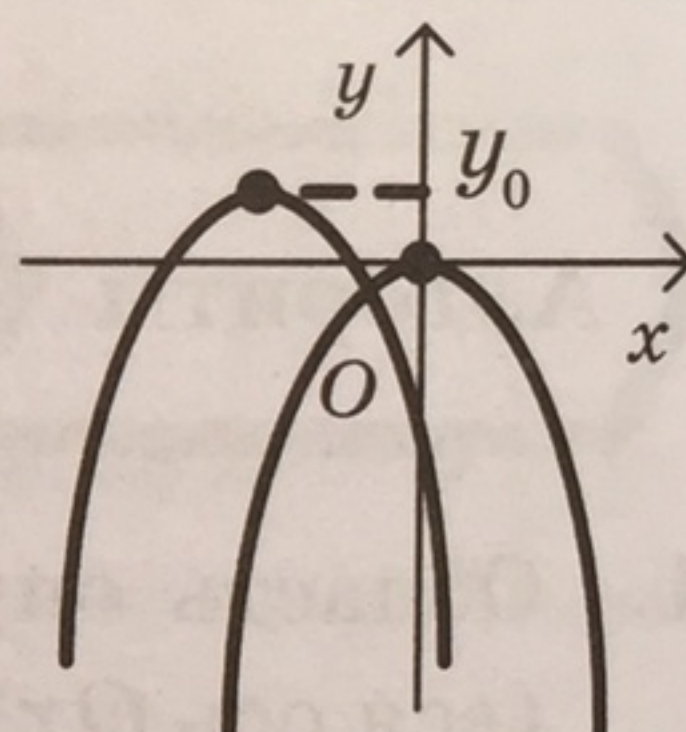


Рис. 118

5. Возрастание, убывание функции

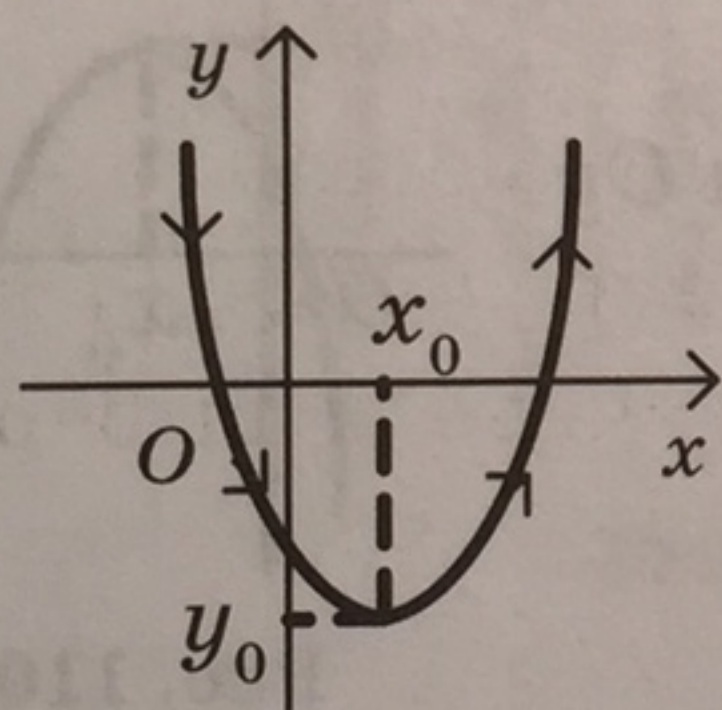


Рис. 119

$a > 0$   
 Значение  $y$  возрастает  $[y_0; +\infty)$  при  $x \geq x_0$ ; значение  $y$  убывает  $(+\infty; y_0]$  при  $x \leq x_0$  (рис. 119)

$a < 0$   
 Значение  $y$  возрастает  $(-\infty; y_0]$  если  $x \leq x_0$ ; значение  $y$  убывает  $[y_0; -\infty)$  при  $x \geq x_0$  (рис. 120)

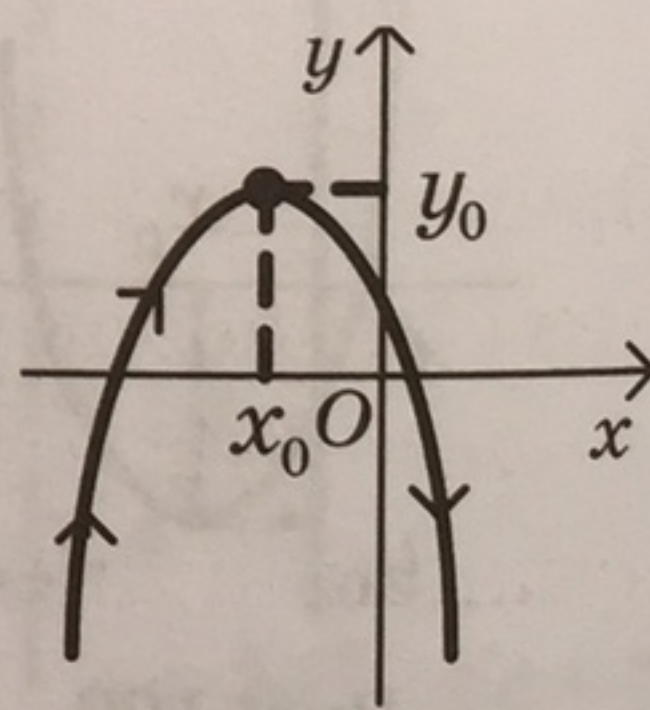


Рис. 120

6. Знаки функции

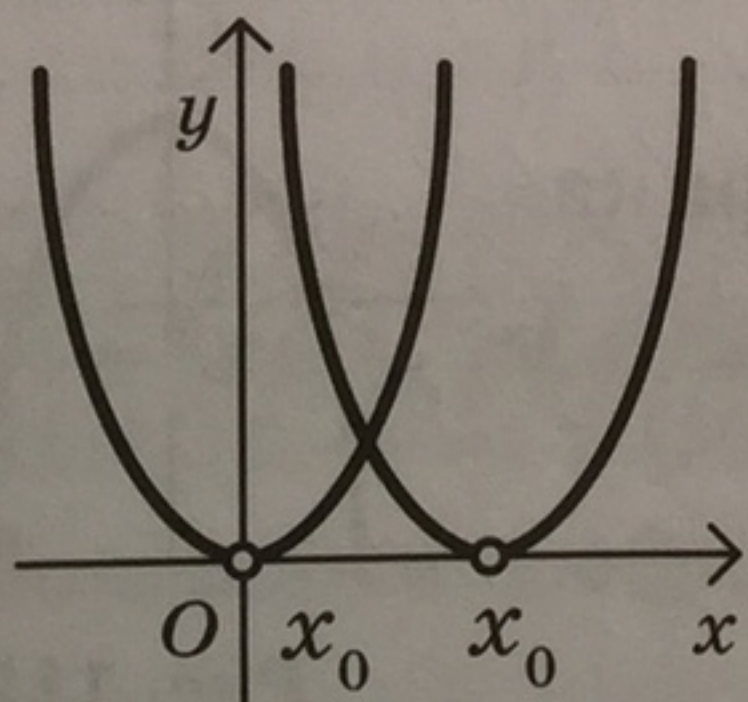


Рис. 121

$a > 0$   
 $y > 0$  при всех  $x$ , кроме  $x_0$  и  $y \geq 0$  при  $x \in \mathbb{R}$  (рис. 121)

$a < 0$   
 $y < 0$  при всех  $x$ , кроме  $x_0$  и  $y \leq 0$  при  $x \in \mathbb{R}$  (рис. 122)

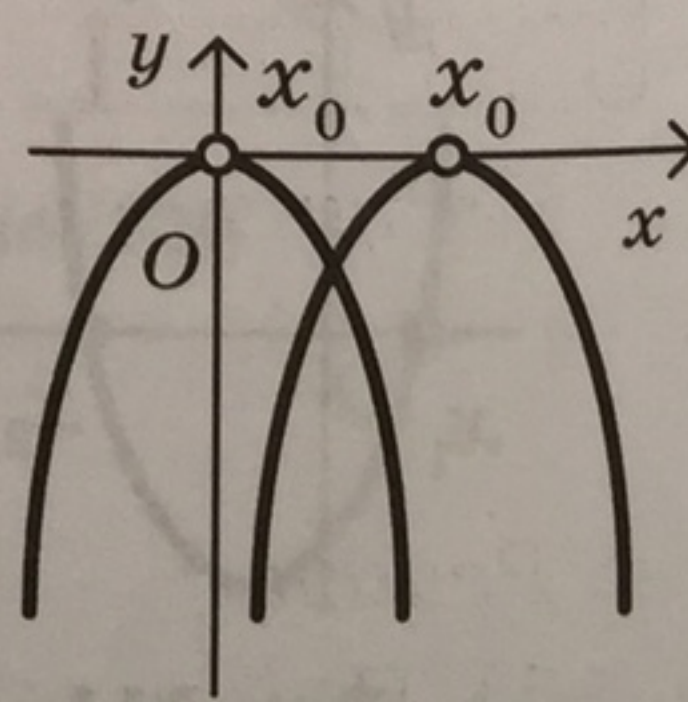


Рис. 122



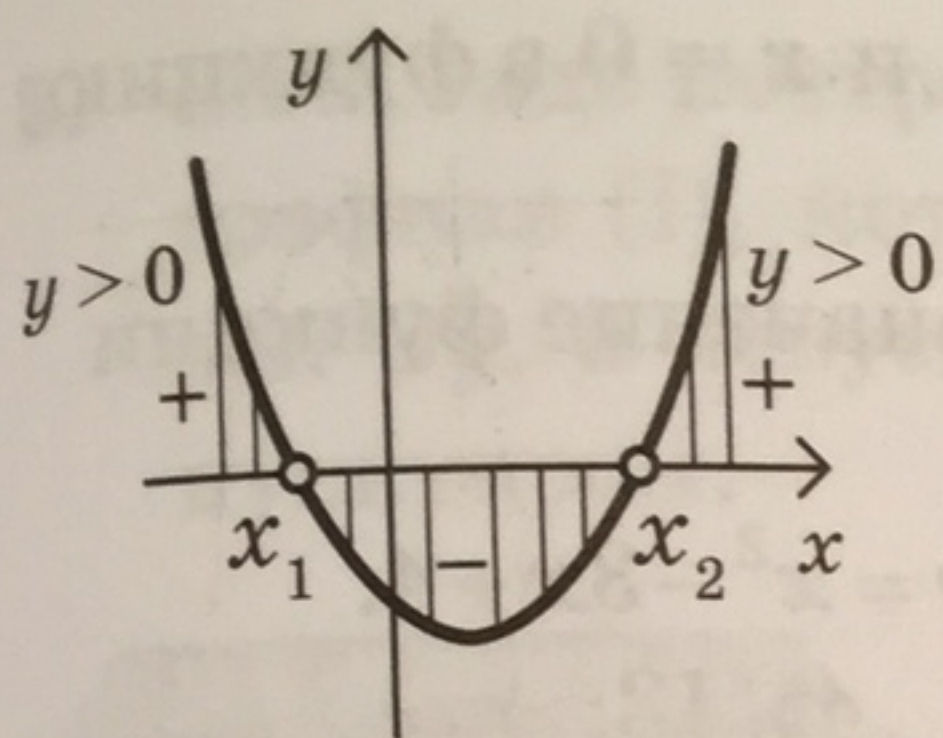


Рис. 123

$y > 0$ ,  
если  $x < x_1$   
и  $x > x_2$   
 $y < 0$ , если  
 $x_1 < x < x_2$   
(рис. 123)

$y < 0$ ,  
если  $x < x_1$   
и  $x > x_2$   
 $y > 0$ , если  
 $x_1 < x < x_2$   
(рис. 124)

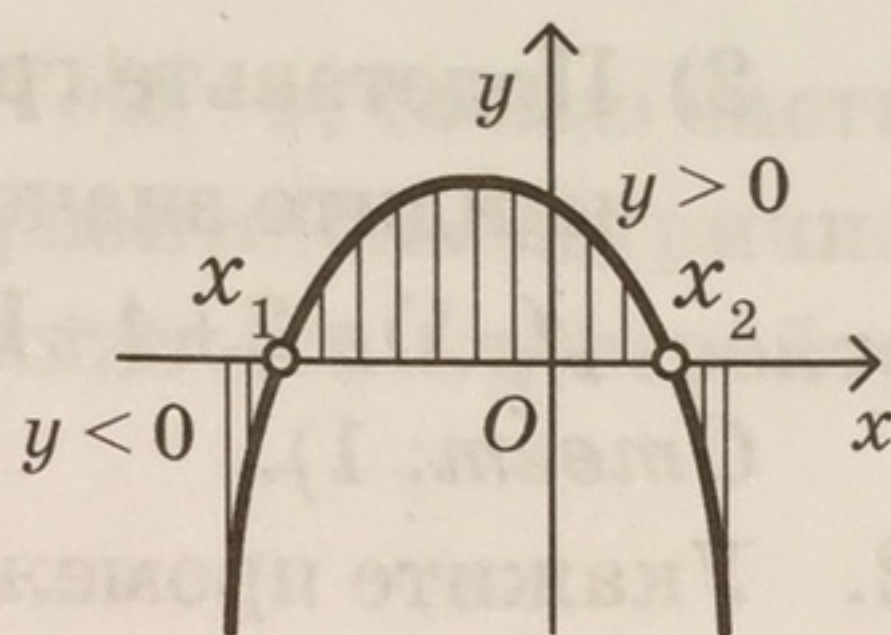


Рис. 124

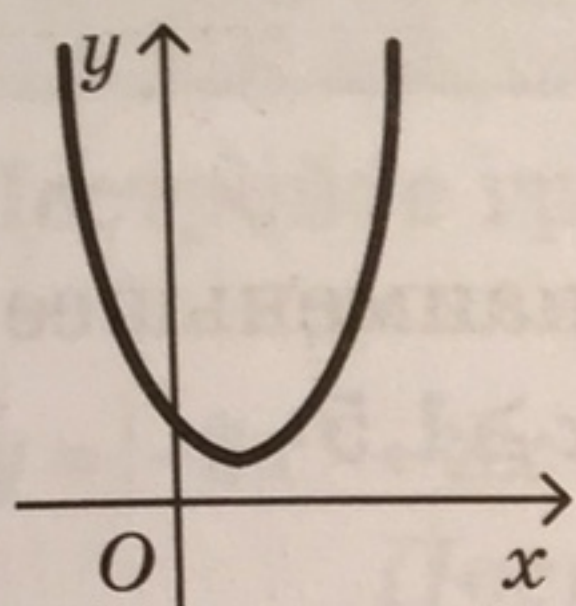


Рис. 125

$y > 0$  при  $x \in R$ ,  
график над  
осью  $Ox$ ,  $D < 0$   
(рис. 125)

$y < 0$  при  $x \in R$ ,  
график под  
осью  $Ox$ ,  $D < 0$   
(рис. 126)

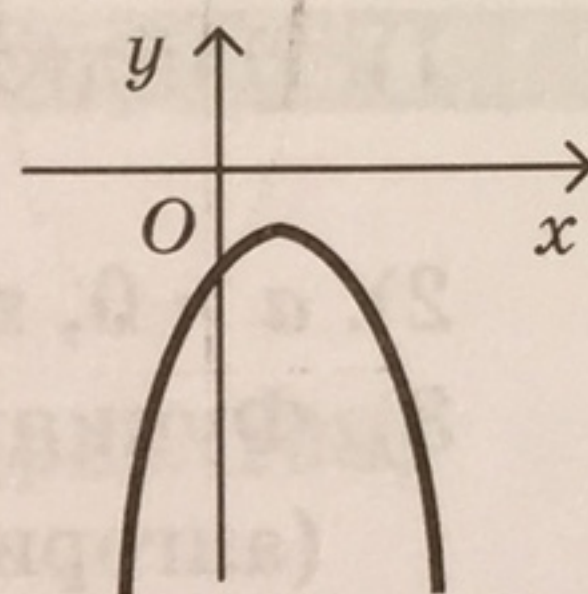


Рис. 126

## 7. Четность, нечетность функции

Если  $f(-x) = f(x)$ , то функция  $f(x)$  — четная.

Если  $f(-x) = -f(x)$ , то функция  $f(x)$  — нечетная.

Подставим вместо  $x$  значение  $(-x)$  в функцию:  $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$f(-x) = a(-x)^2 + b(-x) + c = ax^2 - bx + c \neq ax^2 + bx + c$$

$f(x) \neq \pm f(-x)$  — функция не обладает свойством четности, нечетности.

**Вывод.** Это исследование квадратичной функции можно применить к любому случаю, изложенному в данной теме:  $y = ax^2 + bx + c$ ;  $y = a(x+b)^2$ ;  $y = ax^2 + c$ ;  $y = ax^2 + bx$ . Внимательно изучите и выберите нужный пункт исследования.

### Примеры

1. Найдите наименьшее значение функции  $y = 2x^2 - 4x + 1$  на отрезке  $[-1; 0]$ .

1). 1; 2). -1; 3). 7; 4). 0

Решение.

1) Найдите  $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{4} = 1; 1 \notin [-1; 0]$



- 2) Подставьте границы отрезка  $[-1; 0]$ :  $x = -1$  и  $x = 0$  в функцию, найдите значение  $y$  и сравните:

$$y(-1) = 2 + 4 + 1 = 7; y(0) = 1 \text{ — наименьшее значение функции}$$

Ответ: 1).

2. Укажите промежуток возрастания функции  $y = x^2 - 3x + 4$ .

1).  $[0; +\infty)$ ; 2).  $[1,5; +\infty)$ ; 3).  $[-1,5; +\infty)$ ; 4).  $[3; +\infty)$

Решение.

$$1). \text{ Найдите } x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$$

2).  $a > 0$ , ветви направлены вверх, значит,  $x_0$  — наименьшее

3). Функция  $y = x^2 - 3x + 4$  возрастает при  $x \geq x_0$ ;  $x \geq 1,5$

(алгоритм 141, п. 5)

Ответ: 2).

### Проверь себя!

Укажите наименьшее значение функции  $y = 2x^2 + 3x - 2$ .

$$\text{Ответ: } y_0 = -3\frac{1}{8}.$$

#### Алгоритм

142

#### Построение графиков функций $y = |ax^2 + bx + c|$ и $y = ax^2 + b|x| + c$

1. Постройте график функции  $y = ax^2 + bx + c$  (I) любым способом по алгоритмам 135–139.
2. Если парабола пересечет ось  $Ox$ , то всю часть графика, которая расположена под осью  $Ox$ , отобразите симметрично оси  $Ox$ , так как  $|y| \geq 0$ .
3. Если парабола расположена над осью  $Ox$ , то  $|ax^2 + bx + c| = ax^2 + bx + c$  при всех значениях  $x$ , а значит, весь график (I) сохранит свое положение.
4. Если вся парабола (I) расположена под осью  $Ox$  ( $a < 0$ ;  $D < 0$ ), то графиком функции  $y = |ax^2 + bx + c|$  будет парабола, расположенная над осью  $Ox$  симметрично параболе (I) относительно оси  $Ox$ .



5. Если надо построить график функции  $y = ax^2 + b|x| + c$ , то всю часть графика (I), которая справа от оси  $Oy$ , отобразите симметрично оси  $Oy$ , а левую часть графика (I) относительно оси  $Oy$  стройте пунктиром.

### Примеры

Постройте график функции.

1.  $y = |-3x^2 - 2x + 1|$  (рис. 127)

Построение.

- 1). Найдите координаты вершины параболы:

$$y = -3x^2 - 2x + 1; a < 0; (\cap)$$

$$a = -3; b = -2; c = 1$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

$$y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-12 - 4}{-12} = \frac{-16}{-12} = \frac{4}{3}$$

$$A\left(-\frac{1}{3}; 1\frac{1}{3}\right) \text{ — вершина параболы}$$

2).  $x = -\frac{1}{3}$  — ось симметрии

- 3). Точки пересечения с осью

$$Ox: y = 0$$

$$-3x^2 - 2x + 1 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - ac}}{a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{3}$$

$$x_1 = \frac{-1+2}{3} = \frac{1}{3}; x_2 = \frac{-1-2}{3} = -1$$

2.  $y = 2x^2 - 2|x| + 3$  (рис. 128)

- 1). Найдите координаты вершины параболы:

$$y = 2x^2 - 2x + 3; a > 0; (\cup)$$

$$a = 2; b = -2; c = 3$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$y_0 = 2 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{2} - 1 + 3 = 2\frac{1}{2}$$

$$A\left(\frac{1}{2}; 2\frac{1}{2}\right) \text{ — вершина параболы}$$

2).  $x = \frac{1}{2}$  — ось симметрии

- 3). Точки пересечения с осью

$$Ox: y = 0$$

$$2x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - ac}}{a} = \frac{1 \pm \sqrt{1-6}}{2}$$

$$D < 0$$

нет корней, точек пересечения с осью  $Ox$  нет



$\left(\frac{1}{3}; 0\right); (-1; 0)$  — точки пересечения с осью  $Ox$

4). Точка пересечения с осью  $Oy$ :  $x = 0$ ;  $y = 1$   
 $(0; 1)$  — точка пересечения с осью  $Oy$

5). Отобразите нижнюю часть графика симметрично оси  $Ox$ :

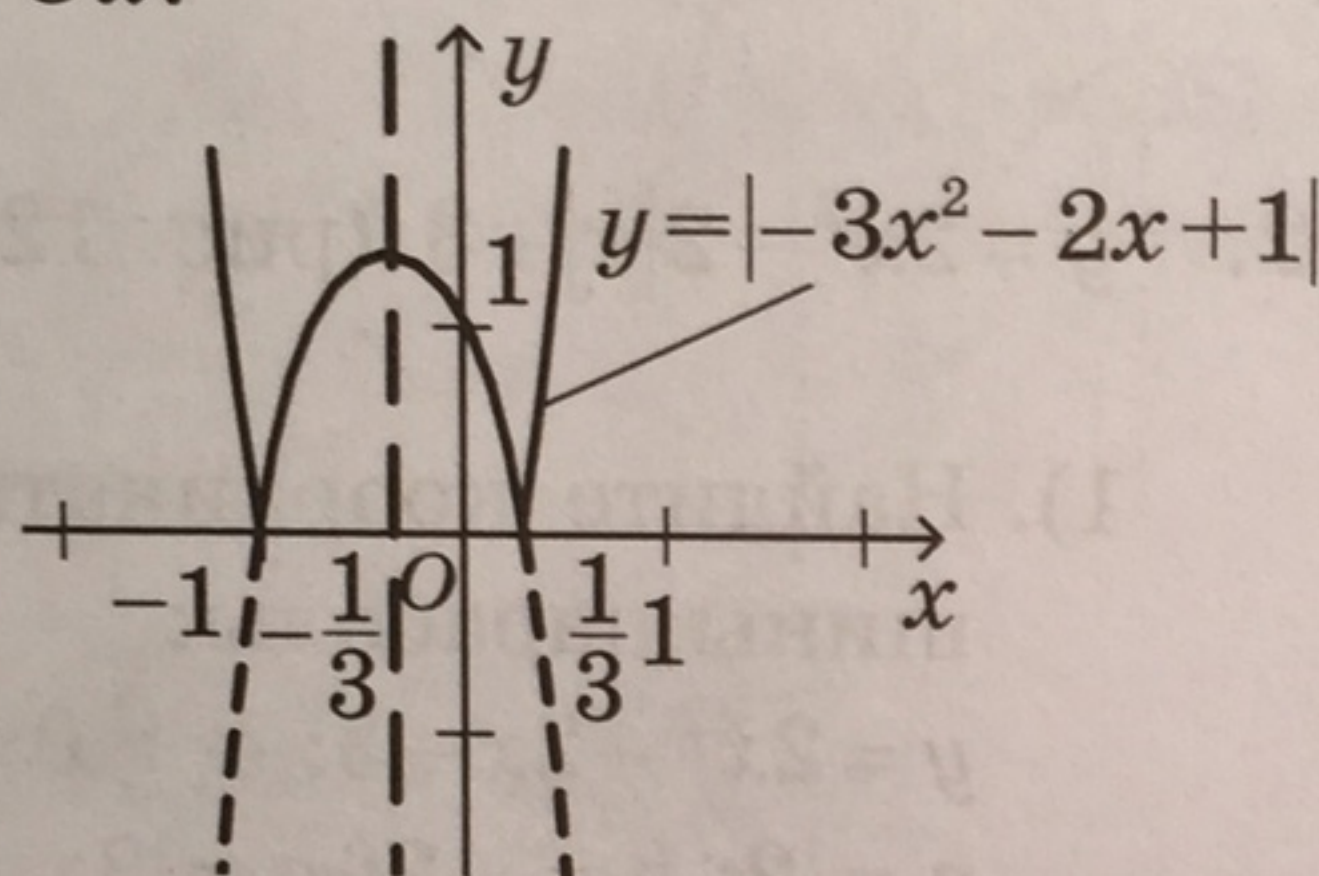


Рис. 127

4). Точка пересечения с осью  $Oy$ :  $x = 0$ ;  $y = 3$   
 $(0; 3)$  — точка пересечения с осью  $Oy$

5). Отобразите правую часть графика симметрично оси  $Oy$ :

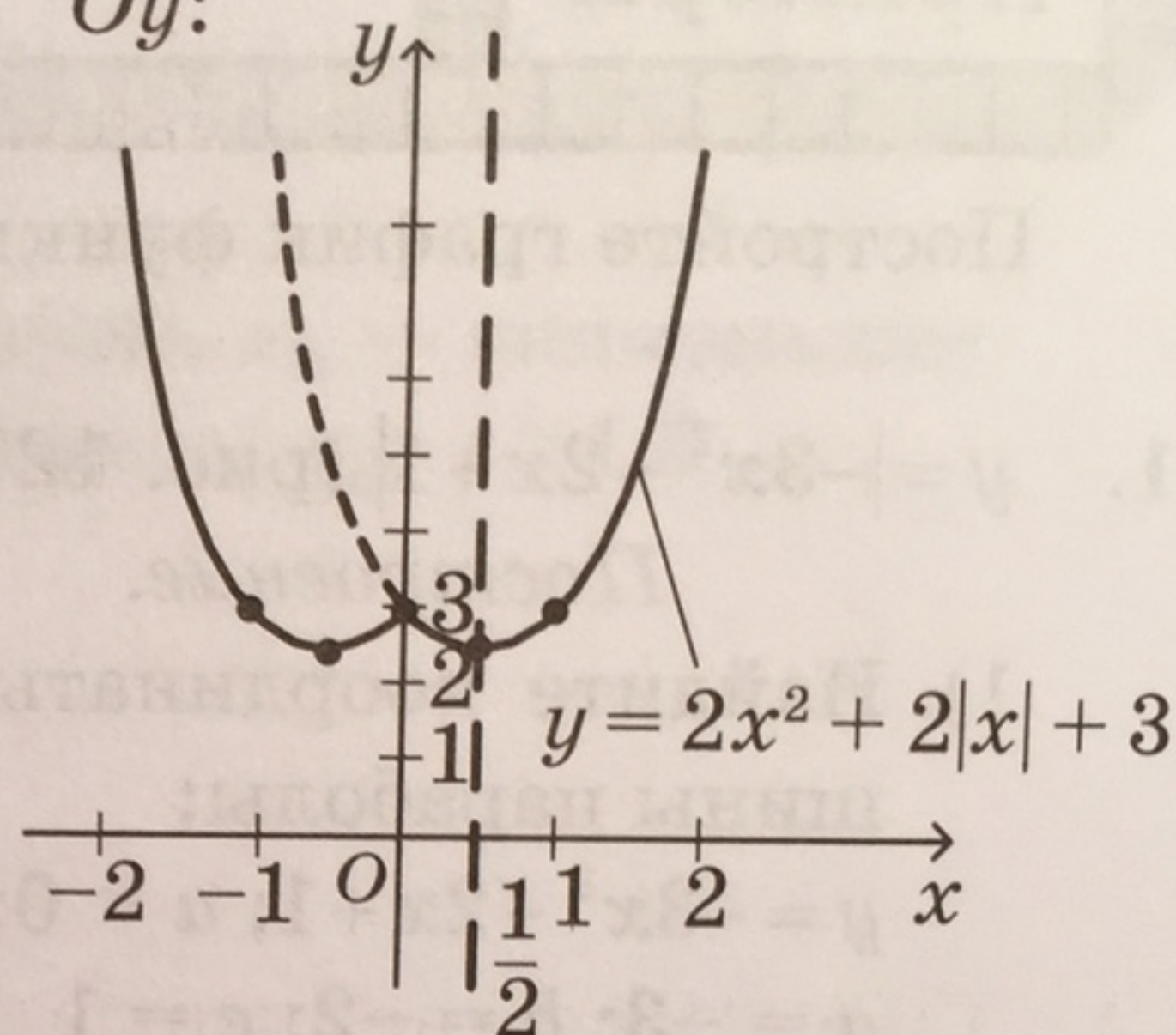


Рис. 128

### Алгоритм

143

### Построение графика функции

$$y = |ax^2 + b|x| + c|$$

1. Постройте график функции  $y = ax^2 + bx + c$ .
2. Постройте график функции  $y = ax^2 + b|x| + c$ . Постройте симметрично оси  $Oy$  ту часть графика, которая справа от оси  $Oy$ .
3. Постройте симметрично относительно оси  $Ox$  ту часть графика, которая находится под осью  $Ox$ . Получите график функции  $y = |ax^2 + b|x| + c|$ .

### Примеры

1. Постройте график функции  $y = |x^2 - 4|x| + 3|$ .  
 1). Постройте график функции  $y = x^2 - 4x + 3$ . Например, способом выделения полного квадрата:  $y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$ . Вершина в точке  $(2; -1)$  (I). Корни:  $x_1 = 3$ ;  $x_2 = 1$ ; ось симметрии:  $x = 2$ .



2). Постройте график функции  $y = x^2 - 4|x| + 3$  (II): график симметрично правой части графика (I) относительно оси  $Oy$ .

3). Постройте график  $y = |x^2 - 4|x| + 3|$  (III). Постройте график симметрично нижней части графика (II) относительно оси  $Ox$ , получите искомый график функции (рис. 129).

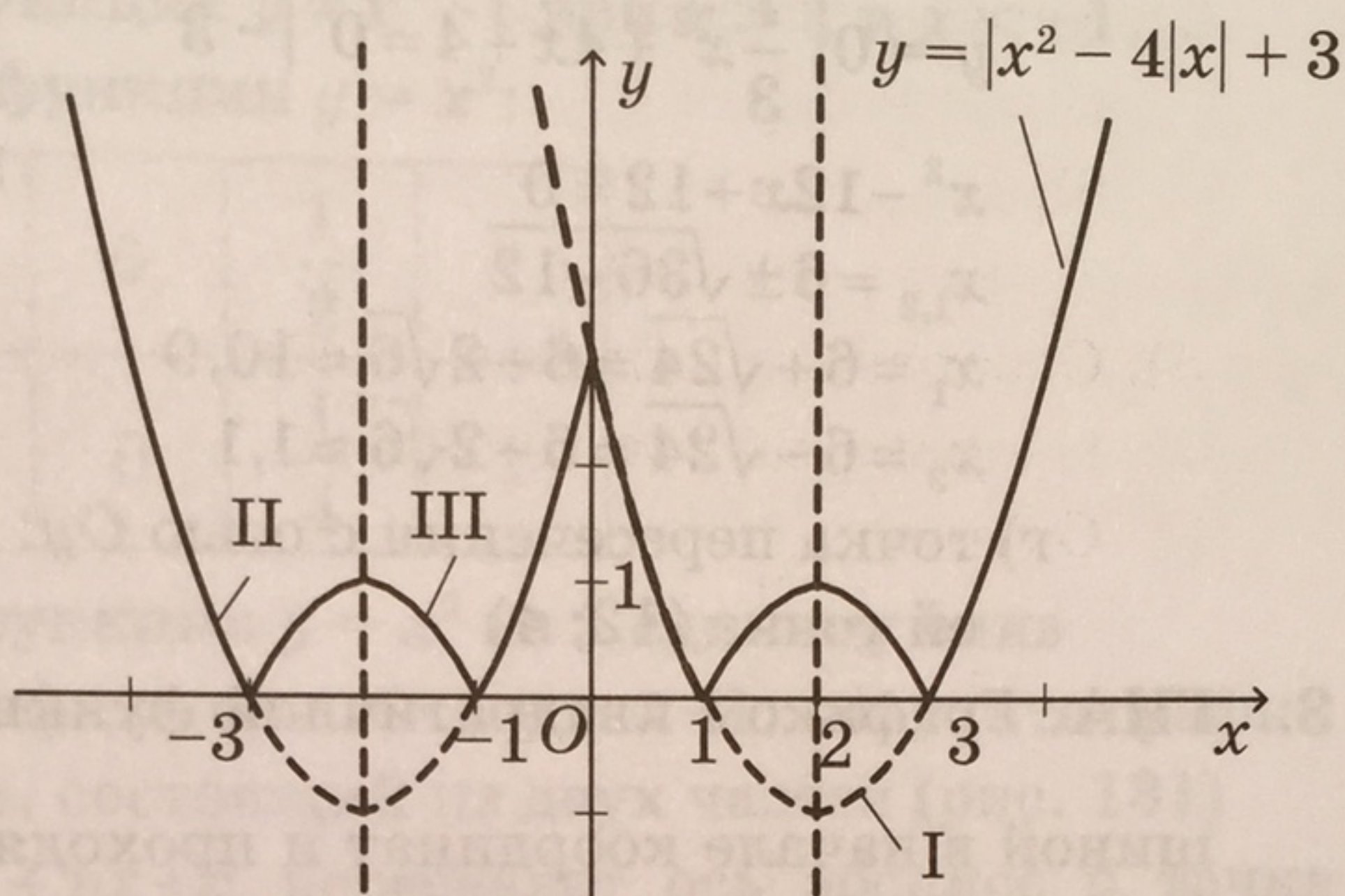


Рис. 129

2. ГИА. Известно, что график функции  $y = ax^2 + 4x + 4$  проходит через точку  $D(3; -5)$ . Найдите коэффициент  $a$  и построьте этот график.

Решение.

1). Если точка  $D(3; -5)$  принадлежит графику, то ее координаты  $x = 3$  и  $y = -5$  удовлетворяют уравнению  $y = ax^2 - 4x + 4$ . Подставьте вместо  $x$  и  $y$  их значения и найдите  $a$ :

$$\begin{aligned} -5 &= a \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 4; \\ 9a &= -5 + 8; 9a = 3; a = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Получите функцию

$$y = \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4$$

2). Постройте график функции

$$y = \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4 \text{ (рис. 130):}$$

а) вершина параболы в точке  $(6; -8)$ :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6; y_0 = \frac{1}{3} \cdot 36 - 4 \cdot 6 + 4 = 12 - 24 + 4 = -8$$

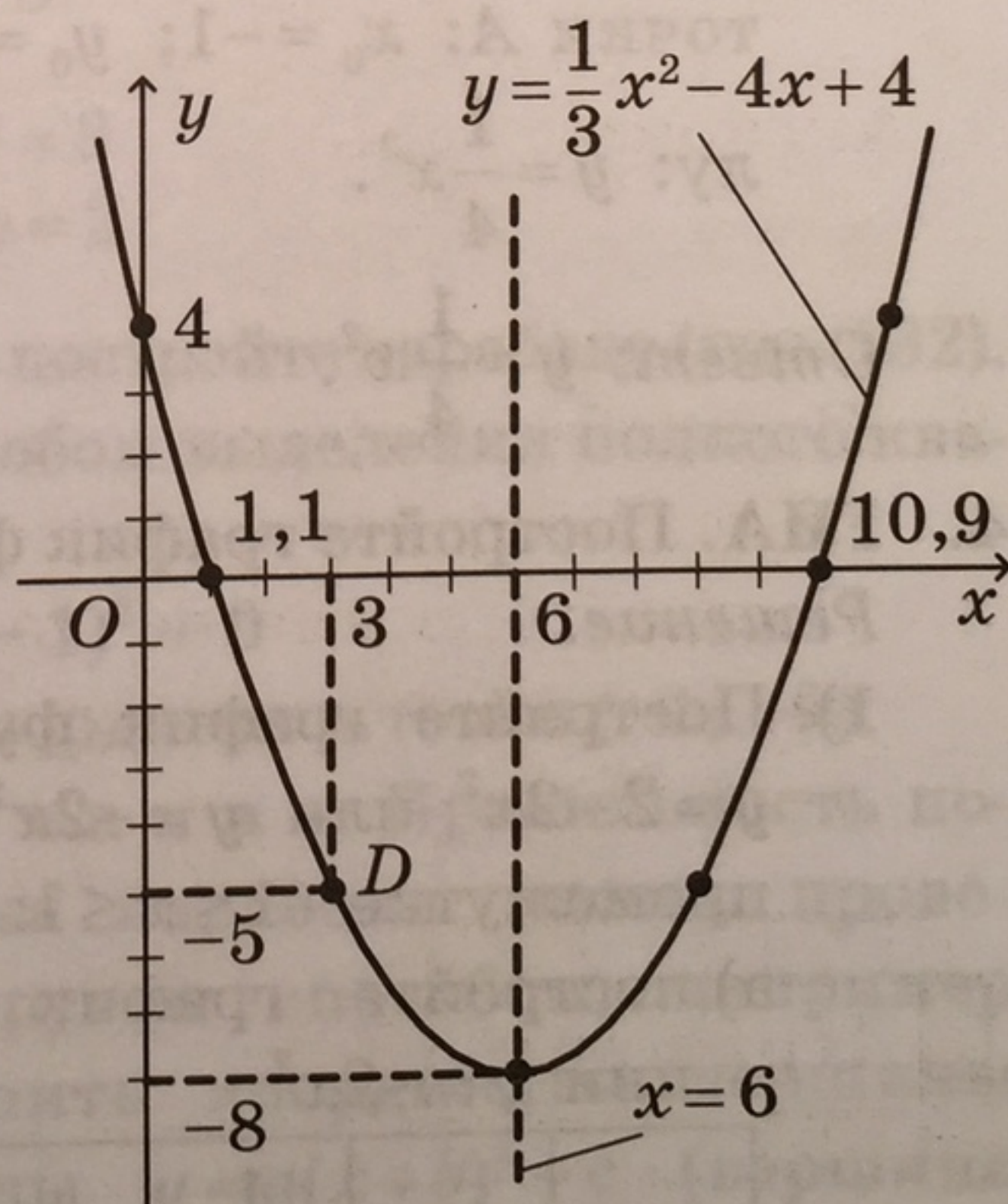


Рис. 130



б) ось симметрии  $x = 6$

в) точки пересечения с осью  $Ox$ :

$$y = 0; \frac{1}{3}x^2 + 4x + 4 = 0 \quad | \cdot 3$$

$$x^2 - 12x + 12 = 0$$

$$x_{1,2} = 6 \pm \sqrt{36 - 12}$$

$$x_1 = 6 + \sqrt{24} = 6 + 2\sqrt{6} \approx 10,9$$

$$x_2 = 6 - \sqrt{24} = 6 - 2\sqrt{6} \approx 1,1$$

$$x^2 + px + q = 0; p = 2m$$

$$x_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 - q}$$

$$\sqrt{24} \approx 2\sqrt{6}$$

г) точка пересечения с осью  $Oy$ :  $x = 0$ ;  $y = 4$ ; симметричная ей точка  $(12; 4)$

3. ГИА. Графиком квадратичной функции служит парабола с вершиной в начале координат и проходящая через точку  $A\left(-1; \frac{1}{4}\right)$ . Задайте эту функцию формулой.

Решение.

1). Общий вид параболы с вершиной в точке  $O(0; 0)$  задается формулой  $y = ax^2$ .

2). Найдите  $a$ , подставьте в формулу вместо  $x$  и  $y$  координаты

точки  $A$ :  $x_0 = -1$ ;  $y_0 = \frac{1}{4}$ ;  $\frac{1}{4} = (-1)^2 a$ ;  $\frac{1}{4} = a$ , получите формулу:  $y = \frac{1}{4}x^2$ .

Ответ:  $y = \frac{1}{4}x^2$ .

4. ГИА. Постройте график функции  $y = \begin{cases} 2 - 2x^2, & \text{если } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1, & \text{если } x < -1 \text{ и } x > 1 \end{cases}$

Решение.

1). Постройте график функции  $y = 2 - 2x^2$  или  $y = -2x^2 + 2$  на промежутке  $-1 \leq x \leq 1$ :

а) постройте график функции  $y = -2x^2$

$x$	0	$\frac{1}{2}$	1
$y$	0	$-\frac{1}{2}$	-2

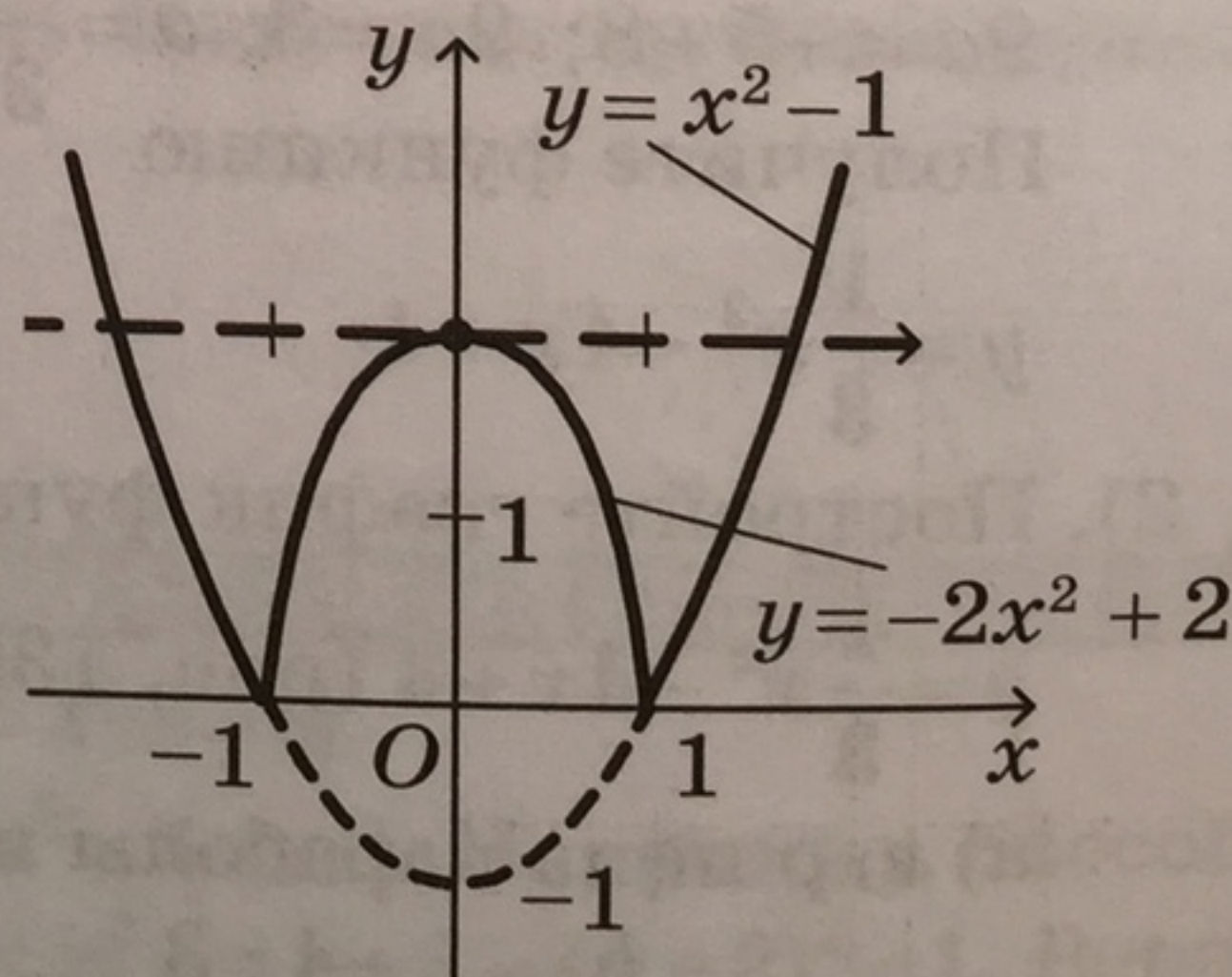


Рис. 131



- б) опустите ось  $Ox$  на 2 единицы  
 в) выделите часть графика  $y = -2x^2 + 2$  при  $-1 \leq x \leq 1$   
 2). Постройте график функции  $y = x^2 - 1$  при  $x > 1$  и  $x < -1$ .  
 а) постройте график функции  $y = x^2$ :

$x$	0	$\frac{1}{2}$	1
$y$	0	$\frac{1}{4}$	1

- б) опустите график функции  $y = x^2$  на 1 единицу вниз  
 в) выделите ветви графика при  $x > 1$  и  $x < -1$ ; получите график заданной функции, состоящий из двух частей (рис. 131)  
 5. ГИА. Парабола  $y = -x^2 + px + q$  пересекает ось абсцисс в точке  $(-2; 0)$ , а ось ординат в точке  $(0; 8)$ . Найдите  $p$  и  $q$  и постройте эту параболу.

*Решение.*

Подставьте координаты точек в уравнение параболы и решите систему уравнений:

1).  $x = -2; y = 0;$       2).  $x = 0; y = 8$

$$\begin{cases} -4 - 2p + q = 0 \\ 0 + p \cdot 0 + q = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} q = 8 \\ -4 - 2p + 8 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} q = 8 \\ p = 2 \end{cases}$$

Запишите уравнение  $y = -x^2 + 2x + 8$  и постройте параболу (рис. 132).

Например, постройте параболу способом выделения полного квадрата:

а)  $y = -(x^2 - 2x + 1 - 1 - 8); y = -(x - 1)^2 + 9$

б) задайте перенос осей с началом координат в точке  $(-1; -9)$

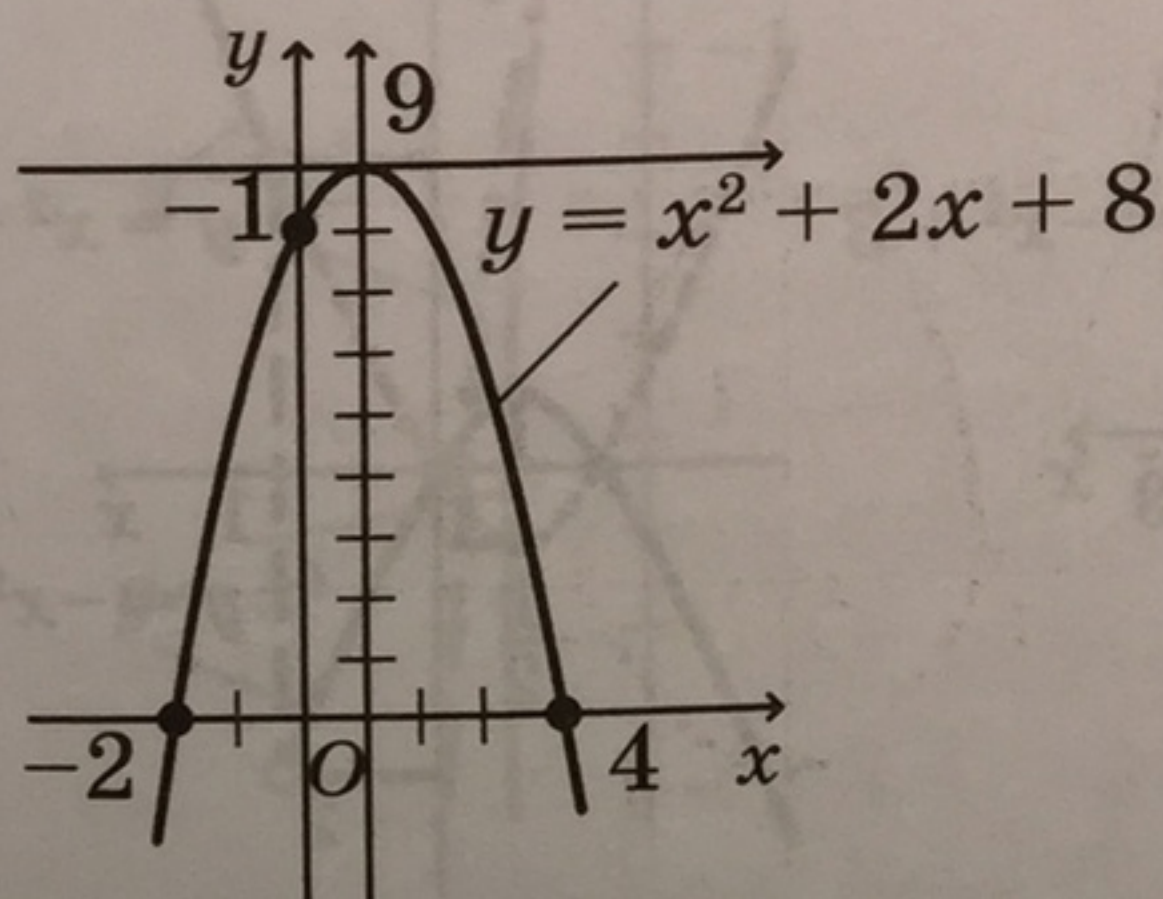


Рис. 132

**З а м е ч а н и е.** Правильность построения параболы можно проверить другим способом, например определить координаты вершины параболы  $y = a(x+b)^2 + c$  (вершина параболы — точка  $(-b; c)$ ) или найти точки пересечения с осью  $Ox$  и  $Oy$ .

Ответ:  $p = 2; q = 8$ .



## Проверь себя!

Постройте график функции.

1.  $y = -2(x+1)^2 + 1$  (рис. 133)      2.  $y = (2-x)(x-6)$  (рис. 134)

3. Парабола  $y = -x^2 + px + q$  пересекает ось абсцисс в точке  $(-5; 0)$ , а ось ординат в точке  $(0; 5)$ . Найдите  $p$  и  $q$  и постройте эту параболу (рис. 135).

Ответ: 3.  $y = -x^2 - 4x + 5$ .

1)

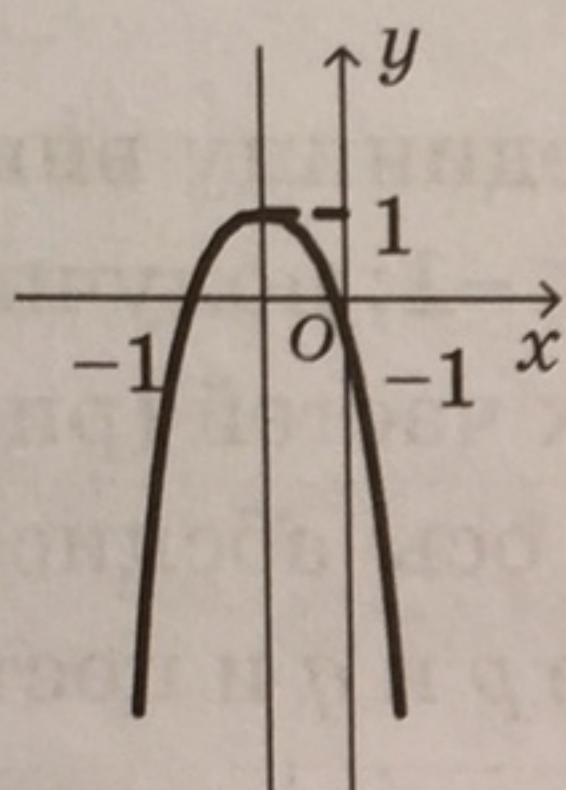


Рис. 133

2)

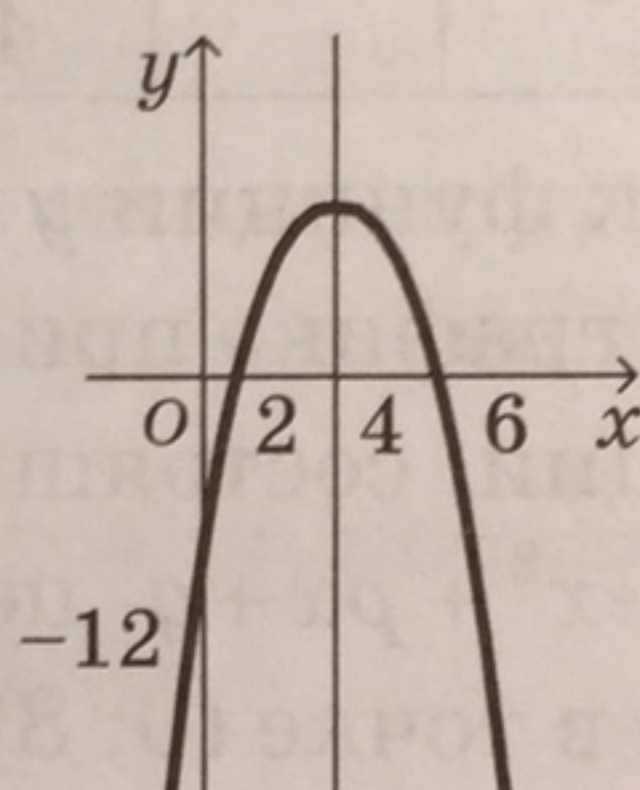


Рис. 134

3)

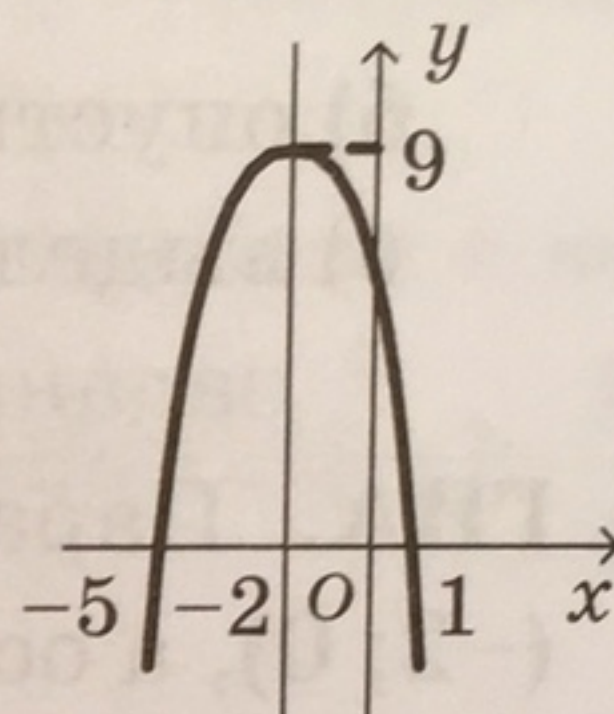


Рис. 135

## Попробуй-ка реши!

1. Найдите  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , если точка  $M(-1; -7)$  — вершина параболы, а точка  $N(0; -4)$  лежит на графике функции  $y = ax^2 + bx + c$ .

Ответ:  $a = 3$ ;  $b = 6$ ;  $c = -4$ .

2. Постройте график функции.

1).  $y = x^2 - \frac{|x|}{x}$

(рис. 136)

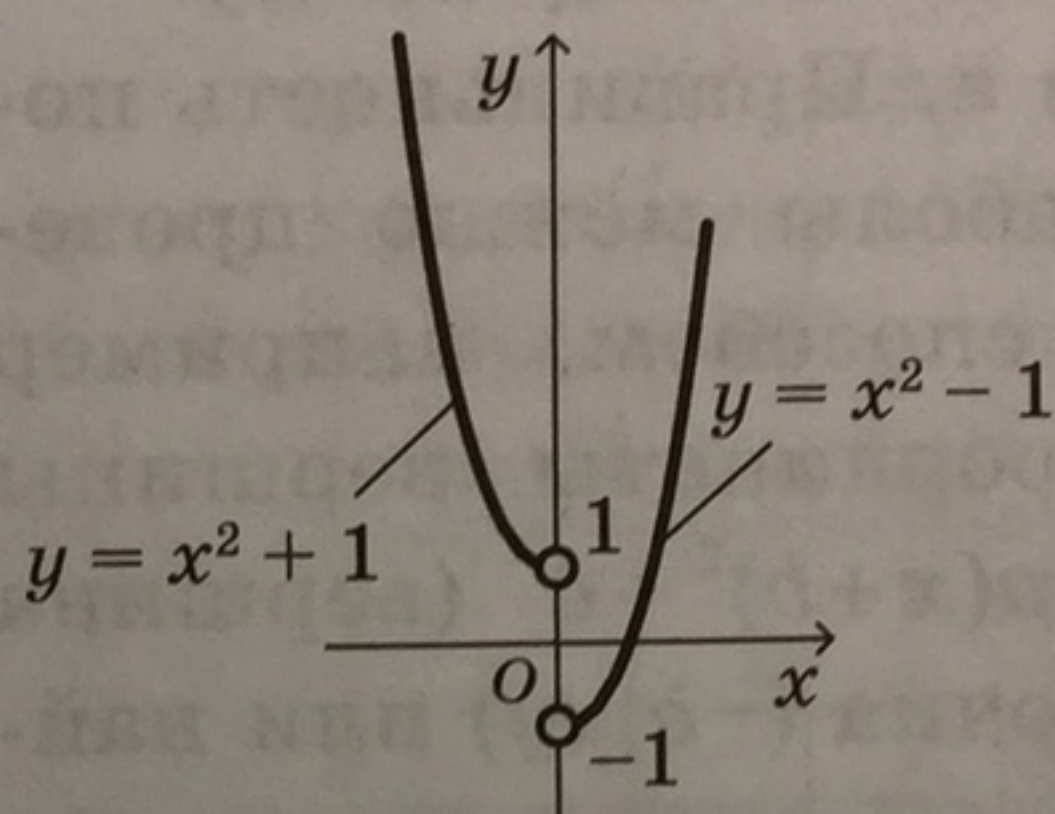


Рис. 136

2).  $y = 1 - \sqrt{x^4 - 4x^2 + 4}$

(рис. 137)

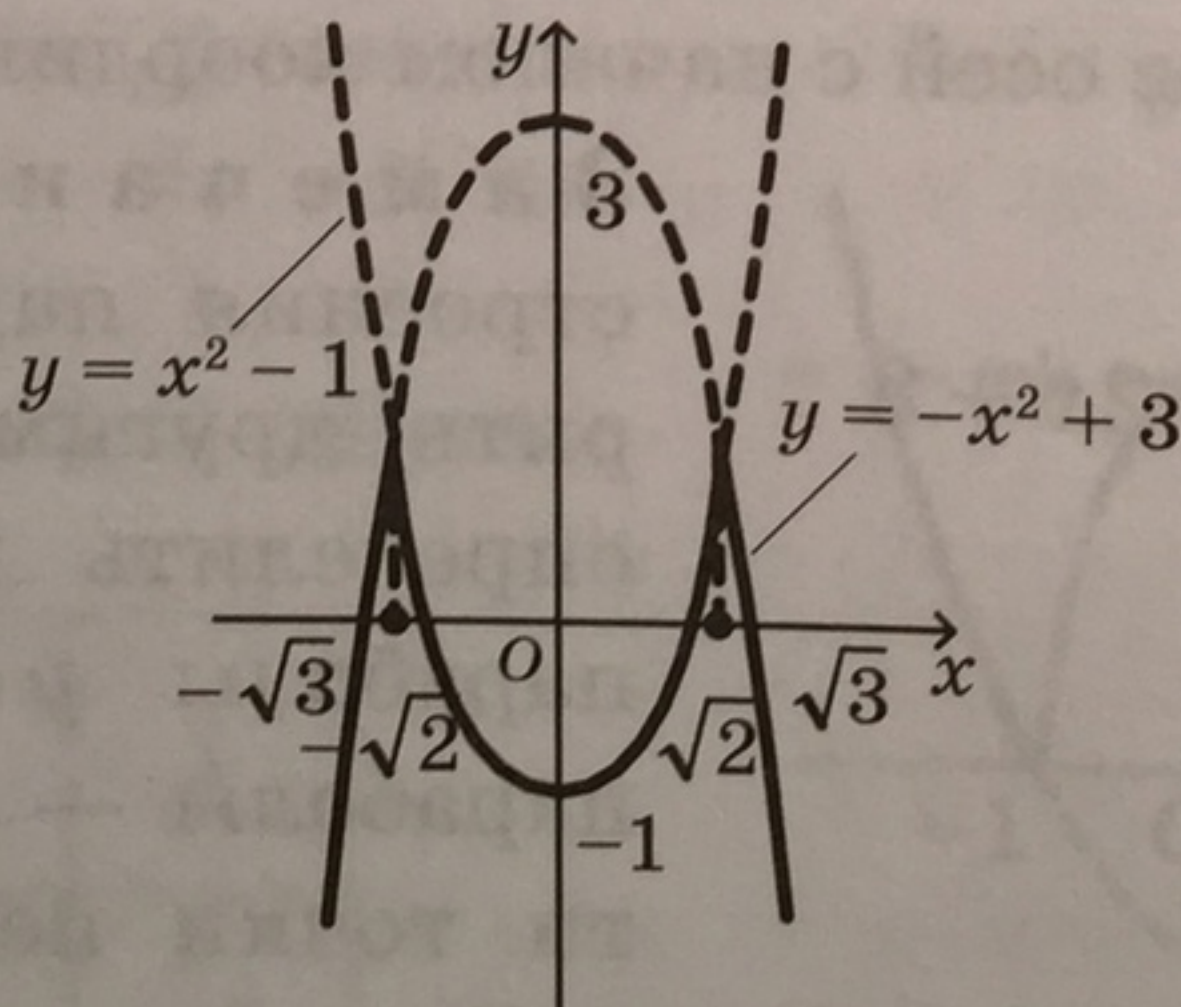


Рис. 137

3).  $y = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} \cdot x$

(рис. 138)

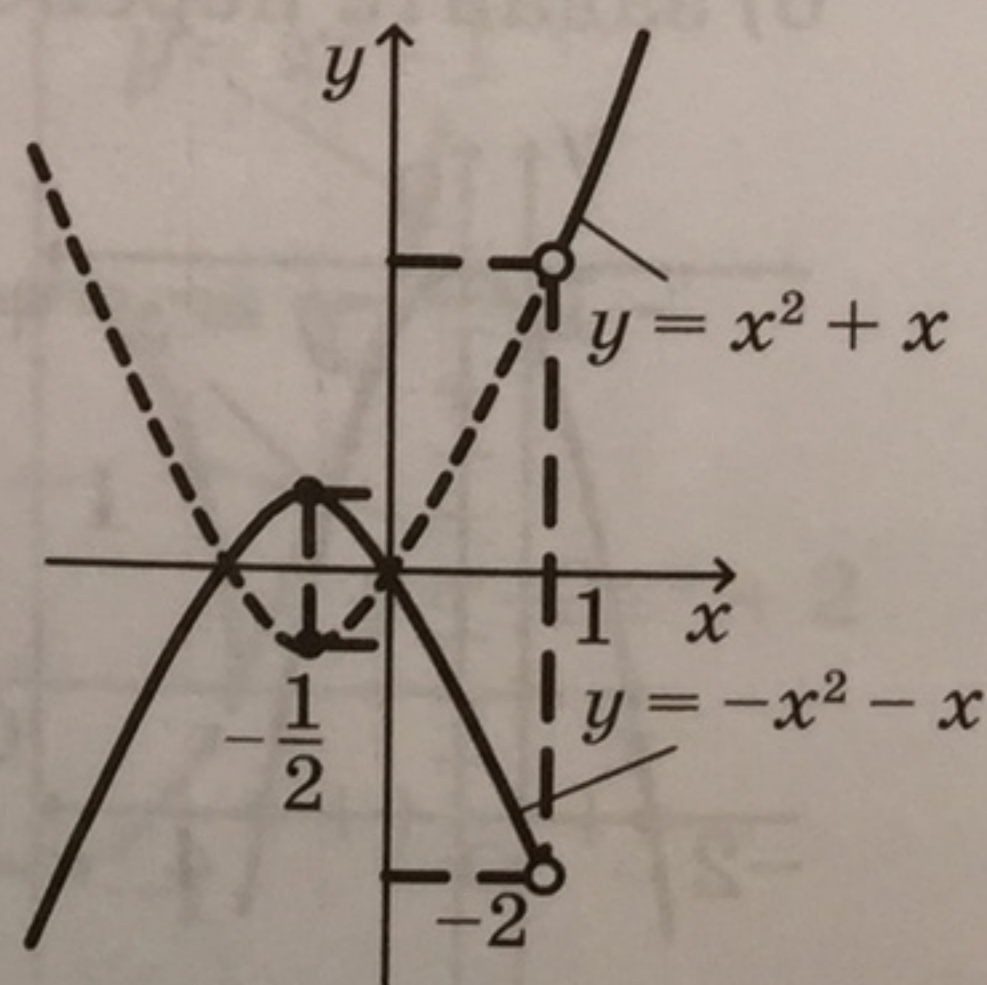


Рис. 138



3. При каких значениях  $b$  графики  $y = 2bx^2 + 2x + 1$  и  $y = 5x^2 + 2bx - 2$  пересекаются в одной точке? (Подсказка:  $a = 0$  или  $D = 0$  для  $y = ax^2 + bx + c$ .)

Ответ: 2,5; 4.

## Алгоритм

144

### Построение графика функции $y = x^3$ и ее исследование

График функции  $y = x^3$  называется кубической параболой. Построим график по точкам (рис. 139):

$x$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = x^3$	-8	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	8

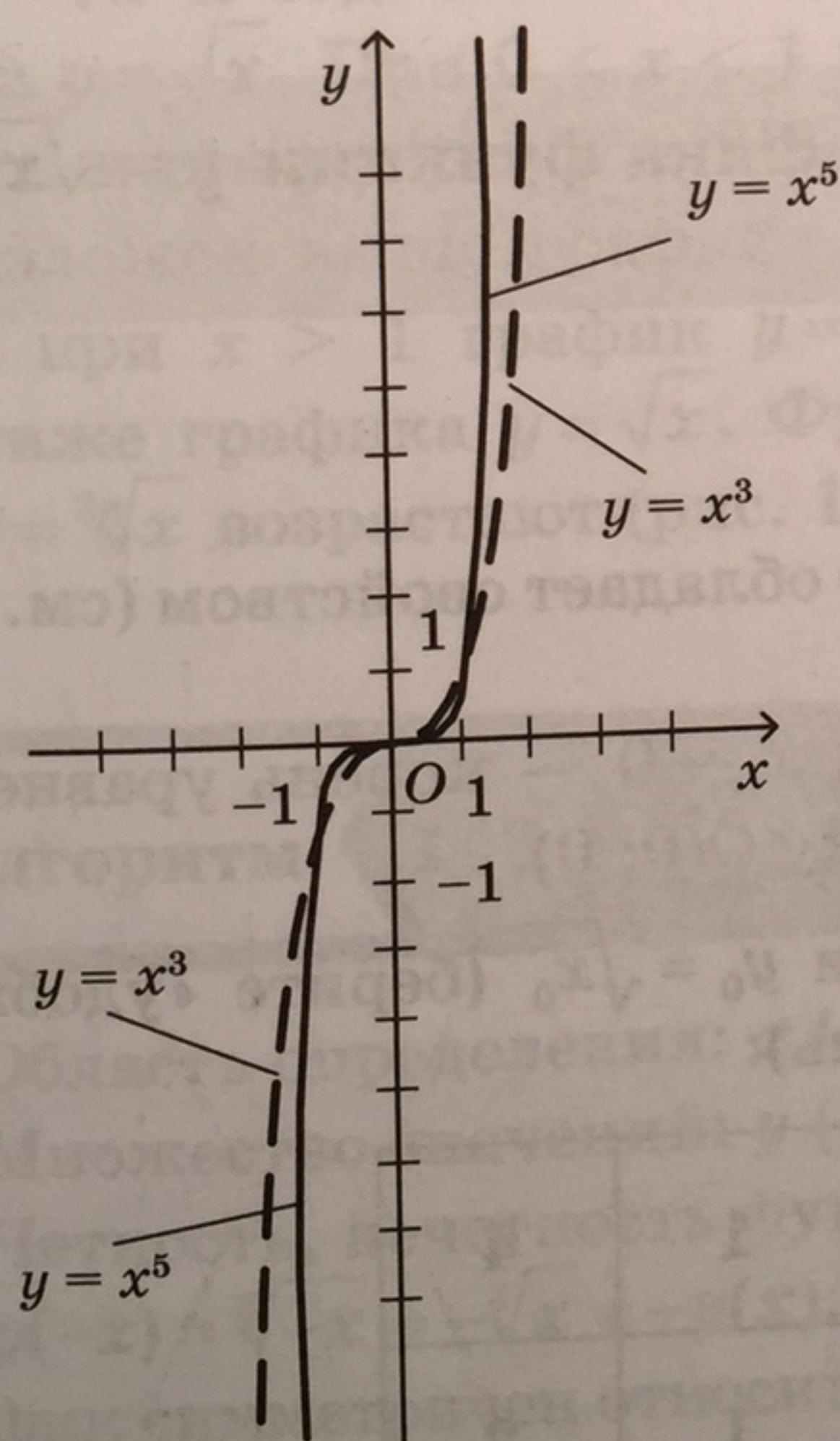


Рис. 139

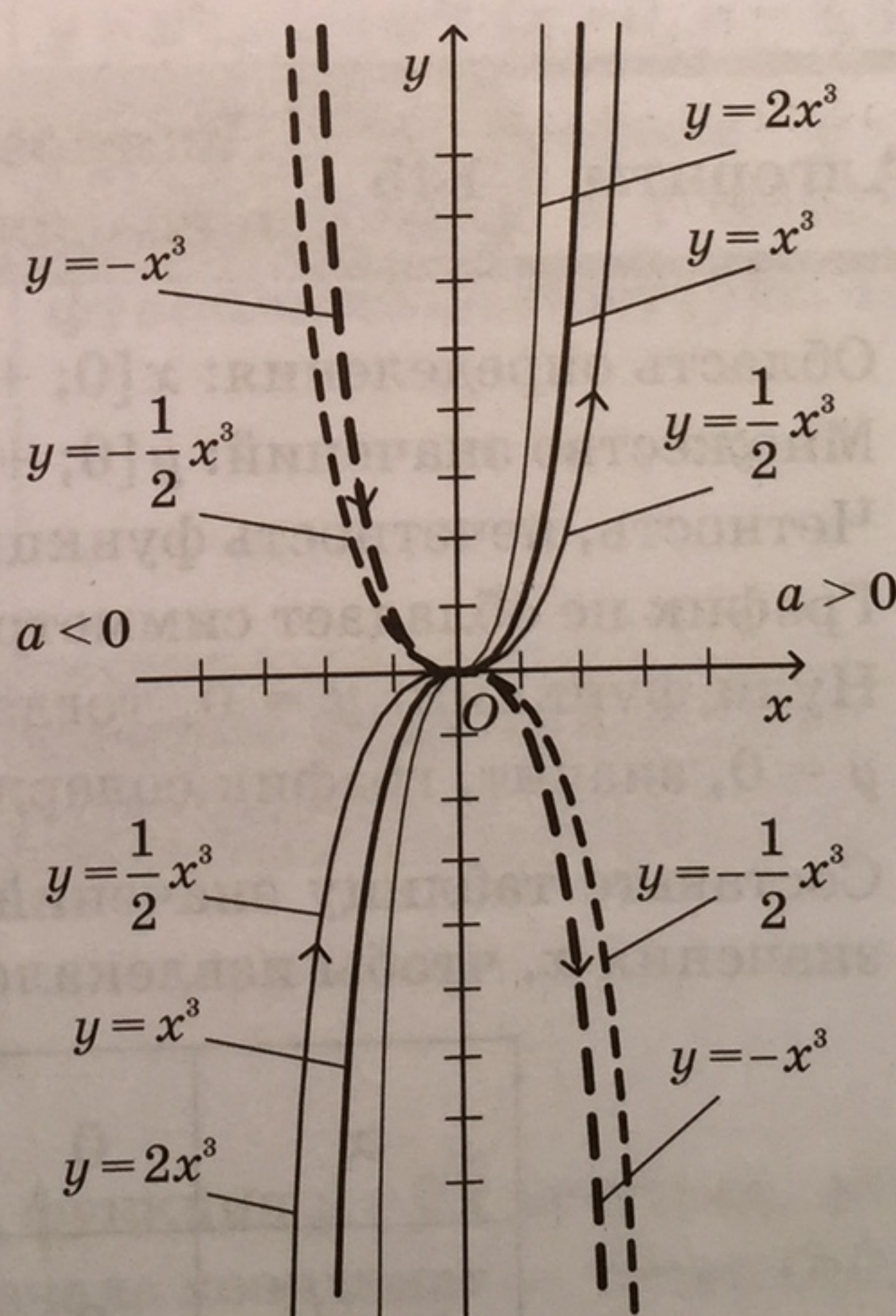


Рис. 140



### Свойства функции $y = x^3$

1. Область определения:  $x (-\infty; +\infty)$  (вся ось  $Ox$ ).
2. Множество значений:  $y (-\infty; +\infty)$  (вся ось  $Oy$ ).
3. Нули функции:  $y = 0$ , если  $x^3 = 0$ ;  $x = 0$  — корень; график проходит через точку  $O(0; 0)$ .
4. Четность, нечетность функции:  
 $y(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -y(x)$  — нечетная функция, ее график симметричен относительно начала координат — точки  $O(0; 0)$ . Используя симметрию графика, можно построить график при  $x \geq 0$ , а затем симметрично его отобразить относительно  $O(0; 0)$ .
5. Наибольшего и наименьшего значений функция не имеет по второму свойству.
6. Возрастание, убывание функции. Функция  $y = x^3$  возрастает,  $y = -x^3$  убывает (видно по графику).
7. Свойства  $y = ax^3$  изучите по графику (рис. 140).

#### Алгоритм

145

#### Построение графика функции $y = \sqrt{x}$ и ее свойства

1. Область определения:  $x [0; +\infty)$ .
2. Множество значений:  $y [0; +\infty)$ .
3. Четность, нечетность функции — не обладает свойством (см. п.1). График не обладает симметрией.
4. Нули функции:  $y = 0$ , тогда  $\sqrt{x} = 0$ ;  $x = 0$  — корень уравнения;  $y = 0$ , значит, график содержит точку  $O(0; 0)$ .
5. Составьте таблицу значений  $x_0 \geq 0$  и  $y_0 = \sqrt{x_0}$  (берите «удобные» значения  $x$ , чтобы извлекался корень):

$x$	0	$\frac{1}{4}$	1	4
$y = \sqrt{x}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2



6. Соедините точки  $(0; 0)$ ;  $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ ;  $(1; 1)$ ;  $(4; 2)$  плавной линией и продолжите ее вправо вверх — получите график функции  $y = \sqrt{x}$  (рис. 141).
7. Наименьшее значение  $y = 0$  при  $x = 0$ . Наибольшего значения нет.
8. Функция  $y = \sqrt{x}$  возрастает, так как если  $x_2 > x_1$ , то  $\sqrt{x_2} > \sqrt{x_1}$ .

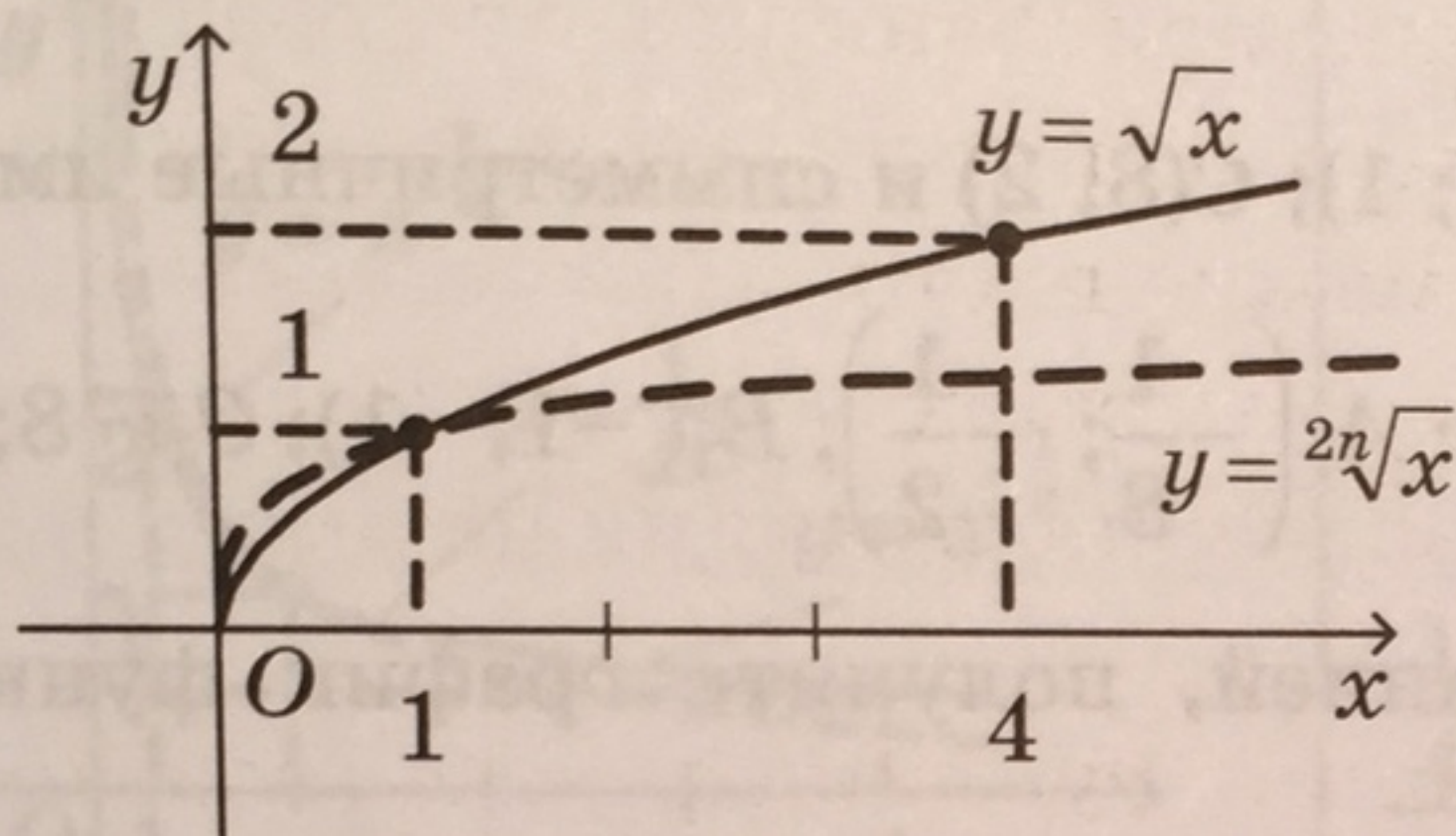


Рис. 141

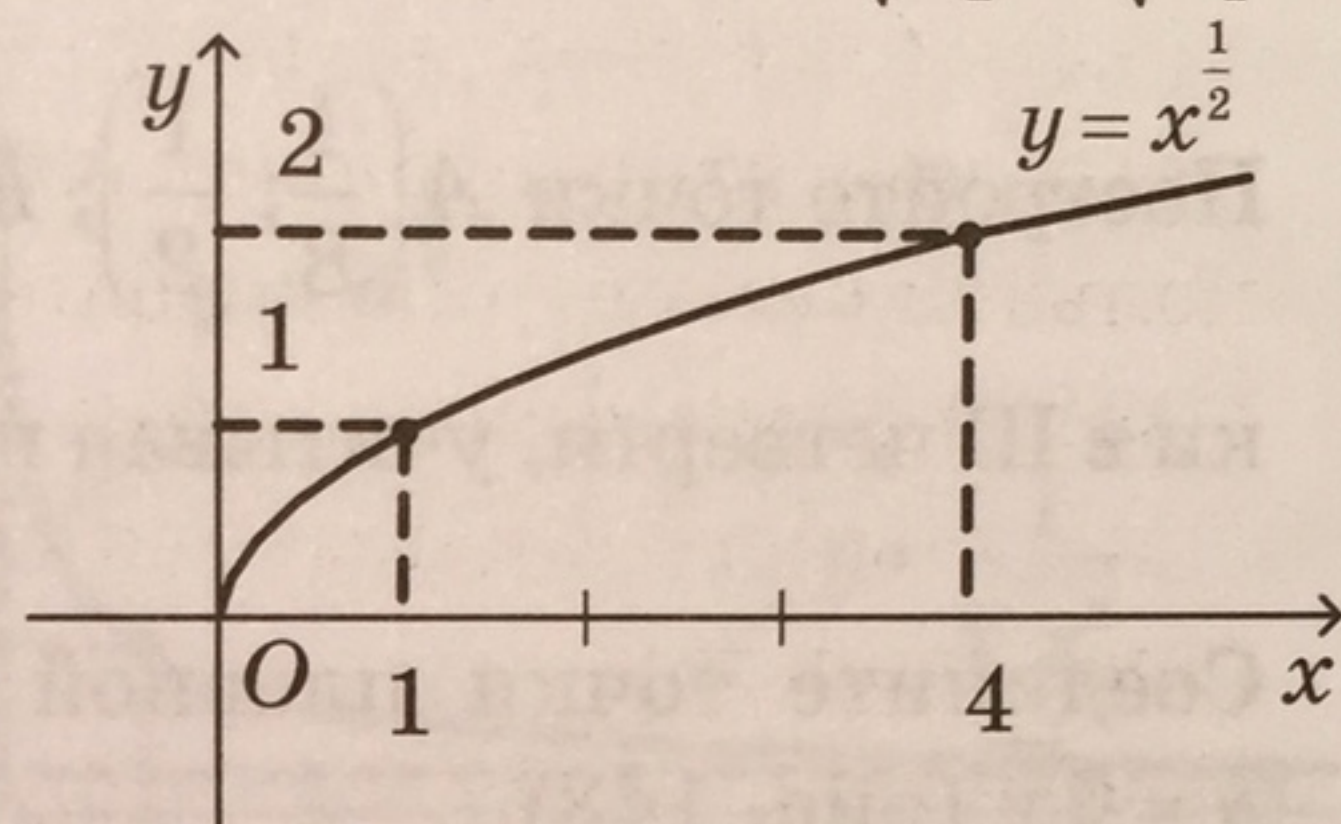


Рис. 142

Графики функций  $y = \sqrt[2n]{x}$ :  $y = \sqrt[4]{x}$ ;  $y = \sqrt[6]{x}$  и т. д. имеют вид графика  $y = \sqrt{x}$ . При  $0 < x < 1$  график функции  $y = \sqrt[2n]{x}$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) расположен выше графика  $y = \sqrt{x}$ , а при  $x > 1$  график  $y = \sqrt[2n]{x}$  — ниже графика  $y = \sqrt{x}$ . Функции  $y = \sqrt[2n]{x}$  возрастают (рис. 141).

Графики функций  $y = x^{\frac{1}{4}}$ ;  $y = x^{\frac{1}{6}}$  ...  $y = x^{\frac{1}{2n}}$  ( $x > 0$ ,  $n = 2, 3, \dots$ ) имеют вид графика  $y = \sqrt{x}$  и расположены в I четверти, функция возрастает (рис. 142).

**Алгоритм****146****Построение графика функции  $y = \sqrt[3]{x}$  и ее свойства**

1. Область определения:  $x \in (-\infty; +\infty)$ .
2. Множество значений:  $y \in (-\infty; +\infty)$ .
3. Четность, нечетность функции:  
 $y(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -y(x)$ , значит, функция  $y = \sqrt[3]{x}$  нечетная, ее график симметричен относительно начала координат — точки  $O(0; 0)$ .
4. Нули функции:  $y = 0$ , тогда  $\sqrt[3]{x} = 0$ ,  $x = 0$  — корень уравнения;  $y(0) = 0$ , значит, график проходит через начало координат  $O(0; 0)$ .



5. Составьте таблицу значений  $x > 0$  и  $y = \sqrt[3]{x}$  (берите «удобные» значения  $x$ , чтобы извлекался корень):

$x$	$\frac{1}{8}$	1	8
$y = \sqrt[3]{x}$	$\frac{1}{2}$	1	2

6. Постройте точки  $A\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{2}\right)$ ;  $B(1; 1)$ ;  $C(8; 2)$  и симметричные им точки в III четверти, учитывая п. 2:  $A_1\left(-\frac{1}{8}; -\frac{1}{2}\right)$ ;  $B_1(-1; -1)$ ;  $C_1(-8; -2)$ .
7. Соедините точки плавной линией, получите график функции  $y = \sqrt[3]{x}$  (рис. 143).
8. Наибольшего и наименьшего значений нет по 2-му свойству.
9. Функция  $y = \sqrt[3]{x}$  возрастает, так как если  $x_2 > x_1$ , то  $\sqrt[3]{x_2} > \sqrt[3]{x_1}$ .

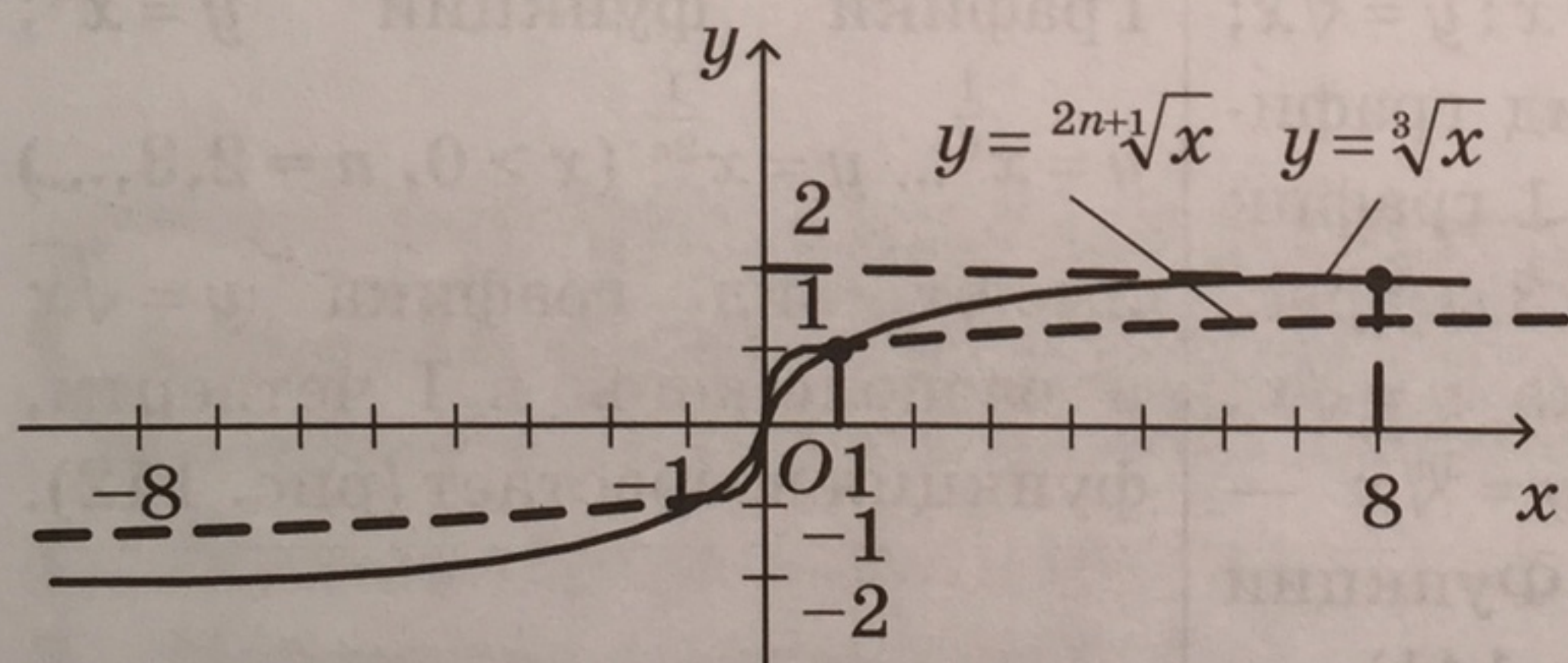


Рис. 143

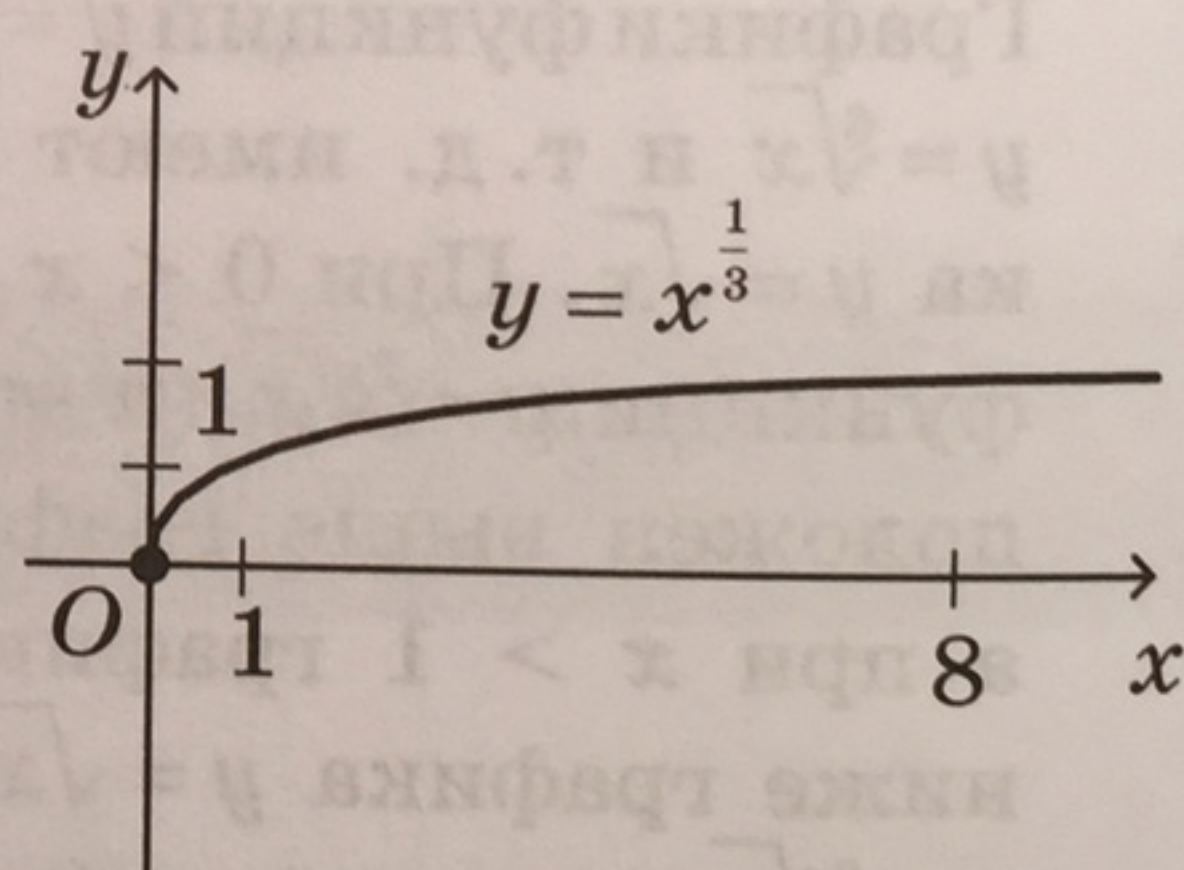


Рис. 144

Графики функций  $y = \sqrt[5]{x}$ ;  $y = \sqrt[7]{x}$ ;  $y = \sqrt[2n+1]{x}$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) имеют вид графика  $y = \sqrt[3]{x}$ , при  $|x| < 1$  график расположен выше графика  $y = \sqrt[3]{x}$ , при  $|x| > 1$  график ближе к оси  $Ox$  относительно графика  $y = \sqrt[3]{x}$  (рис. 143).

Графики функций  $y = x^{\frac{1}{3}}$ ;  $y = x^{\frac{1}{5}}$ ;  $\dots$ ;  $y = x^{\frac{1}{2n+1}}$  имеют вид графика  $y = \sqrt[3]{x}$  при  $x \geq 0$  (рис. 144).

Рассмотрим графики функций  $y = x^{\frac{1}{2}}$ ;  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ;  $y = x^{\frac{2}{3}}$ ;  $y = \sqrt[3]{x^2}$ .

Выполним построение схемы графиков по точкам, а свойства изучим сами по графикам (рис. 145—147).



1.  $y = x^{-\frac{1}{2}}; y = \frac{1}{\sqrt{x}}; x > 0; y > 0$

$x$	$\frac{1}{4}$	1	4	9
$y$	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

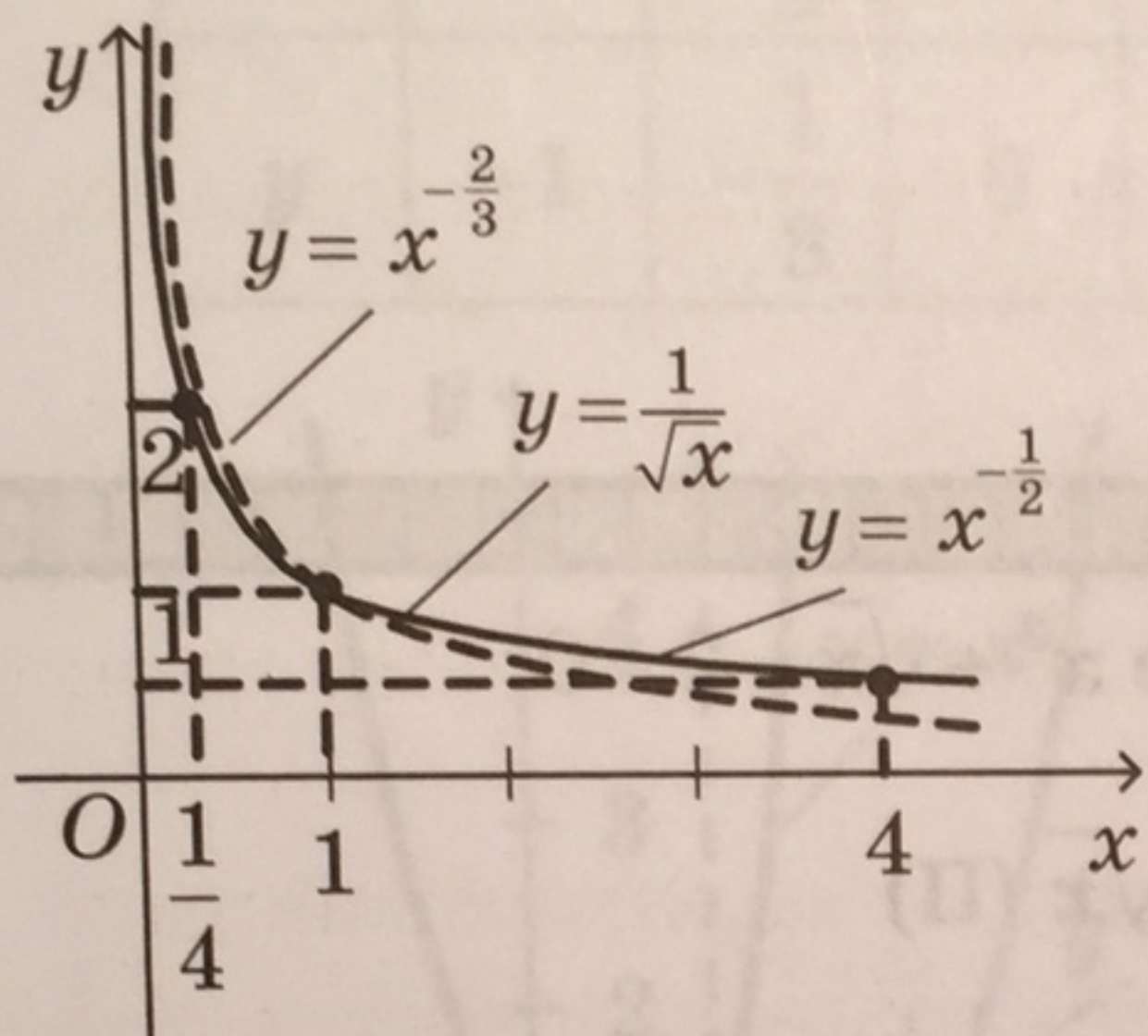


Рис. 145

2.  $y = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}; y = x^{-\frac{2}{3}}; x > 0; y > 0$

$x$	$\frac{1}{8}$	1	8	27
$y$	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$

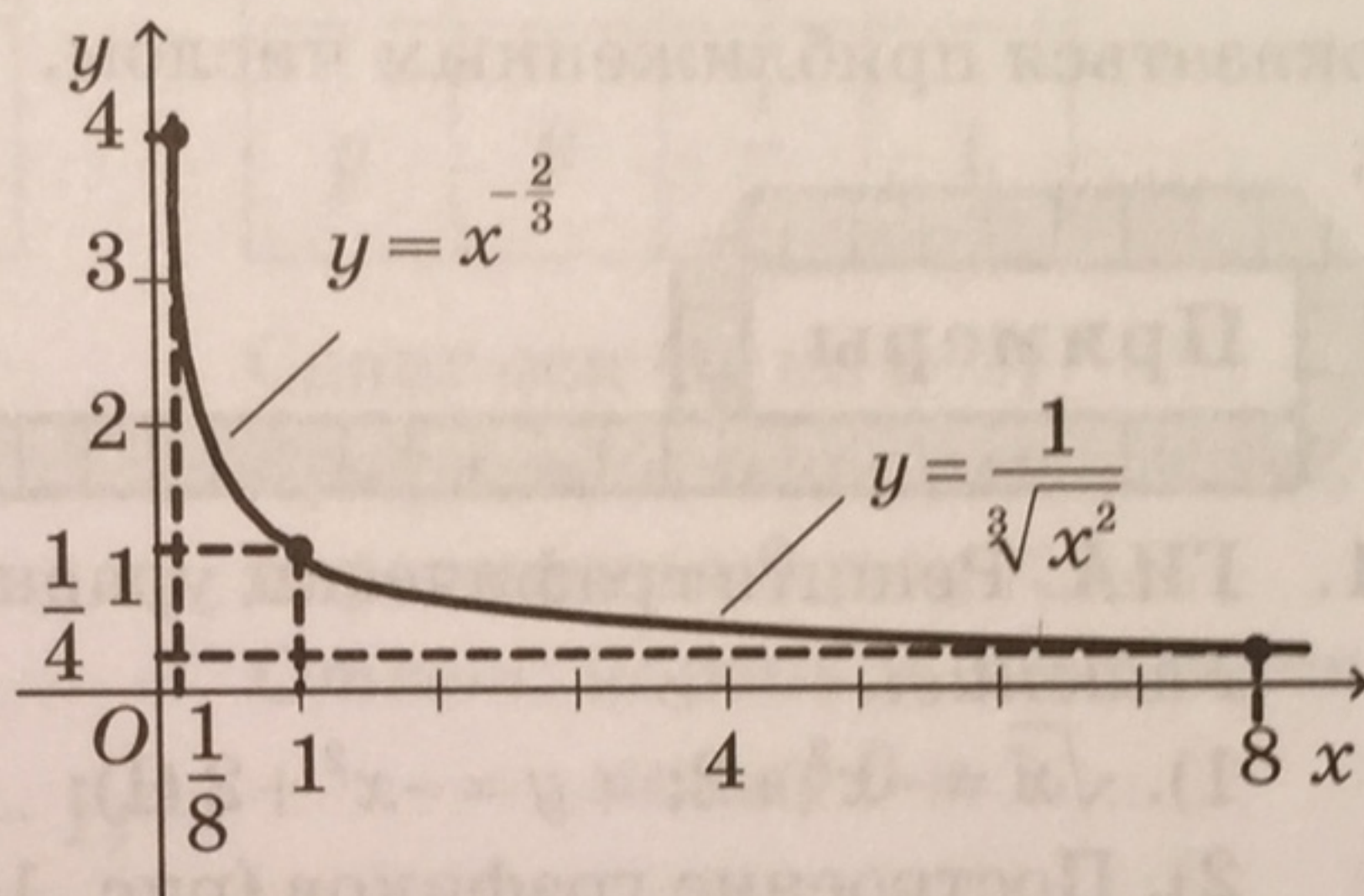


Рис. 146

3.  $y = \sqrt[3]{x^2}$   
 $x (-\infty; +\infty); y \geq 0$

$x$	0	$\frac{1}{8}$	1	8
$y$	0	$\frac{1}{4}$	1	4

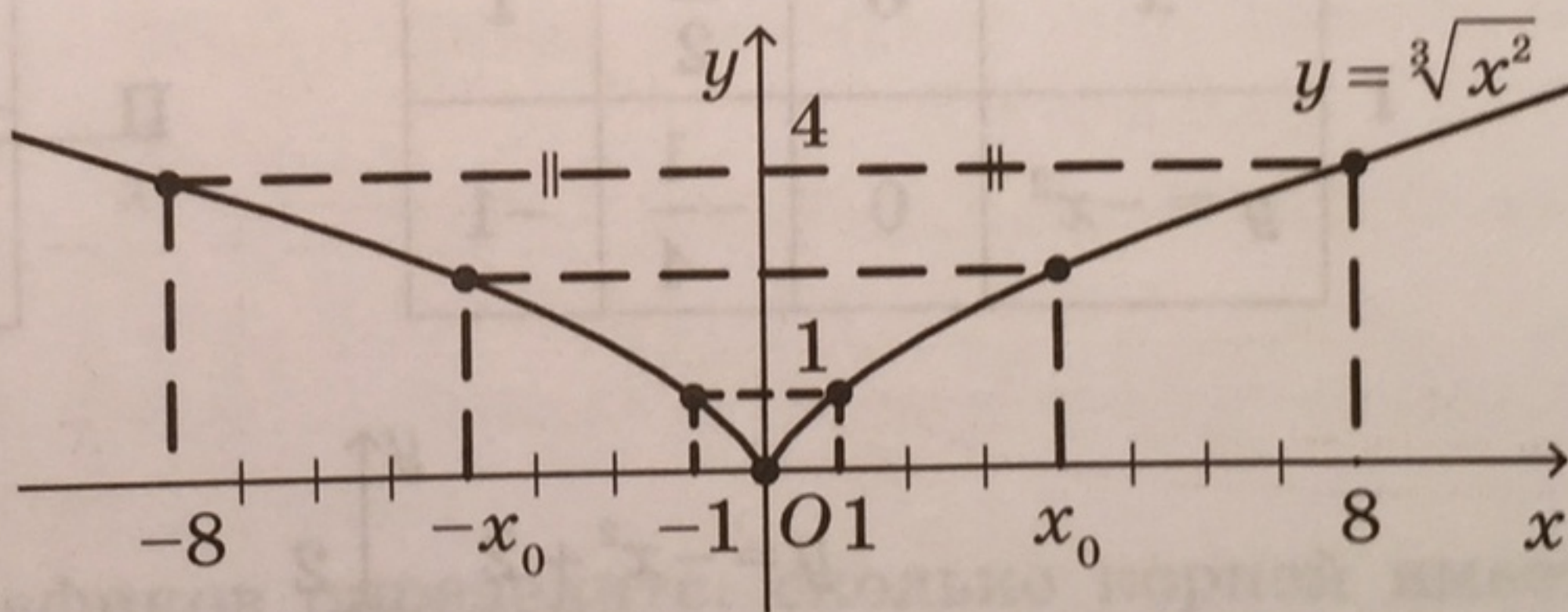


Рис. 147

**Вывод.** Функции  $y = x^{-\frac{m}{n}}$  имеют вид графика  $y = x^{-\frac{1}{2}}$  ( $x > 0$ ), функции  $y = x^{\frac{m}{n}}$  имеют вид графика функции  $y = \sqrt[3]{x^2}$  при  $x \geq 0$ .

## Алгоритм

147

## Графическое решение уравнений

1. Представьте уравнение в виде двух известных функций. Для этого перенесите в правую часть уравнения члены, составляющие одну из функций, и обозначьте каждую часть уравнения буквой  $y$ .



2. Постройте график каждой функции в одной системе координат.
3. Из точек пересечения графиков опустите перпендикуляры на ось  $Ox$  и запишите значения абсцисс точек пересечения. Это и будет решение уравнения. Если нет общих точек у графиков, то уравнение не имеет решения.

4. Ответ запишите числами.

**З а м е ч а н и е.** При графическом решении уравнения ответ может оказаться приближенным числом.

### Примеры

1. ГИА. Решите графически уравнение  $x^2 + \sqrt{x} - 2 = 0$ .

*Решение.*

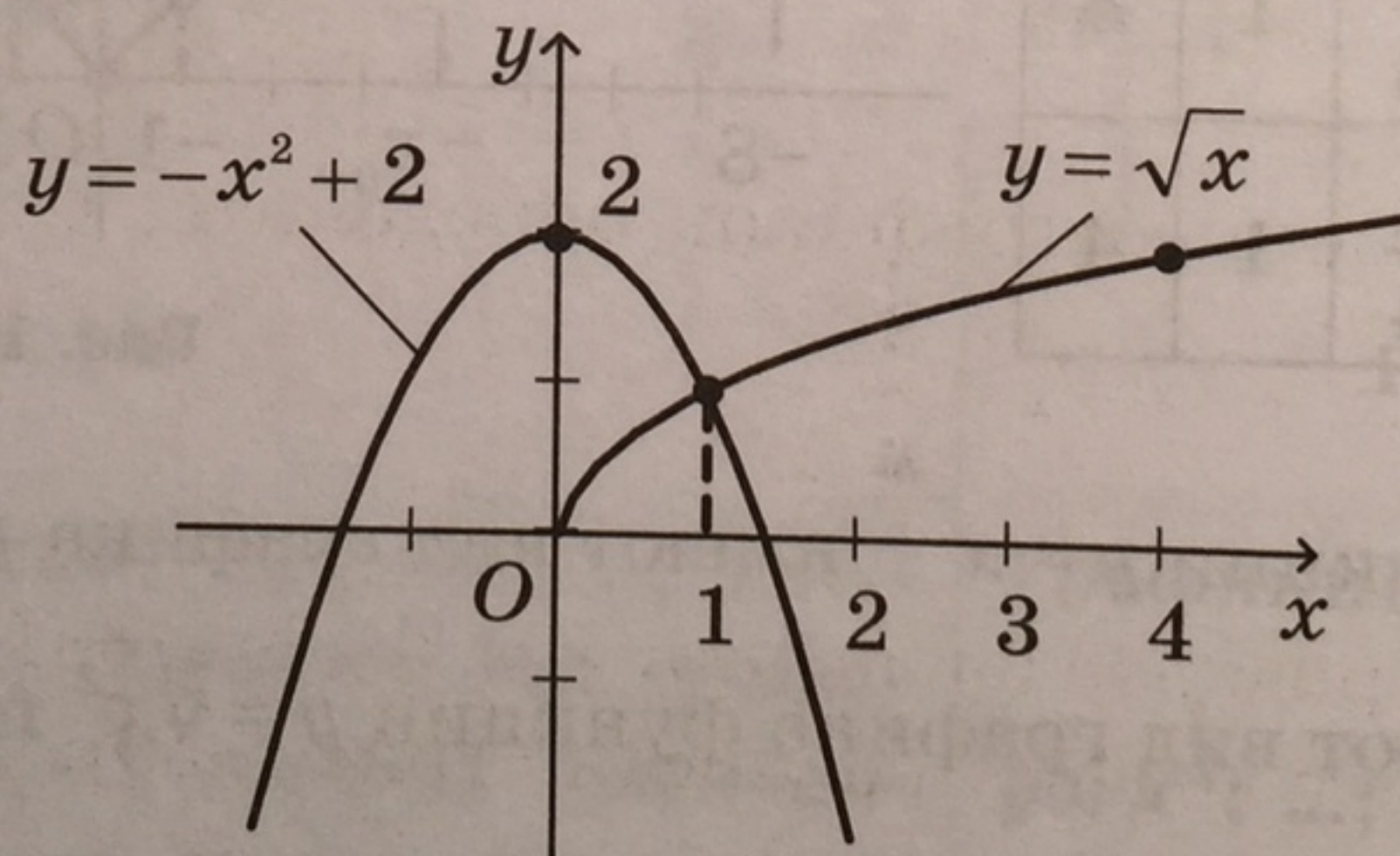
1).  $\sqrt{x} = -x^2 + 2$ ;  $y = -x^2 + 2$  (I);  $y = \sqrt{x}$  (II)

2). Построение графиков (рис. 148):

I	$x$	0	$\frac{1}{2}$	1
	$y = -x^2$	0	$-\frac{1}{4}$	-1

II	$x$	0	$\frac{1}{4}$	1	4
	$y$	0	$\frac{1}{2}$	1	2

Сдвиг оси  $Ox$   
на 2 единицы  
вниз



Ответ: 1.

Рис. 148

2. ГИА. С помощью графиков покажите, что уравнение  $x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$  имеет только один корень. Найдите два последовательных целых числа, между которыми находится этот корень.



Решение.

1).  $x^3 = x^2 - 2x + 1$ , получим две функции  $y = x^3$  и  $y = x^2 - 2x + 1$  или  $y = (x - 1)^2$

2). Построение графиков (рис. 149):

$$y = x^3 \text{ (I)}$$

$x$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1
$y$	-1	$-\frac{1}{8}$	0	1

$$y = (x - 1)^2 \text{ (II)}$$

$x$	0	$\frac{1}{2}$	1
$y$	0	$\frac{1}{4}$	1

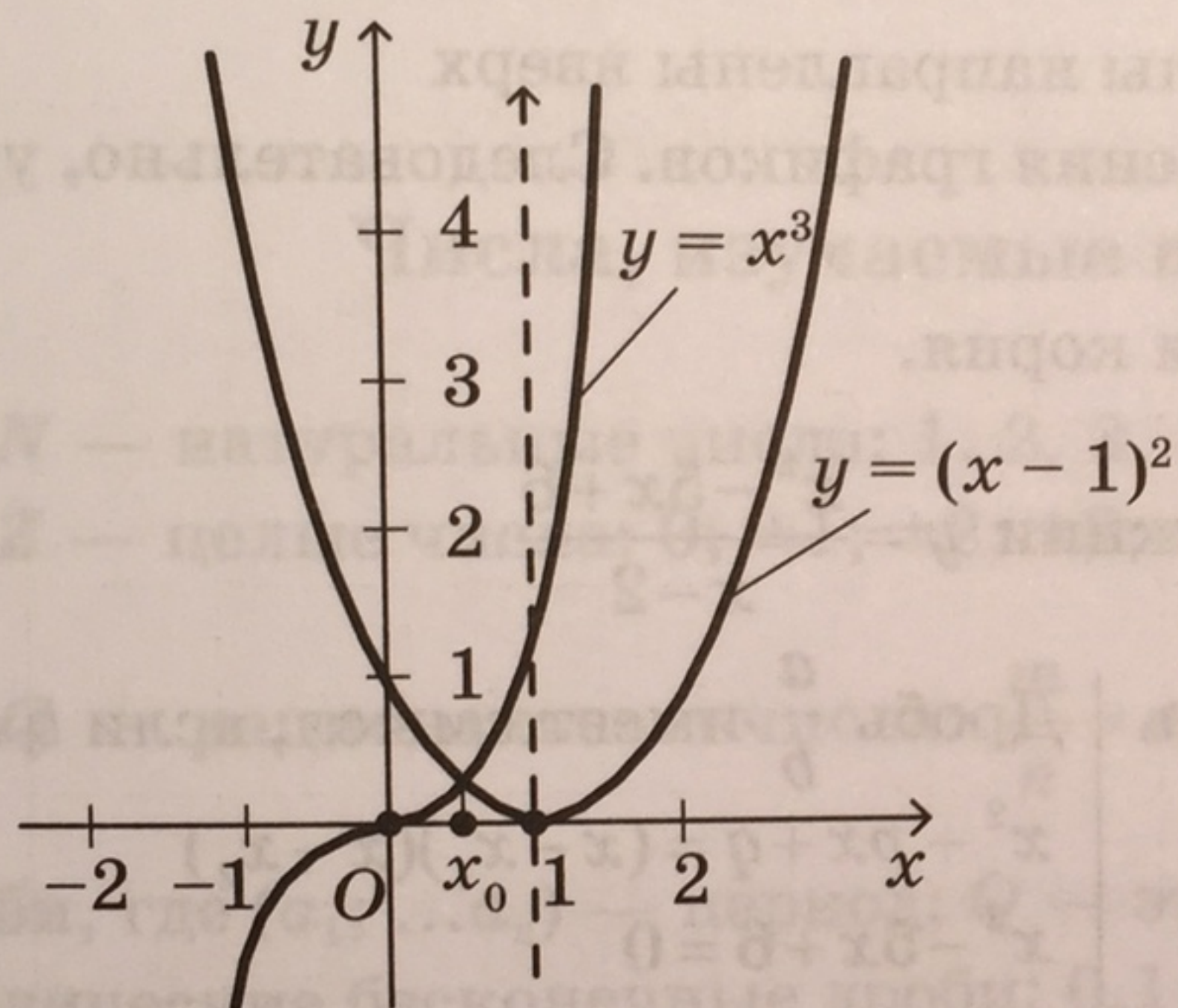


Рис. 149

Сдвиг оси  $Oy$  на  $(-1)$

Графики имеют одну точку пересечения  $0 < x_0 < 1$ .

Ответ: корень  $x_0$  находится между 0 и 1.

3. ГИА. С помощью графиков определите, сколько корней имеет уравнение  $x^2 + 2x - 4 = \frac{3}{x}$ .

Решение.

1). Рассмотрим две функции:  $y = x^2 + 2x - 4$  (I) и  $y = \frac{3}{x}$  (II).

2). Постройте графики функции (рис. 150):

$$y = x^2 + 2x - 4 \text{ (I)}$$

$$y = \frac{3}{x} \text{ (II)}$$

а) Вершина параболы  $A(-1; -5)$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$y_0 = 1 - 2 - 4 = -5$$

$x$	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	3
$y$	-1	-3	-6	6	3	1



б) Ось симметрии  $x = -1$

в) Точки пересечения с осью

$$Ox: y = 0, \text{ то } x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+4}$$

$$x_1 = -1 + \sqrt{5} \approx 1,2$$

$$x_2 = -1 - \sqrt{5} \approx -3,2$$

г) Точка пересечения с осью  $Oy$

и симметричная ей точка:

$$x = 0; y = -4$$

$$x = -2; y = -4$$

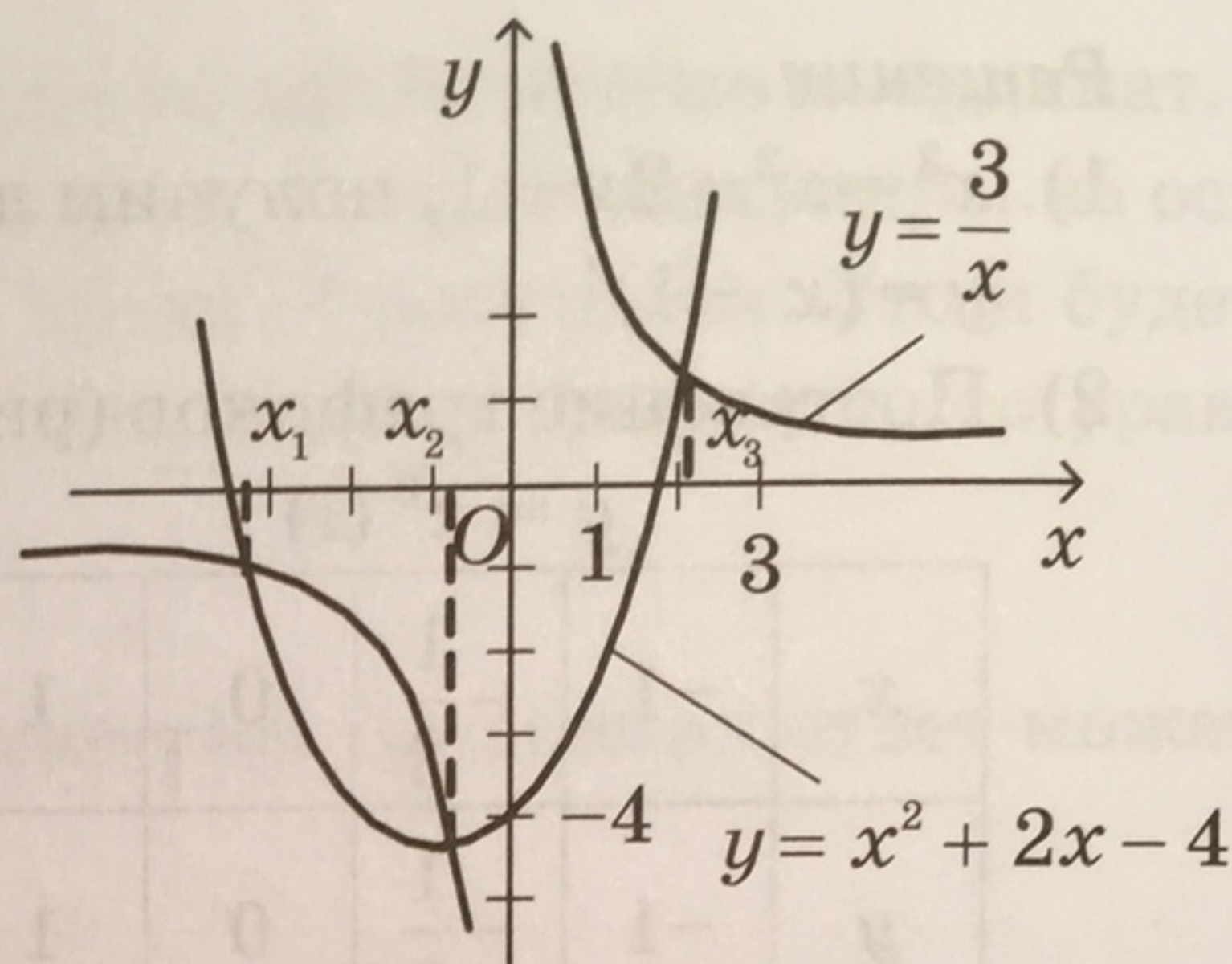


Рис. 150

д)  $a = 1; a > 0$ , ветви параболы направлены вверх

Получили три точки пересечения графиков. Следовательно, уравнение имеет три корня.

Ответ: уравнение имеет три корня.

4. ГИА. Постройте график функции  $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ .

Решение.

1). ОДЗ:  $x$  — любое число, кроме  $x = 2$

2). Упростите дробь:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 2} = x - 3$$

Дробь  $\frac{a}{b}$  имеет смысл, если  $b \neq 0$

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 3$$

3). Постройте график функции:  $y = x - 3$  при  $x \neq 2$  (рис. 151)

$x$	0	3
$y$	-3	0

Ответ: график функции  $y = f(x)$  есть прямая  $y = x - 3$  на области определения при  $x \neq 2$ .

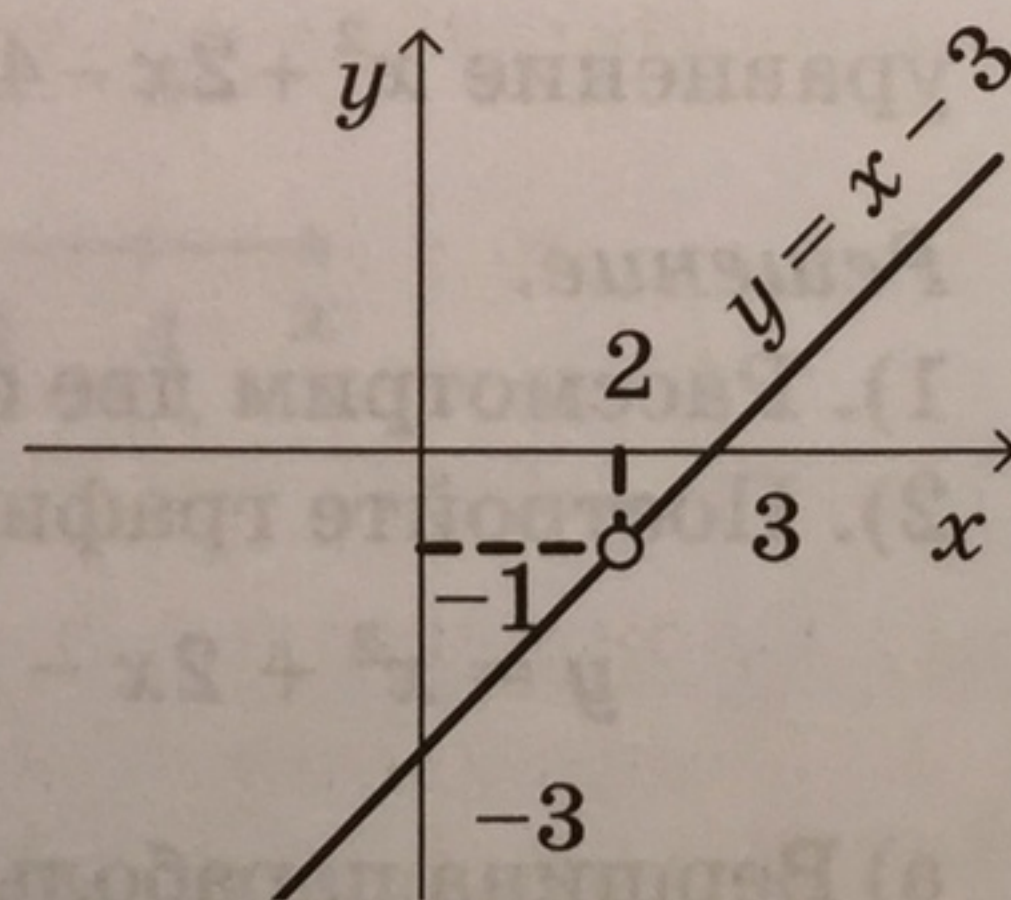


Рис. 151

**Проверь себя!**

Решите графически уравнение  $x^2 + x - \frac{2}{x} = 0$ .

Ответ: 1.



## Приложение

### Числа, изучаемые в 5–9-м классах

$N$  — натуральные числа: 1, 2, 3, 4, 5...

$Z$  — целые числа: 0;  $\pm 1$ ;  $\pm 2$ ;  $\pm 3$ ;  $\pm 4$ ...

$Q$  — рациональные числа:  $\frac{m}{n} = a_0, (a_1 a_2 \dots a_n)$  — периодические

дроби, где  $(a_1; \dots a_n)$  — период;  $Q$  — это десятичные конечные или периодические бесконечные дроби: 0,1; -2,35; 1,(3)...

$\overline{Q}$  — иррациональные числа — бесконечные десятичные непериодические дроби:  $\pi$ ;  $\sqrt{2}$ ; 1,1010010001...

$R$  — действительные числа: рациональные и иррациональные числа (бесконечные десятичные дроби)

### Действия над числами

1. Сложение:  $a + b = c$  — сумма.
2. Умножение:  $a \cdot b = c$  — произведение.
3. Возведение в натуральную степень:  $a^n = b$  — степень.
4. Вычитание:  $a - b = c$  — разность.
5. Деление:  $a : b = c$ ;  $\frac{a}{b} = c$  — частное.
6. Извлечение квадратного корня:  $\sqrt{a} = b$  — корень.



## Законы сложения и умножения

$$\left. \begin{aligned} a+b &= b+a \\ a \cdot b &= b \cdot a \end{aligned} \right\} \text{— переместительный закон}$$

$$\left. \begin{aligned} a+(b+c) &= (a+b)+c \\ a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c \end{aligned} \right\} \text{— сочетательный закон}$$

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \text{ — распределительный закон}$$

## Свойства вычитания

$$1. (a+b)-c = (a-c)+b = a+(b-c)$$

$$2. c-(a+b) = (c-a)-b = (c-b)-a$$

## Деление суммы и разности на число

$$1. (a+b):c = a:c + b:c$$

$$2. (a-b):c = a:c - b:c$$

## Деление произведения на число

$$(a \cdot b):c = (a:c) \cdot b = (b:c) \cdot a$$

## Действия с 0 и 1

$$a+0=a$$

$$a \cdot 1=a$$

$$a:1=a$$

$$a-0=a$$

$$a \cdot 0=0$$

$$a:a=1$$

$$a-a=0$$

$$0 \cdot b=0$$

$$0:a=0$$

$$0-a=-a$$

$$0 \cdot 0=0$$

$$1:a=\frac{1}{a}$$

Делить на 0 нельзя!

## Обыкновенные дроби

$$1. \text{ Запись дроби: } \frac{a}{b} \text{ — числитель}$$

$$b \text{ — знаменатель}$$



2.  $\frac{a}{b} < 1$  ( $a < b$ ) — правильная дробь

$\frac{a}{b} \geq 1$  ( $a \geq b$ ) — неправильная дробь

3. Основное свойство дроби:

$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}$ ,  $m \neq 0$  — приведение дроби к новому знаменателю

$\frac{a}{b} = \frac{a:k}{b:k}$ ,  $k \neq 0$ ,  $k$  — общий делитель (сокращение дроби)

### Сложение и вычитание дробей

$$1. \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}; \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

$$2. \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}; \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$$

$b$  и  $d$  — взаимно простые

$$3. \frac{a^{(m)}}{b} + \frac{c^{(n)}}{d} = \frac{a \cdot m + c \cdot n}{\text{НОК}(b; d)}; \quad \frac{a^{(m)}}{b} - \frac{c^{(n)}}{d} = \frac{a \cdot m - c \cdot n}{\text{НОК}(b; d)}$$

$m$  и  $n$  — дополнительные множители

### Умножение и деление дробей

$$1. \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$2. \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$$

$$3. \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

$$4. \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

$$5. \frac{a}{b} : m = \frac{a}{b \cdot m}$$

$$6. a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

### Пропорция

$$1. \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ или } a:b=c:d; a, b, c, d \neq 0$$



2. Основное свойство пропорции:  $a \cdot d = b \cdot c$

3. Решение уравнений, записанных в виде пропорции:

$$\text{Если } \frac{a}{x} \neq \frac{c}{d}, \quad \text{то } x = \frac{a \cdot d}{c}$$

$$\text{Если } \frac{a}{b} \neq \frac{c}{x}, \quad \text{то } x = \frac{b \cdot c}{a}$$

## Проценты

$$1. 1\% = \frac{1}{100}; 1\% = 0,01$$

$$2. n\% = \frac{n}{100} = 0,01 \cdot n$$

3. Нахождение части от числа:  $B = A \cdot n\% = A \cdot 0,01n$

4. Нахождение числа по его части:  $A = B : n\% = B : 0,01n$

5. Нахождение  $n\%$  числа с помощью пропорции:

$$\frac{A - 100\%}{x - n\%}; x = \frac{A \cdot n\%}{100\%}$$

6. Нахождение числа по его  $n\%$  с помощью пропорции:

$$\frac{x - 100\%}{B - n\%}; x = \frac{B \cdot 100\%}{n\%}$$

## Формулы пути

$S = v \cdot t$ ,  $S$  — путь в км, м, см

$v = S : t$ ,  $v$  — скорость в км/ч, км/с, м/с

$t = S : v$ ,  $t$  — время в ч, мин, с

## Формулы работы

$A = p \cdot t$ ,  $A$  — работа (количество работы),  $A = 1$

$p = A : t$ ,  $p$  — производительность труда  $\left(\frac{1}{t}\right)$

$t = A : p$ ,  $t$  — время в месяцах, днях, часах



## Решение простейших уравнений

1. Если  $a + x = b$ , то  $x = b - a$
2. Если  $a - x = b$ , то  $x = a - b$
3. Если  $x - a = b$ , то  $x = a + b$
4. Если  $a \cdot x = b$ , то  $x = b : a$
5. Если  $a : x = b$ , то  $x = a : b$
6. Если  $x : a = b$ , то  $x = a \cdot b$

### I. Формулы сокращенного умножения

1.  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
2.  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
3.  $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \Leftrightarrow (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
4.  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
5.  $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
6.  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \Leftrightarrow (a^3 + b^3) + 3ab(a+b)$
7.  $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \Leftrightarrow (a^3 - b^3) - 3ab(a-b)$
8.  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
9.  $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \Leftrightarrow (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$
10.  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ ,

где  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$

### II. Определение степеней

$$1. \begin{cases} n \in N; a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \\ n = 1; a^1 = a \end{cases}$$

$$2. n = 0; a^0 = 1, a \neq 0$$

$$3. \begin{cases} n = -1; a^{-1} = \frac{1}{a}, a \neq 0; \left(\frac{1}{a}\right)^{-1} = a; \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \\ n = -m; m \in N; a^{-m} = \frac{1}{a^m}, a \neq 0; \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m \end{cases}$$

$$4. n = \frac{k}{m}; k, m \in N; m \geq 2; a^{\frac{k}{m}} = \sqrt[m]{a^k}, a \geq 0; \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$



$$5. \quad n = -\frac{k}{m}; \quad k, m \in \mathbb{N}; \quad m \geq 2; \quad a > 0; \quad a^{-\frac{k}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^k}}$$

6.  $n = \alpha$  — иррациональное число

$1) \quad a > 1; \quad a^{\bar{\alpha}} < a^{\alpha} < a^{+\alpha}$	$^{+}\alpha$ — рациональное приближение $\alpha$ с избытком
$2) \quad 0 < a < 1; \quad a^{+\alpha} < a^{\alpha} < a^{\bar{\alpha}}$	$^{-}\alpha$ — рациональное приближение $\alpha$ с недостатком

### III. Действия со степенями ( $a > 0, b > 0$ )

$1. \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $2. \quad a^m : a^n = a^{m-n}$ $3. \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $4. \quad (a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$ $5. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$6. \quad a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ $7. \quad a^{m-n} = a^m : a^n$ $8. \quad a^{m \cdot n} = (a^m)^n$ $9. \quad a^n \cdot b^n \cdot c^n = (a \cdot b \cdot c)^n$ $10. \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
---	--

### IV. Действия с арифметическими корнями

**Определение.**  $\sqrt[n]{a} = b$  — корень, если  $a \geq 0; b \geq 0; b^n = a$   
 $\sqrt{a} = b$  — корень, если  $a \geq 0; b \geq 0; b^2 = a$

### V. Действия с квадратными корнями

$$1. \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$2. \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$3. \quad (\sqrt{a})^m = \sqrt{a^m} \Leftrightarrow \sqrt{a^m} = (\sqrt{a})^m$$

$$4. \quad (\sqrt{a})^2 = a \Leftrightarrow a = (\sqrt{a})^2$$

$$5. \quad \sqrt{a^2} = |a| \Leftrightarrow |a| = \sqrt{a^2}$$



### Основное свойство корня $n$ -й степени:

$$\sqrt[nk]{a^{nm}} = \sqrt[k]{a^m} \Leftrightarrow \sqrt[k]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{nm}}, k, n, m \in N$$

$$\left. \begin{aligned} a \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{a^n b}, a \geq 0 \\ a \cdot \sqrt[n]{b} &= -\sqrt[n]{a^n b}, a < 0 \end{aligned} \right\} \text{внесение множителя под знак корня}$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[n]{a^{kn} b} &= |a^k| \sqrt[n]{b}, n = 2m \\ \sqrt[n]{a^k b} &= \sqrt[n]{a^n \cdot a^{k-n} b} = a \sqrt[n]{a^{k-n} b} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{вынесение множителя} \\ \text{из-под знака корня} \end{array}$$

$$a \geq 0; b \geq 0; k \geq n; k \in N; n \in N$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{b}{\sqrt[n]{a^k}} &= \frac{b \cdot \sqrt[n]{a^{n-k}}}{a}, n > k; a > 0 \\ \frac{m}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} &= \frac{m(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b}, a > 0; b > 0; a \neq b \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{освобождение дроби} \\ \text{от иррациональности} \\ \text{в знаменателе} \end{array}$$

$\sqrt{a} + \sqrt{b}$  и  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$  — сопряженные выражения:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \text{ — формула двойного радикала}$$

## VI. Прогрессии

**Арифметическая прогрессия** ( $\div (a_n)$ )

**Определение.**  $a_{n+1} = a_n + d, n \in N$

$a_n = a_1 + d(n-1), n \in N$  — формула общего члена

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, n \geq 2 \text{ — характеристическое свойство}$$

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

$d = a_{n+1} - a_n$  — разность арифметической прогрессии

$$a_1 = a_n - d(n-1)$$

$$a_n = a_k - d(n-k), k < n, n, k \in N$$

$$a_n + a_k = a_{n-l} + a_{k+l}, n, k, l \in N$$



### Формулы суммы $\div(a_n)$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; n \in N; \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n; n \in N$$

### Геометрическая прогрессия $(\div\div(b_n))$

**Определение.**  $b_{n+1} = b_n \cdot q; n \in N; q \neq 1$

$q = b_{n+1} : b_n$  — знаменатель геометрической прогрессии

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$  — формула общего члена

$$b_n = b_k \cdot q^{n-k}; k < n; k, n \in N$$

$$b_n \cdot b_k = b_{n+l} \cdot b_{k-l}; k, n, l \in N$$

$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}; n \geq 2, n \in N$  — характеристическое свойство  $\div\div(b_n)$

$$b_1 \cdot b_n = b_1^2 \cdot q^{n-1}$$

### Формулы суммы $\div\div(b_n)$

$$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}; \quad S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1};$$

$S = \frac{a_1}{1-q}$ , где  $|q| < 1$  — сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

## VII. Решение квадратных уравнений

1.  $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, b$  — нечетное число

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac$$

2.  $ax^2 + 2mx + c = 0, b = 2m, m = \frac{b}{2}, b$  — четное число

$$x_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - ac}}{a}, \quad \frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = m^2 - ac$$

3.  $x^2 + px + q = 0, p$  — четное число;  $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

4.  $x^2 + px + q = 0, p$  — нечетное число;  $x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$



5. Решение по формулам Виета:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

6. Решение неполных квадратных уравнений:

1)  $ax^2 + bx = 0$

$$x_1 = 0; x_2 = -\frac{b}{a}$$

2)  $ax^2 + c = 0$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

3)  $ax^2 = 0$

$$x = 0$$

7. Разложение квадратного трехчлена на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

8. Решение квадратных неравенств:

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

$$a(x - x_1)(x - x_2) \geq 0 \text{ методом интервалов на оси}$$

VIII. Решение уравнений и неравенств с модулем

1.  $\sqrt{x^2} = |x|; |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$

2.  $|x| > a$ , то  $\begin{cases} x > a \\ x < -a \end{cases}$

3.  $|x| < a$ , то  $-a < x < a$  или  $\begin{cases} x > -a \\ x < a \end{cases}$



## СПИСОК АЛГОРИТМОВ

**Алгоритм 1.** Порядок действий при вычислении, 6

**Алгоритм 2.** Нахождение значения алгебраического выражения, 9

**Алгоритм 3.** Нахождение неизвестного из формулы, 12

**Алгоритм 4.** Раскрытие скобок, 14

**Алгоритм 5.** Заключение в скобки, 15

**Алгоритм 6.** Приведение одночлена к стандартному виду, 17

**Алгоритм 7.** Умножение одночленов, 19

**Алгоритм 8.** Приведение подобных членов, 21

**Алгоритм 9.** Сложение и вычитание многочленов, 23

**Алгоритм 10.** Умножение многочлена на одночлен, 24

**Алгоритм 11.** Умножение многочлена на многочлен стандартного вида, 25

**Алгоритм 12.** Деление одночлена на одночлен, 28

**Алгоритм 13.** Деление многочлена на одночлен, 29

**Алгоритм 14.** Вынесение общего множителя за скобки, 31

**Алгоритм 15.** Разложение многочлена на множители способом группировки, 33

**Алгоритм 16.** Разложение многочлена на множители по формулам сокращенного умножения, 35

**Алгоритм 17.** Нахождение неизвестного члена в формулах сокращенного умножения, 38

**Алгоритм 18.** Нахождение ОДЗ алгебраической дроби, 43

**Алгоритм 19.** Сокращение алгебраических дробей, 45

**Алгоритм 20.** Приведение дробей к общему знаменателю, 47

**Алгоритм 21.** Сложение и вычитание алгебраических дробей, 50

**Алгоритм 22.** Умножение и деление алгебраических дробей, 53



## Список алгоритмов

- Алгоритм 23.** Выполнение совместных действий над алгебраическими дробями, 56
- Алгоритм 24.** Сравнение двух выражений, 62
- Алгоритм 25.** Решение числовых неравенств, 67
- Алгоритм 26.** Сложение и умножение двойных неравенств, 67
- Алгоритм 27.** Вычитание двойных неравенств, 69
- Алгоритм 28.** Деление двойных неравенств, 70
- Алгоритм 29.** Доказательство числовых неравенств, 71
- Алгоритм 30.** Нахождение объединения и пересечения множеств, 76
- Алгоритм 31.** Решение неравенств  $ax \geq b$ , 79
- Алгоритм 32.** Решение систем неравенств с одной переменной, 83
- Алгоритм 33.** Решение двойных неравенств, 84
- Алгоритм 34.** Решение неравенств  $(x-a)(x-b) \geq 0$  и  $\frac{x-a}{x-b} \geq 0$  с помощью систем неравенств, 86
- Алгоритм 35.** Графическое решение линейных неравенств  $kx + b \geq 0$ , 92
- Алгоритм 36.** Графическое решение систем неравенств I степени с одной переменной, 94
- Алгоритм 37.** Решение неравенств  $|kx + b| \geq a$ , 97
- Алгоритм 38.** Решение квадратных неравенств, 100
- Алгоритм 39.** Решение неравенств вида  $ax^2 + c \geq 0$ , 103
- Алгоритм 40.** Решение неравенств методом интервалов  $P(x) \geq 0$ , 106
- Алгоритм 41.** Решение квадратных неравенств методом интервалов, 108
- Алгоритм 42.** Графическое решение квадратных неравенств, 112
- Алгоритм 43.** Вычисление значения степени  $a^n$ ,  $n \in N$ , 117
- Алгоритм 44.** Запись числа в стандартном виде с натуральным показателем, 119
- Алгоритм 45.** Вычисление значения выражений, содержащих степени, 122
- Алгоритм 46.** Нахождение степени по определению, 125
- Алгоритм 47.** Действия над степенями с целыми показателями, 129
- Алгоритм 48.** Запись числа в стандартном виде с целым показателем, 133
- Алгоритм 49.** Вычисление степеней с рациональным показателем, 139
- Алгоритм 50.** Извлечение арифметического квадратного корня, 147
- Алгоритм 51.** Сравнение арифметических корней, 148
- Алгоритм 52.** Квадратный корень из степени, 152
- Алгоритм 53.** Квадратный корень из произведения, 153



**Алгоритм 54.** Квадратный корень из дроби, 155

**Алгоритм 55.** Вынесение множителя из-под знака корня, 156

**Алгоритм 56.** Внесение множителя под знак корня, 158

**Алгоритм 57.** Сложение и вычитание квадратных корней, 160

**Алгоритм 58.** Освобождение от иррациональности знаменателя или числителя дроби, 161

**Алгоритм 59.** Извлечение квадратного корня из натурального числа, 168

**Алгоритм 60.** Извлечение квадратного корня с заданной точностью из десятичной дроби, 170

**Алгоритм 61.** Сравнение чисел, 178

**Алгоритм 62.** Изображение действительных чисел на координатной прямой, 180

**Алгоритм 63.** Перевод обыкновенных дробей в периодические дроби, 182

**Алгоритм 64.** Перевод периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь, 183

**Алгоритм 65.** Сложение и вычитание комплексных чисел, 190

**Алгоритм 66.** Умножение комплексных чисел, 191

**Алгоритм 67.** Деление комплексных чисел, 192

**Алгоритм 68.** Решение уравнений вида  $z^2 = -a$  ( $a > 0$ ), 195

**Алгоритм 69.** Решение квадратных уравнений с комплексным неизвестным, 196

**Алгоритм 70.** Составление квадратного уравнения по его комплексным корням, 197

**Алгоритм 71.** Разложение на множители трехчлена  $z^2 + pz + q = 0$  или  $az^2 + bz + c = 0$ , 198

**Алгоритм 72.** Нахождение приближенного значения  $x$  с недостатком и с избытком, 201

**Алгоритм 73.** Нахождение приближенного значения числа и его абсолютной погрешности, 203

**Алгоритм 74.** Округление чисел, 205

**Алгоритм 75.** Нахождение абсолютной погрешности чисел, записанных в стандартном виде, 207

**Алгоритм 76.** Нахождение относительной погрешности, 209

**Алгоритм 77.** Сложение и вычитание приближенных чисел, 213

**Алгоритм 78.** Умножение и деление приближенных значений чисел, 214

**Алгоритм 79.** Решение линейных уравнений, 221

**Алгоритм 80.** Решение уравнений  $|kx + b| = c$ , 224

**Алгоритм 81.** Решение неполных квадратных уравнений, 226

**Алгоритм 82.** Выделение полного квадрата в трехчлене  $ax^2 + bx + c$ , 229

**Алгоритм 83.** Решение квадратных уравнений выделением квадрата двучлена, 231



**Алгоритм 84.** Решение квадратных уравнений  $ax^2 + bx + c = 0$  по формуле, 233

**Алгоритм 85.** Решение уравнений по формулам Виета, 238

**Алгоритм 86.** Составление квадратных уравнений по его корням, 240

**Алгоритм 87.** Исследование решений квадратного уравнения, содержащего параметр, 243

**Алгоритм 88.** Разложение трехчлена  $ax^2 + bx + c$  на множители, 246

**Алгоритм 89.** Решение биквадратных уравнений  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ , 248

**Алгоритм 90.** Решение уравнений, сводящихся к квадратным уравнениям, 249

**Алгоритм 91.** Решение дробно-рациональных уравнений

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0, \quad 253$$

**Алгоритм 92.** Решение иррациональных уравнений, 257

**Алгоритм 93.** Деление многочлена  $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  на двучлен  $(x - a)$ , 262

**Алгоритм 94.** Нахождение остатка от деления многочлена  $P_n(x)$  на  $(x - a)$ , 265

**Алгоритм 95.** Решение уравнения  $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ , 267

**Алгоритм 96.** Разложение на множители многочлена  $P_n(x) = x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n$ , 268

**Алгоритм 97.** Решение уравнений  $x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n = 0$ , 270

**Алгоритм 98.** Решение возвратного уравнения III степени  $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ , 272

**Алгоритм 99.** Решение возвратного уравнения IV степени  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ , 273

**Алгоритм 100.** Решение систем уравнений способом подстановки, 277

**Алгоритм 101.** Решение систем уравнений способом сложения, 280

**Алгоритм 102.** Графический способ решения систем уравнений, 283

**Алгоритм 103.** Решение систем, в которых одно уравнение имеет I степень, а другое — II степень, 287

**Алгоритм 104.** Решение систем уравнений II степени способом сложения, 288

**Алгоритм 105.** Решение систем уравнений вида  $\begin{cases} x + y = b \\ xy = c \end{cases}$  по формулам Виета, 289

**Алгоритм 106.** Решение задач с помощью уравнений I степени, 297

**Алгоритм 107.** Решение задач с помощью систем уравнений I степени, 302

**Алгоритм 108.** Решение задач на движение, работу и стоимость товара, 305

**Алгоритм 109.** Решение задач с помощью квадратного уравнения или системы уравнений II степени, 312

**Алгоритм 110.** Решение задач на нахождение  $n\%$  числа  $A$  или числа  $A$  по его  $n\%$ , 316

**Алгоритм 111.** Решение задач на снижение (повышение) цен и банковский процент, 318



**Алгоритм 112.** Решение задач на смеси и сплавы, 322

**Алгоритм 113.** Нахождение значения члена числовой последовательности по формуле  $n$ -го члена (или номера члена по его значению), 326

**Алгоритм 114.** Нахождение члена последовательности, заданной рекуррентной формулой, 328

**Алгоритм 115.** Как доказать, что числовая последовательность есть арифметическая прогрессия, 330

**Алгоритм 116.** Нахождение номера заданного члена  $a_n$  арифметической прогрессии, 332

**Алгоритм 117.** Нахождение суммы  $n$  членов арифметической прогрессии, 335

**Алгоритм 118.** Как доказать, что числовая последовательность есть геометрическая прогрессия, 337

**Алгоритм 119.** Нахождение  $n$ -го члена геометрической прогрессии или номера  $n$ -го члена, 339

**Алгоритм 120.** Нахождение суммы  $n$  членов геометрической прогрессии или нахождение числа  $n$  по сумме, 342

**Алгоритм 121.** Вычисление значений функции по формуле, 349

**Алгоритм 122.** Построение точки по ее координатам, 353

**Алгоритм 123.** Нахождение координат заданных точек в системе координат, 354

**Алгоритм 124.** Нахождение  $x$  и  $y$  по графику, 357

**Алгоритм 125.** Определение принадлежности точки графику, 358

**Алгоритм 126.** Построение графика функции  $y = kx$ , 363

**Алгоритм 127.** Построение графика функции  $y = kx + b$ , 370

**Алгоритм 128.** Построение графика функции  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  ( $a, b \neq 0$ ), 373

**Алгоритм 129.** Построение графиков функций  $y = b$  и  $x = a$ , 375

**Алгоритм 130.** Построение графика функции  $y = |x|$ , 378

**Алгоритм 131.** Построение графика функции  $y = |x + a| + b$ , 379

**Алгоритм 132.** Построение графика функции  $y = \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ), 380

**Алгоритм 133.** Построение графика функции  $y = \frac{k}{x}$ , 382

**Алгоритм 134.** Построение графика функции  $y = \frac{k}{x+a} + b$ , 390

**Алгоритм 135.** Построение графика функции  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ), 394

**Алгоритм 136.** Построение графика функции  $y = ax^2 + c$ , 396

**Алгоритм 137.** Построение графика функции  $y = a(x + b)^2$ , 399

**Алгоритм 138.** Построение графика функции  $y = a(x + b)^2 + c$ , 402

**Алгоритм 139.** Построение графиков функций  $y = x^2 + px + q$  и  $y = ax^2 + bx + c$  выделением полного квадрата, 406



## Список алгоритмов

**Алгоритм 140.** Построение графика функции  $y = ax^2 + bx + c$  по точкам, 410

**Алгоритм 141.** Исследование функции  $y = ax^2 + bx + c$ , 413

**Алгоритм 142.** Построение графиков функций  $y = |ax^2 + bx + c|$  и  $y = ax^2 + b|x| + c$ , 416

**Алгоритм 143.** Построение графика функции  $y = |ax^2 + b|x| + c|$ , 418

**Алгоритм 144.** Построение графика функции  $y = x^3$  и ее исследование, 423

**Алгоритм 145.** Построение графика функции  $y = \sqrt{x}$  и ее свойства, 424

**Алгоритм 146.** Построение графика функции  $y = \sqrt[3]{x}$  и ее свойства, 425

**Алгоритм 147.** Графическое решение уравнений, 427



# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Глава I. Алгебраические выражения</b> .....	5
§ 1. Числовые выражения .....	5
§ 2. Алгебраические выражения .....	8
§ 3. Одночлен. Стандартный вид одночлена .....	17
§ 4. Многочлен .....	21
§ 5. Разложение многочленов на множители .....	31
<b>Глава II. Алгебраические дроби</b> .....	41
§ 1. Алгебраические дроби .....	41
<b>Глава III. Неравенства</b> .....	60
§ 1. Числовые неравенства .....	60
§ 2. Неравенства с одной переменной .....	74
§ 3. Системы неравенств с одной переменной .....	82
§ 4. Графическое решение линейных неравенств .....	92
§ 5. Решение неравенств с неизвестной под знаком модуля .....	96
§ 6. Квадратные неравенства .....	100
§ 7. Метод интервалов (промежутков) .....	106
<b>Глава IV. Степени</b> .....	116
§ 1. Степень с натуральным показателем .....	116
§ 2. Степень с целым показателем .....	125
§ 3. Стандартный вид числа .....	133
§ 4. Степень с рациональным показателем .....	136
§ 5. Степень с иррациональным показателем .....	143
<b>Глава V. Корни</b> .....	145
§ 1. Арифметический квадратный корень .....	145
§ 2. Свойства арифметических корней $a \geq 0; b \geq 0$ .....	151
§ 3. Извлечение корня из числа .....	168
<b>Глава VI. Действительные числа</b> .....	174
§ 1. Рациональные и иррациональные числа .....	174
§ 2. Сравнение действительных чисел .....	178
§ 3. Изображение действительных чисел на координатной прямой .....	180
§ 4. Перевод обыкновенных дробей в периодические и наоборот — периодических дробей в обыкновенные .....	182
§ 5. Модуль числа .....	186
§ 6. Комплексные числа .....	188
§ 7. Решение квадратных уравнений .....	195



<b>Глава VII. Приближенные вычисления</b> .....	200
§ 1. Абсолютная погрешность .....	200
§ 2. Округление чисел .....	205
§ 3. Относительная погрешность .....	209
§ 4. Действия над приближенными значениями .....	213
<b>Глава VIII. Уравнение</b> .....	219
§ 1. Решение линейных уравнений .....	221
§ 2. Решение уравнений I степени, содержащих неизвестную под знаком модуля .....	224
§ 3. Квадратные уравнения .....	226
§ 4. Дробно-рациональные уравнения .....	253
§ 5. Решение иррациональных уравнений .....	257
§ 6. Алгебраические уравнения $n$ -й степени .....	262
§ 7. Возвратные или симметричные уравнения .....	272
<b>Глава IX. Решение систем уравнений</b> .....	275
§ 1. Системы двух уравнений I степени с двумя неизвестными .....	275
§ 2. Графический способ решения систем уравнений .....	283
§ 3. Решение систем уравнений II степени .....	287
<b>Глава X. Решение задач (моделирование)</b> .....	295
§ 1. Решение задач с помощью уравнений I степени .....	297
§ 2. Решение задач с помощью систем уравнений I степени .....	302
§ 3. Задачи на движение, работу и стоимость товара .....	305
§ 4. Решение задач с помощью квадратного уравнения или системы уравнений II степени .....	312
§ 5. Решение задач на проценты .....	316
<b>Глава XI. Прогрессии</b> .....	325
§ 1. Числовая последовательность .....	325
§ 2. Арифметическая прогрессия .....	330
§ 3. Геометрическая прогрессия .....	337
<b>Глава XII. Функция</b> .....	346
§ 1. Переменные и постоянные величины .....	347
§ 2. Прямоугольная система координат .....	351
§ 3. Свойства функции .....	360
§ 4. Функция $y = kx$ и ее график .....	363
§ 5. Линейная функция и ее график .....	370
§ 6. Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее свойства .....	380
§ 7. Квадратичная функция .....	394
§ 8. Исследование квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ .....	413
<b>Приложение</b> .....	431
<b>Список алгоритмов</b> .....	440



**Издательский Дом «Литера»**  
приглашает к сотрудничеству авторов  
Телефоны редакции: (812) 560-8684, 325-4741  
E-mail: [publish@litera.spb.ru](mailto:publish@litera.spb.ru)  
<http://litera.spb.ru>

По вопросам реализации обращаться  
в Санкт-Петербурге: (812) 441-3649, 441-3650  
E-mail: [sales@litera.spb.ru](mailto:sales@litera.spb.ru)  
в Москве: (495) 781-2053, 912-3128  
E-mail: [mail@litera.inc.ru](mailto:mail@litera.inc.ru)

*Михайлова Жанна Николаевна*

**Алгоритмы — ключ к решению задач  
АЛГЕБРА  
7—9 классы**

12+

Редактор *И. Жуковская*  
Обложка *В. Финогенов*  
Корректор *И. Астрова*  
Верстка *А. Силин*

Подписано в печать 20.01.17. Формат 70×90<sup>1/16</sup>. Печать офсетная.  
Гарнитура SchoolBook. Усл. печ. л. 32,76. Тираж 3000 экз. Заказ № 3384.

ООО «Издательский Дом „Литера“»  
Россия, 192131, Санкт-Петербург, Ивановская ул., 24 лит. А

Отпечатано в филиале  
«Тверской полиграфический комбинат детской литературы»  
ОАО «Издательство „Высшая школа“»



Россия, 170040, Тверь, проспект 50 лет Октября, д. 46  
Тел.: +7(4822) 44-85-98. Факс: +7(4822) 44-61-51



b.ru

u

1

Глава IX. П.

Глава X. П.

Глава XI. П.

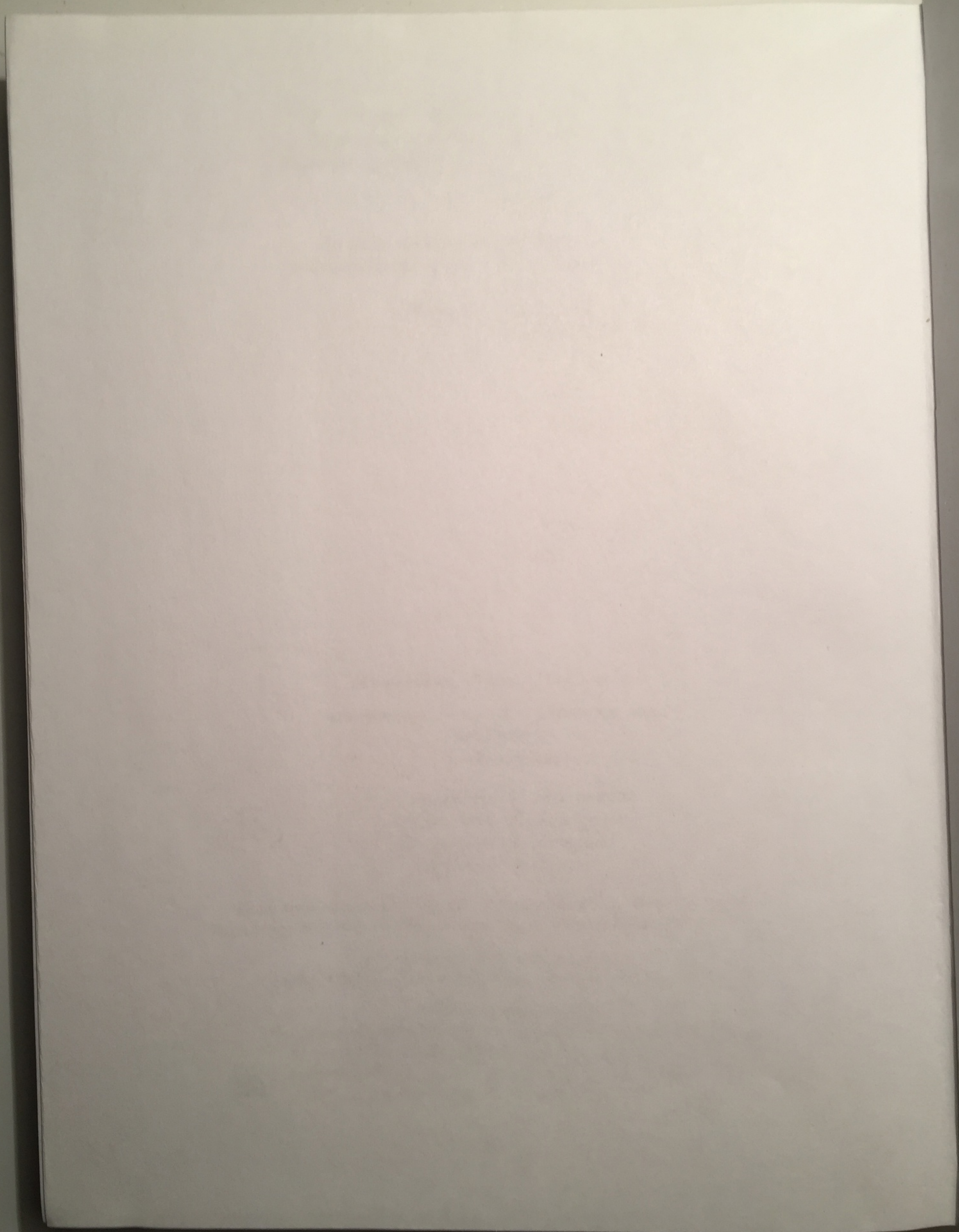
Глава XII. П.

ная.  
№ 3384.

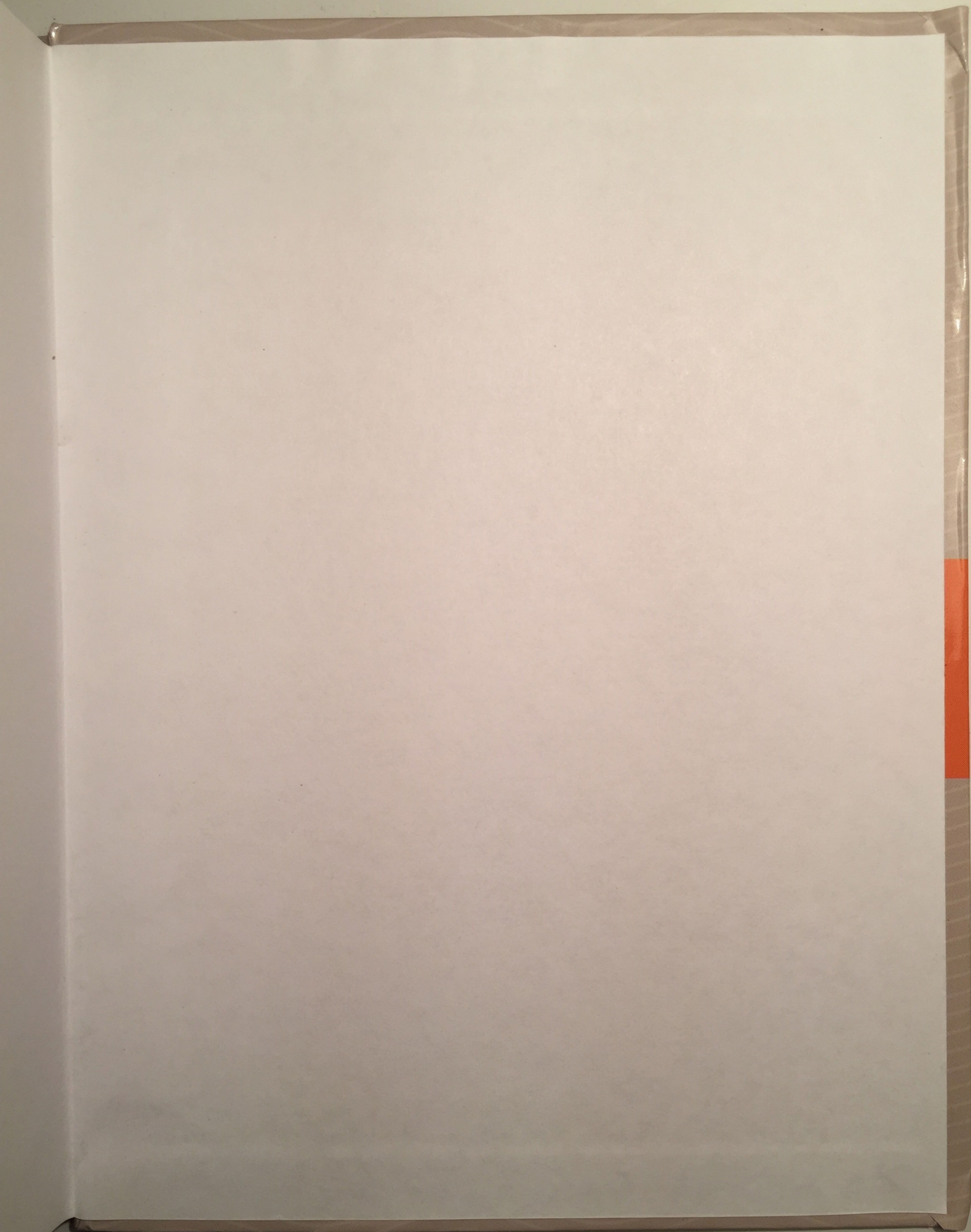
A

«...»











книга - репетитор

# Алгоритмы —

ключ к решению задач



Михайлова Жанна Николаевна —  
учитель высшей категории, методист,  
Отличник народного просвещения.  
Является автором эффективной  
методики обучения математике через  
алгоритмизацию базового учебного  
материала и работу с формулами.

Математика. **5–6** классы

Алгебра. **7–9** классы

Алгебра и элементарные функции. **10–11** классы

Начала математического анализа.

Геометрия. Тригонометрия. **10–11** класс

Учебные пособия дают возможность освоить  
школьную программу каждому ученику  
самостоятельно, без репетитора!

[www.litera.spb.ru](http://www.litera.spb.ru)

ISBN 978-5-407-00491-2



9 785407 004912



**7-9**  
классы

**Алгоритмы —**

**ключ к решению задач**

**Алгебра**

